



ამოცანათა კრებული არარელატივისტურ  
დაჯახებათა კვანტურ თეორიაში და  
რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თეიმურაზ ნადარეიშვილი

ამოცანათა კრებული არარელატივისტურ  
დაჯახებათა კვანტურ თეორიაში და  
რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში



უნივერსიტეტის  
გამომცემლობა



# სარჩევი

ამოცანები, პასუხები  
და ამოხსნები

## ნაწილი I. არარელატივისტური კვანტურ დაჯახებათა თეორია

თავი 1. ბორნის მიახლოება	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	7 92
თავი 2. გაფანტვის ფაზური თეორია	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	14 95
თავი 3. იოსტის ფუნქციები და რეჯეს პოლუსები. ლიპმან-შვინგერის განტოლება	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	21 98
თავი 4. ნელი ნაწილაკების გაფანტვა. რეზონანსული მოვლენები გაფანტვისას	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	28 99
თავი 5. სწრაფი ნაწილაკების გაფანტვა. ეიკონალის და კვაზიკლასიკური მიახლოებები	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	37 108
თავი 6. სპინის მქონე ნაწილაკების გაფანტვა	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	42 111
თავი 7. გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზური თვისებები. შედგენილი ნაწილაკების გაფანტვა. არადრეკადი გაფანტვები	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	46 115

## ნაწილი II. რელატივისტური კვანტური მექანიკა

თავი 1. ლორენცისა და პუანკარეს სიმეტრიები	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	54 123
თავი 2. კლეინ-გორდონის განტოლება	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	60 127
თავი 3. დირაკის მატრიცები	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	65 150
თავი 4. დირაკის განტოლება	
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	74 166

## დამატება

A. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ზოგიერთი თვისება .....	234
B. ინტეგრალები და ინტეგრალური თანაფარდობები .....	242
ლიტერატურა .....	243



# ნანილი I

## არარელატივისტური კვანძურ დაჯახებათა თეორია

### თავი 1. ბორნის მიახლოება

ნანილაკთა გაფანტვის შესწავლა დაკავშირებულია სტაციონარული შრედინგერის განტოლების ამოხსნასთან:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) \right] \Psi_{\vec{k}_0}^+(\vec{r}) = E \Psi_{\vec{k}_0}^+(\vec{r}) \quad (1.1)$$

ტალღურ ფუნქციას დიდ მანძილებზე შემდეგი ასიმპტოტური ყოფაქცევა გააჩნია (იგულისხმება, რომ პოტენციალი უსასრულობაში  $1/r$ -ზე სწრაფად ეცემა, რადგანაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, როგორც დაცემული, ასევე გაფანტული ტალღები დიდ მანძილებზე მახინჯდებიან, როგორც ეს ჩანს კულონურ ველზე გაფანტვისას):

$$\Psi_{\vec{k}_0}^+(\vec{r}) \approx e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} + \frac{f(\vec{k}, \vec{k}_0)}{r} e^{ikr}, \quad \vec{k} = \frac{k_0 \vec{r}}{r} \quad (1.2)$$

სადაც  $\vec{k}$  გაფანტული ნანილაკის ტალღური ვექტორია ( $k = k_0 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ ), ხოლო  $f(\vec{k}, \vec{k}_0)$  გაფანტვის ამპლიტუდა განსაზღვრავს  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{k}, \vec{k}_0)|^2$  გაფანტვის დიფერენციალურ კვეთას, რომლის ინტეგრება კუთხეების მიხედვით იძლევა  $\sigma = \int |f(\vec{k}, \vec{k}_0)|^2 d\Omega_{\vec{k}}$  გაფანტვის სრულ კვეთას.

თუ გამოვიყენებთ თავისუფალი ნანილაკის გრინის ფუნქციას:

$$G_E^+(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{m}{2\pi\hbar^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.3)$$

მაშინ (1.1) განტოლება (1.2) სასაზღვრო პირობის გამოყენებით, შესაძლოა, შემდეგი ინტეგრალური განტოლების სახით ჩაინეროს:

$$\Psi_{\vec{k}_0}^+(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} U(\vec{r}') \Psi_{\vec{k}_0}^+(\vec{r}') dV' \quad (1.4)$$

საიდანაც (1.4)-ის (1.2)-თან შედარებით მიიღება გაფანტვის ამპლიტუდის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$f(\vec{k}, \vec{k}_0) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} U(r) \Psi_{\vec{k}_0}^+(\vec{r}) dV \quad (1.5)$$



ეს ფორმულა ხელსაყრელია სხვადასხვა მიახლოებითი გამოთვლების ჩასატარებლად. ასე მაგალითად,  $\Psi_{\vec{k}_0}^+(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$  -თვის (1.5)-დან მიიღება ბორნის მიახლოების ფორმულა გაფანტვის ამპლიტუდისათვის:

$$f^B(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{U}(\vec{q}), \quad \tilde{U}(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} U(\vec{r}) dV \quad (1.6)$$

სადაც  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$  გაფანტვისას ნაწილაკის იმპულსის ცვლილებაა (გადაცემული იმპულსია). ამასთან,  $q = 2k \sin(\theta/2)$ , რომელშიც  $\theta$  გაფანტვის კუთხეა. (1.6) ფორმულა წარმოადგენს გაფანტვის ამპლიტუდის, ურთიერთქმედების პოტენციალის ხარისხების მიხედვით, გაშლის პირველ წევრს. ამ ფორმულის გამოყენება მაშინ არის შესაძლებელი, თუ სრულდება ერთ-ერთი უტოლობა მაინც:

$$U_0 \ll \frac{\hbar^2}{mR^2} \quad \text{ან} \quad U_0 \ll \frac{\hbar v}{R} \quad (1.7)$$

სადაც  $U_0$  და  $R$  პოტენციალის მახასიათებელი სიდიდეა და რადიუსია, ხოლო  $v$  სიჩქარეა.

ცენტრალური სიმეტრიის ველში გაფანტვისას გაფანტვის ამპლიტუდა დამოკიდებულია მხოლოდ  $E$  ენერგიაზე და პოლარულ  $\theta$  კუთხეზე და ბორნის მიახლოებაში  $\hbar q$  გადაცემული იმპულსის სიდიდეზე. ამასთან, (1.6) ფორმულა ცენტრალური სიმეტრიის ველისათვის ასე ჩაიწერება:

$$f^B(q) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty U(r) \frac{\sin qr}{q} r dr \quad (1.8)$$

1.1. ბორნის მიახლოებაში იპოვეთ  $m$  მასის და  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  იმპულსის ნაწილაკების გაფანტვის დიფერენციალური და სრული კვეთები იუკავას ველში:

$$V(r) = \frac{e^{-r/a}}{r} V_0 a$$

სადაც  $V_0$  და  $a > 0$  ნამდვილი სიდიდეებია. განიხილეთ  $a \rightarrow \infty$  შემთხვევა და ახსენით მიღებული შედეგი.

1.2. ბორნის მიახლოებაში იპოვეთ ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა და სრული კვეთა შემდეგ ველში:

$$U(r) = \alpha \delta(r - R)$$

გამოიკვლიეთ ნელი და სწრაფი ნაწილაკების ზღვრული შემთხვევები.

1.3. ბორნის მიახლოებაში იპოვეთ ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა და სრული კვეთა შემდეგ ველში:

$$U(r) = U_0 e^{-r/R}$$

1.4. ბორნის მიახლოებაში იპოვეთ ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა და სრული კვეთა შემდეგ ველში:

$$U(r) = \alpha / r^2$$

1.5. ბორნის მიახლოებაში იპოვეთ ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა და სრული კვეთა შემდეგ ველში:

$$U(r) = U_0 e^{-r^2/R^2}$$

1.6. ბორნის მიახლოებაში იპოვეთ ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა და სრული კვეთა შემდეგ ველში:

$$U(r) = \begin{cases} U_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

გამოიკვლიეთ ნელი და სწრაფი ნაწილაკების ზღვრული შემთხვევები.

1.7.\* აჩვენეთ, რომ ბორნის მიახლოებაში  $U(r)$  პოტენციალისათვის ნაწილაკების დიდ ენერჯიებზე ( $kR \gg 1$ ) გაფანტვის სრული კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma(E)|_{E \rightarrow \infty} \approx \frac{m}{2\hbar^2 E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\rho, z) dz \right]^2 d^2 \rho$$

**მითითება:** გაშალეთ  $\vec{q}$  გადაცემული იმპულსი ორ მდგენელად:  $\vec{q} = \vec{q}_{\parallel} + \vec{q}_{\perp}$ , სადაც  $\vec{q}_{\parallel}$  მიმართულია  $\vec{k}_0$ -ის გასწვრივ (ნაწილაკის იმპულსი დაჯახებამდე) და  $\vec{q}_{\perp} \perp \vec{k}_0$ .

1.8. იპოვეთ ძირითად მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ატომზე სწრაფი ელექტრონების დრეკადი გაფანტვის დიფერენციალური და სრული კვეთები. გამფანტავ პოტენციალს შემდეგი სახე აქვს:

$$U(r) = -e^2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{a_B} \right) e^{-\frac{2r}{a_B}}; \quad a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

1.9.\* იპოვეთ ნეიტრალურ ატომებზე სწრაფი ელექტრონების დრეკადი გაფანტვის სრული კვეთის დამოკიდებულება  $Z$ -ზე, როდესაც  $Z \gg 1$ . ისარგებლეთ ტომას-ფერმის მოდელით.

**მითითებები:**

ა) ტომას-ფერმის მოდელში გაფანტული ელექტრონის ურთიერთქმედებას ნეიტრალურ ატომთან (ატომის პოლარიზაციის გაუთვალისწინებლად) შემდეგი სახე

აქვს:  $U(r) = -\phi(r) = -\frac{Z}{r} \chi\left(\frac{rZ^{1/3}}{b}\right)$ , სადაც  $\chi(x)$  ტომას-ფერმის მოდელის უნი-

ვერსალური ფუნქციაა (ვსარგებლობთ  $e = \hbar = m_e = 1$  ატომური ერთეულებით).

ბ) იპოვეთ გაფანტვის ამპლიტუდა ბორნის მიახლოებაში.

1.10.\* შეშფოთების თეორიის მე- $n$  რიგში მიიღეთ  $U(r)$  პოტენციალურ ველში ნაწილაკის გაფანტვის ამპლიტუდის გამოსახულება.

**მითითება:** (1.4) და (1.5)-ის გამოყენებით წინასწარ მიიღეთ ინტეგრალური განტოლება გაფანტვის ამპლიტუდისათვის და გამოიყენეთ თავისუფალი ნაწილაკის გრინის ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში.

1.11. გამოთვალეთ გაფანტვის ამპლიტუდა შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში. იპოვეთ  $\text{Im} f^{(2)}(E, \theta = 0)$  და ახსენით მიღებული შედეგი. გამოიყენეთ წინა ამოცანის შედეგები.

1.12.\* იპოვეთ შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში გაფანტვის ამპლიტუდა  $U(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-r/R}$  იუკავას პოტენციალისათვის.

**მითითება:** გამოიყენეთ 1.10 ამოცანის შედეგები და ნაშთთა თეორია ინტეგრალების ასაღებად.

1.13. იპოვეთ შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში  $U(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-r/R}$  იუკავას პოტენციალისათვის გაფანტვის ამპლიტუდა  $qR \gg 1$  დიდი გადაცემული იმპულსებისათვის; გამოიყენეთ 1.10 ამოცანის შედეგები.

1.14.\* აჩვენეთ, რომ შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში  $kR \gg 1$  დიდ ენერგიებზე და  $qR \leq 1$  გადაცემული იმპულსებისათვის გაფანტვის ამპლიტუდა შემდეგი ფორმულით აღინერება:

$$f^{(2)} \approx i \frac{m^2}{4\pi\hbar^4 k} \iint [\bar{\rho}, z dz]^2 \exp[-i\bar{q}_\perp \cdot \bar{\rho}] d^2 \rho$$

სადაც  $R$  პოტენციალის რადიუსია.

**მითითება:** გამოიყენეთ 1.10 ამოცანის შედეგები და ნაშთთა თეორია ინტეგრალების ასაღებად.

1.15. გამოიყენეთ წინა ამოცანაში მიღებული შედეგი  $U(r) = U_0 e^{-r^2/R^2}$  პოტენციალისათვის.

1.16.  $E = 0$ -თვის ერთმანეთს შეადარეთ ზუსტი და ბორნის მიახლოების გაფანტვის ამპლიტუდები  $U(r) \geq 0$  განზიდვის პოტენციალისათვის. აჩვენეთ, რომ ბორნის მიახლოება იძლევა კვეთის მეტ მნიშვნელობას.

1.17.  $E = 0$ -თვის ერთმანეთს შეადარეთ ზუსტი და ბორნის მიახლოების გაფანტვის ამპლიტუდები მიზიდვის პოტენციალისათვის, რომელსაც არ გააჩნია ბმული

მდგომარეობები (ანუ პოტენციალური ორმოსათვის, რომელსაც არ გააჩნია სათანადო სიღრმე). აჩვენეთ, რომ ბორნის მიახლოება იძლევა კვეთის ნაკლებ მნიშვნელობას.

1.18. ბორნის მიახლოებაში მიიღეთ დამუხტული ნაწილაკის  $H(\vec{r})$  ველში გაფანტვის ამპლიტუდის გამოსახულება. დარწმუნდით მიღებული შედეგის ყალიბრულ ინვარიანტობაში. გაითვალისწინეთ, რომ დამუხტული ნაწილაკის მაგნიტურ ველთან ურთიერთქმედებას შეუფოთების თეორიის პირველ რიგში შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{V} = -\frac{e}{2mc} (\hat{p}\vec{A} + \vec{A}\hat{p}).$$

1.19. აჩვენეთ, რომ, თუ პოტენციალს გააჩნია ტრანსლაციური ინვარიანტობის თვისება  $V(\vec{r} + \vec{R}) = V(\vec{r})$ , სადაც  $\vec{R}$  მუდმივი ვექტორია, მაშინ ბორნის მიახლოებაში გაფანტვა არ გვაქვს, თუ სრულდება პირობა  $\vec{q} \cdot \vec{R} = 2\pi m$ , სადაც  $n$  მთელი რიცხვია.

1.20. სფერული სიმეტრიის მქონე  $\rho(r)$  მუხტური სიმკვრივის ობიექტზე ელექტრონის გაფანტვისას ბორნის მიახლოებაში გამოსახეთ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა, როგორც ნამრავლი  $q$  წერტილოვან მუხტზე გაფანტვისა (რეზერვორდის გაფანტვა) და  $F(k)$  ფორმფაქტორის კვადრატის, სადაც  $k$  არის გადაცემული იმპულსი. გამოთვალეთ  $F(k)$  შემდეგ შემთხვევაში:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3q}{4\pi R^3} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

1.21. სფერული სიმეტრიის მქონე  $\rho(r)$  მუხტური სიმკვრივის ობიექტზე ელექტრონის გაფანტვისას ბორნის მიახლოებაში გამოსახეთ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა, როგორც ნამრავლი  $q$  წერტილოვან მუხტზე გაფანტვისა (რეზერვორდის გაფანტვა) და  $F(k)$  ფორმფაქტორის კვადრატის, სადაც  $k$  არის გადაცემული იმპულსი. გამოთვალეთ  $F(k)$  შემდეგ შემთხვევაში:

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi^{3/2} R^3} e^{-\frac{r^2}{R^2}}$$

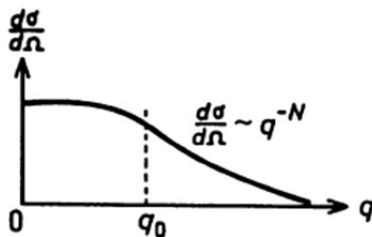
1.22. იპოვეთ ბორნის მიახლოებაში სწრაფი ნაწილაკებისათვის ( $ka \gg 1$ ) გაფანტვის სრული კვეთა  $U = \frac{\alpha}{(r^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}}$ ;  $n > 2$  პოტენციალურ ველში.

1.23. იპოვეთ ორგანზომილებიან შემთხვევაში ბორნის მიახლოებაში (ველი  $U = U(x, z)$ ) გაფანტვის ამპლიტუდა. ნაწილაკების ნაკადი მიმართულია  $z$  ღერძის გასწვრივ.

1.24. გამოთვალეთ ბორნის მიახლოებაში  $m$  მასის ნაწილაკის გაფანტვის დიფერენციალური და სრული კვეთები  $V(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$  ველში.

1.25.  $m$  მასისა და  $e$  მუხტის მქონე ნაწილაკი განიბნევა ელექტროსტატიკურ ველში, რომელსაც ქმნის სფერული სიმეტრიულად განაწილებული მუხტი. ცნობილია, რომ  $\int r^2 \rho(r) d^3x = A$ , სადაც  $\rho(r) d^3x$  მუხტია  $d^3x$  მოცულობის ელემენტში. ამასთანავე,  $\rho$  ნულისაკენ მიისწრაფვის უსასრულობაში და  $\int \rho(r) d^3x = 0$ ; გამოთვალეთ ბორნის პირველ მიახლოებაში წინ გაბნევის დიფერენციალური კვეთა  $\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=0}$ , სადაც  $\theta$  გაფანტვის კუთხეა.

1.26.  $V$  პოტენციალისათვის დრეკადი გაბნევა შეიძლება გამოთვლილ იქნეს ბორნის პირველ მიახლოებაში.  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  გაფანტვის დიფერენციალური კვეთის  $q = |\vec{k} - \vec{k}'|$  გადაცემულ იმპულსზე დამოკიდებულების ექსპერიმენტული მონაცემები მოცემულია ნახაზზე:



ნახაზზე მოცემული პარამეტრების საშუალებით დაადგინეთ მიახლოებითი ზომა (რა მანძილებზე მოქმედებს)  $V$  პოტენციალისა.

**მიითითება:** ბორნის მიახლოებაში გაფანტვის ამპლიტუდის გამოსახულება გაშალეთ მცირე  $q$ -ებისათვის.

1.27. წინა 1.26 ამოცანაში დაადგინეთ  $V$  პოტენციალის ყოფაქცევა მცირე მანძილებზე.

1.28.  $V(r)$  პოტენციალზე გაფანტვისას ტალღური ფუნქცია შეიძლება შემდეგი სახით ჩავენეროთ:  $\psi = e^{ikz} + v(r)$ , სადაც პირველი წევრი ბრტყელი ტალღაა, ხოლო მეორე წევრი კი გაფანტული ტალღაა. მიიღეთ ბორნის პირველ მიახლოებაში  $v(r)$  ფუნქციისათვის დიფერენციალური განტოლება.

1.29. იპოვეთ გრინის ფუნქცია ერთგანზომილებიანი შრედინგერის განტოლებისათვის და გამოიყენეთ ის შრედინგერის განტოლების ინტეგრალური სახით ჩასაწერად.

1.30. წინა ამოცანის შედეგის გამოყენებით ერთგანზომილებიან შემთხვევაში მიიღეთ ბორნის მიახლოება. აჩვენეთ, რომ არეკვლის კოეფიციენტი მოიცემა ფორმულით:

$$R \equiv \left( \frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2$$

1.31. აჩვენეთ, რომ ბორნის მიახლოებაში სრული  $\sigma(E)$  ნებისმიერ ცენტრალურ ველში, როგორც ენერგიის ფუნქცია, აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$\frac{d}{dE} [E\sigma(E)] \geq 0$$

ანუ  $E\sigma(E)$  ენერგიის მონოტონურად ზრდადი ფუნქციაა.

1.32. იპოვეთ ბორნის მიახლოებაში  $\delta_0$  ფაზური ნანაცვლება შემდეგი ველებისათვის:

ა)  $V(r) = V_0 R \delta(r - R)$ ; ბ)  $V(r) = V_0 e^{-\frac{r}{R}}$

მიღებული შედეგების გამოყენებით მოცემული ველებისათვის იპოვეთ ნელი ნაწილაკების სრული კვეთები.

## თავი 2. გაფანტვის ფაზური თეორია

ცენტრალური სიმეტრიის მქონე პოტენციალებისათვის გაფანტვის ამპლიტუდა შეიძლება გაიშალოს პარციალურ ტალღებად:

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \varphi_l(E) P_l(\cos \theta); \quad \varphi_l = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{1}{k(\operatorname{ctg} \delta_l - i)} \quad (\text{II.1})$$

სადაც  $P_l(\cos \theta)$  ლეჟანდრის პოლინომია,  $\delta_l(k)$  ფაზური ნანაცვლებებია (გაფანტვის ფაზა) და მათი საშუალებით გამოისახება დიდ მანძილებზე რადიალური ტალღური ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევა:

$$R \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} C \frac{\sin(kr - \pi l / 2 + \delta_l)}{r} \quad (\text{II.2})$$

გაფანტვის სრული კვეთისათვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l, \quad \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) (\operatorname{ctg}^2 \delta_l + 1)^{-1} \quad (\text{II.3})$$

(II.1) და (II.3) ფორმულებიდან გამომდინარეობს ე.წ. ოპტიკური თეორემა:

$$\operatorname{Im} f(E, \theta = 0) = \frac{k}{4\pi} \sigma(E) \quad (\text{II.4})$$

აუცილებელია აღინიშნოს, რომ (II.4) თანაფარდობა ზოგად ხასიათს ატარებს. კერძოდ, ის სამართლიანია შედგენილი ნაწილაკების გაფანტვის დროსაც, როდესაც შესაძლოა გაფანტვის არადრეკადი არხებიც არსებობდეს. ამ შემთხვევაში  $\sigma(E)$  უნდა გავიგოთ როგორც გაფანტვის სრული კვეთა, ხოლო  $f(E, 0)$  როგორც გაფანტვის ამპლიტუდა  $\theta = 0$  კუთხეზე.

ბორნის მიახლოებაში:

$$\delta_l^B(k) = -\frac{\pi m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} U(r) J_{l+1/2}^2(kr) r dr \quad (\text{II.5})$$

და, ამასთან, ამ მიახლოებაში ყველა ფაზა მცირეა  $|\delta_l^B| \ll 1$ .

2.1. გაფანტვის კვანტურ თეორიაში, უსასრულობაში ტალღური ფუნქციისათვის მიიღება შემდეგი ასიმპტოტური გამოსახულება:

$$\psi(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

აჩვენეთ, რომ, თუ ჰამილტონიანი ინვარიანტულია ბრუნვების მიმართ, მაშინ  $f$  გაფანტვის ამპლიტუდა არ არის დამოკიდებული  $\varphi$  კუთხეზე.

2.2. ბორნის მიახლოებაში მიიღეთ ფაზური ნანაცვლებების გამოსახულება გაფანტვის ამპლიტუდის პარციალურ ტალღებად გაშლის მეთოდით.

2.3. ნაწილაკები იფანტება  $U(r) = g/r^2$ ;  $g > 0$  ველში.

ა) დაწერეთ რადიალური ტალღური განტოლება და იპოვეთ მისი რეგულარული ამონახსნი.

ბ) აჩვენეთ, რომ ფაზური ნანაცვლებები მოიცემა ფორმულით:

$$\delta_l = \frac{\pi}{2} \left[ l + \frac{1}{2} - \sqrt{\left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2\mu g}{\hbar^2}} \right]$$

2.4.\* წინა ამოცანისათვის:

ა) იპოვეთ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთის დამოკიდებულება ენერგიაზე ფიქსირებული გაფანტვის კუთხისათვის;

ბ) იპოვეთ  $\delta_l$  გაფანტვის ფაზა  $mg/\hbar^2 \ll 1$  შემთხვევაში ნებისმიერი გაფანტვის კუთხისათვის და აჩვენეთ, რომ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi^3}{2\hbar^2} \frac{g^2 \mu}{E} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

სადაც  $E$  გაფანტული ნაწილაკის ენერგიაა.

**მითითება:** ისარგებლეთ ფორმულით  $\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2\sin(\theta/2)}$ , სადაც  $P_l(\cos\theta)$

ლეჟანდრის პოლინომია.

2.5. იპოვეთ  $\Psi_{k_0}^+(\vec{r})$  ტალღური ფუნქცია, გაფანტვის ამპლიტუდა და გაფანტვის კვეთა ნულოვანი რადიუსის პოტენციალისათვის. რა მნიშვნელობას ღებულობს  $r_0$  ეფექტური რადიუსი?

2.6.\* აღადგინეთ ურთიერთქმედების  $U(r)$  პოტენციალი  $S$  გაფანტვის  $\delta_0(k)$  ფაზის საშუალებით. ჩათვალეთ, რომ ეს ფაზა ცნობილია ნაწილაკის ყველა ენერგიისათვის და  $|\delta_0(k)| \ll 1$ .

**მითითება:** პირობის თანახმად, ფაზები მცირეა ყველა ენერგიისათვის, ამიტომ პოტენციალი შეიძლება განიხილოს როგორც შეშფოთება და ისარგებლოთ ამ თავის შესავლის (II.5) ფორმულით.

2.7. წინა ამოცანის შედეგები გამოიყენეთ გაფანტვის შემდეგი ფაზებისათვის:

ა)  $\delta_0(k) = \text{const}$ ; ბ)  $\delta_0(k) = \frac{\alpha k}{1 + \beta k^2}$

2.8. მიიღეთ ბორნის მიახლოებაში გაცვლითი პოტენციალისათვის ფაზური ნანაცვლებების გამოსახულებები.



2.9. განიხილეთ შრედინგერის ერთგანზომილებიანი განტოლება, როდესაც  $V(x) = 0$  სასრულო  $|x| < x_0$  არეში.

ა) აჩვენეთ, რომ შრედინგერის განტოლების ნებისმიერი  $\phi(x)$  ამოხსნისათვის ალბათობის დენი მუდმივია და არ არის დამოკიდებული  $x$ -ზე.

ბ)  $\phi(x)$  ფუნქციის ასიმპტოტიკა შემდეგი სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$\phi_L(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}; \quad x \ll -x_0$$

$$\phi_R(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}; \quad x \gg x_0$$

სადაც  $A, B, C$  და  $D$  კომპლექსური რიცხვებია და გაფანტვის  $S$  მატრიცასთან შემდეგნაირად არიან დაკავშირებული:

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

აჩვენეთ, რომ  $S$  უნიტარული მატრიცაა.

2.10. აჩვენეთ, რომ ბორნის მიახლოებაში გაფანტვის  $\delta_l$  ფაზები ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობისას მოიცემა ამ თავის შესავალი ნაწილის (II.5) ფორმულით.

2.11. ბორნის მიახლოებაში წინ გაფანტვის ამპლიტუდა ( $\theta = 0$  კუთხეზე) ნამდვილი სიდიდეა და ამიტომ არ აკმაყოფილებს (II.4) ოპტიკურ თეორემას. რატომ არ უშლის ეს გარემოება სწორად გამოვითვალეთ გაფანტვის დიფერენციალური და ინტეგრალური კვეთები ბორნის მიახლოებაში მისი გამოყენების ფარგლებში?

2.12.\* დაწერეთ გაფანტვის ამპლიტუდის გამოსახულება შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში. იპოვეთ  $\text{Im} f^{(2)}(E, \theta = 0)$  და ახსენით მიღებული შედეგი.

**მითითება:** ისარგებლეთ (1.10) ამოცანის შედეგებით.

2.13.\* ორგანზომილებიანი ველისათვის ( $U = U(\rho), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) გაფანტვის ამპლიტუდა გამოსახეთ ფაზური ნანაცვლებების საშუალებით. ნაწილაკების ნაკადი მიმართულია  $Z$  ღერძის გასწვრივ.

**მითითება:** ორგანზომილებიან შემთხვევაში, ტალღურ ფუნქციას გამფანტავი ცენტრიდან უსასრულოდ შორს შემდეგი სახე აქვს:

$$\psi = e^{ikz} + f(\varphi) \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{-i\rho}}$$

სადაც  $\varphi$  არის კუთხე  $Z$  ღერძსა და გაფანტვის მიმართულებას შორის, ხოლო  $f(\varphi)$  გაფანტვის ამპლიტუდაა.  $-i = \exp(-i\pi/2)$  მამრავლი შემოტანილია გამოთვლების გამარტივების მიზნით.

2.14. იპოვეთ გაფანტვის სრული კვეთა და მიიღეთ ოპტიკური თეორემა ორგანოზომილებიან შემთხვევაში.

2.15.\* გაფანტვის ფაზური თეორიის გამოყენებით იპოვეთ ამპლიტუდა და დიფერენციალური კვეთა დამუხტული ნაწილაკების გაფანტვისა აქსიალური სიმეტრიის მქონე  $H(\rho)$  მაგნიტურ ველში, რომელიც მიმართულია  $z$  ღერძის გასწვრივ და ლოკალიზებულია ამ ღერძიდან  $\rho \leq a$  მცირე მანძილზე.

**მითითება:** განიხილეთ  $a \rightarrow 0$  ზღვრული შემთხვევა. ვექტორული პოტენციალი აირჩიეთ შემდეგი სახით:

$$A_\varphi = \frac{\Phi_0}{2\pi\rho}; \quad A_z = A_\rho = 0$$

სადაც  $\Phi_0$  მაგნიტური ველის ნაკადია.

2.16.\* დაადგინეთ ფიქსირებული  $l$ -თვის  $\delta_l(k)$  ფაზური ნანაცვლებების ენერგიაზე დამოკიდებულების სახე, როდესაც  $k \rightarrow \infty$ . განიხილეთ პოტენციალები, რომელთაც მცირე მანძილებზე შემდეგი ყოფაქცევა გააჩნიათ  $U \approx \frac{\alpha}{r^\nu}$ , სადაც:

ა)  $\nu < 1$ ; ბ)  $1 < \nu < 2$ ; გ)  $\nu = 1$ .

**მითითება:** დიდ ენერგიებზე შესაძლებელია ბორნის მიახლოების გამოყენება ფაზური ნანაცვლებისთვისაც და ამიტომ გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი ნაწილის (II.5) ფორმულა.

2.17. აჩვენეთ, რომ ენერგიის და მომენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის, როცა  $kR \propto l \gg 1$ , ფაზური ნანაცვლებებისათვის ბორნის მიახლოების გამოსახულება კვაზიკლასიკურ გამოსახულებაში გადადის.

2.18. აჩვენეთ, რომ  $a$  რადიუსის მოკლე ქმედების მქონე პოტენციალებისათვის:

$$U(r) = \begin{cases} V(r) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

სამართლიანია  $\delta_l(k)$  ფაზების გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა:

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{kj_l'(ka) - \gamma_l j_l(ka)}{kn_l'(ka) - \gamma_l n_l(ka)}$$

სადაც  $j_l(ka)$  და  $n_l(ka)$  ბესელის სფერული ფუნქციებია, ხოლო  $\gamma_l = \frac{1}{R_l} \frac{dR_l}{dr} \Big|_{r=a}$

2.19. განიხილეთ აბსოლუტურად შეუღწევადი სფერული ორმო, რომლის პოტენციალია:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > r_0 \\ \infty & r < r_0 \end{cases}$$

სადაც  $k_0 r_0 \ll 1$ . განიხილეთ მხოლოდ  $s$  ტალღოვანი გაფანტვა და გამოთვალეთ შემდეგი სიდიდეები:  $\delta_0(k)$ ,  $f(k)$ ,  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ,  $\sigma_T$

2.20. წინა ამოცანაში განიხილეთ  $l=1$  შემთხვევა და აჩვენეთ, რომ  $p$  ტალღოვანი გაფანტვის ამონახსნი შემდეგი სახით მოიცემა:

$$\chi_{kl}(r) = A \left[ \frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) + a \left( \frac{\cos(kr)}{kr} + \sin(kr) \right) \right]$$

სადაც  $A$  და  $a$  მუდმივებია.  $\chi_{kl}(r_0) = 0$  პირობის გამოყენებით იპოვეთ  $\delta_1(k)$ . აჩვენეთ, რომ  $k \rightarrow 0$  ზღვარში  $\delta_1(k) \approx (k_0 r_0)^3$  და  $\delta_1(k) \ll \delta_0$ .

2.21. აჩვენეთ, რომ  $a$  რადიუსის მქონე აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე გაფანტვისას, როდესაც ურთიერთქმედების პოტენციალს შემდეგი სახე აქვს:

$$U(r) = \begin{cases} \infty; & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

გაფანტვის ფაზა შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{j_l(kr_0)}{n_l(kr_0)}$$

სადაც  $j_l(kr_0)$  და  $n_l(kr_0)$  ბესელის სფერული ფუნქციებია.

2.22. წინა ამოცანაში განიხილეთ  $ka = 1$  შემთხვევა და შეავსეთ შემდეგი ცხრილი  $\delta_l$  (გამოსახეთ რადიანებში).

	$\operatorname{tg} \delta_l$	$\delta_l$	$\sin \delta_l$
$l = 0$			
$l = 1$			
$l = 2$			

2.23. გამოიყენეთ წინა ამოცანის შედეგები და გამოთვალეთ  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა 0 და  $\pi$  კუთხეებისათვის და სრული კვეთა  $\sigma_T$  (გაითვალისწინეთ მხოლოდ  $l=0$  და  $l=1$  ტალღები).

2.24.\* აჩვენეთ, რომ აბსოლუტურად შეუღწევად სფერულ ორმოზე

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > r_0 \\ \infty & r < r_0 \end{cases}$$

გაფანტვისას ძალიან დიდ ენერგიებზე გაფანტვის სრული კვეთა მიისწრაფვის  $2\pi_0^2$ -სკენ.

**მითითება:** გამოიყენეთ (2.21) ამოცანის ფაზის გამოსათვლელი ფორმულა და

შემდეგი იგივეობა: 
$$\sin^2\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) = \sin^2 x + \sin^2 \frac{l\pi}{2} \cos 2x$$

2.25. განიხილეთ  $m$  მასის ორი იგივეური უსპინო ნაწილაკის გაფანტვა, რომელთა ურთიერთქმედების პოტენციალი მათ შორის  $r$  მანძილზე შემდეგნაირად არის დამოკიდებული:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\hbar}{16m} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a}\right)^2; & r < R \\ 0 & ; r > R \end{cases}$$

სადაც  $R \ll a$  მუდმივებია.

ა) იპოვეთ  $\delta_0(k)$  ფაზური წანაცვლება დაბალი ენერგიებისათვის, როცა სრულდება პირობა:

$$kR \ll \frac{R}{a} \ll 1; k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$$

სადაც  $E$  არის ენერგია მასათა ცენტრის სისტემაში, ხოლო  $\mu$  დაყვანილი მასაა.

ბ) გამოთვალეთ გაფანტვის სრული კვეთა.

2.26. განიხილეთ  $m$  მასის, სინგლეთურ მდგომარეობაში პოლარიზებული, ორი იგივეური ნახევარსპინიანი ნაწილაკის გაფანტვა, რომელთა ურთიერთქმედების პოტენციალი მათ შორის  $r$  მანძილზე შემდეგნაირად არის დამოკიდებული:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\hbar}{16m} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a}\right)^2; & r < R \\ 0 & ; r > R \end{cases}$$

სადაც  $R \ll a$  მუდმივებია

ა) გამოთვალეთ გაფანტვის სრული კვეთა. ბ) გამოთვალეთ ორი არაპოლარიზებული ნახევარსპინიანი ნაწილაკის გაფანტვის სრული კვეთა.

2.27. გაშალეთ ბრტყელი ტალღა პარციალურ ტალღებად.

2.28. გამოიკვლიეთ როგორ იცვლება გაფანტვის ფაზა პოტენციალის მცირე ცვლილებისას.

2.29.\* შრეინგერის განტოლებაში  $U(r) = -U_0 \exp(-r/a)$  პოტენციალისათვის იპოვეთ დისკრეტული ენერგიების სპექტრი  $l = 0$  შემთხვევაში. იპოვეთ  $\delta_0$  გაფან-

ტვის ფაზური წანაცვლება ამ პოტენციალისათვის და დაადგინეთ კავშირი  $\delta_0$ -სა და მიღებულ დისკრეტულ სპექტრს შორის.

**მიითითება:** სპექტრის საპოვნელად გააკეთეთ ჩასმა  $\xi = e^{-\frac{r}{2a}}$  და შრედინგერის განტოლება დაიყვანეთ ბესელის ფუნქციების განტოლებაზე.

2.30.\*  $m$  მასის ნაწილაკი იფანტება შემდეგ პოტენციურ ველში:

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{a}}$$

სადაც  $a$  მუდმივაა. მოცემული  $E$  ენერგიისათვის გამოთვალეთ  $s$  ტალღის ნვლი-ლი გაფანტვის სრულ კვეთაში.

**მიითითება:** გამოიყენეთ ფაქტი, რომ განტოლებას:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y + \frac{2}{\cosh^2 x} y = 0$$

აქვს  $y = e^{\pm ikx} (\tanh x \mp ik)$  ამონახსნი.

### თავი 3. იოსტის ფუნქციები და რაჯეს პოლუსები. ლიპმან-შვინგერის განტოლება

გაფანტვის მატრიცის ანალიზური თვისებების შესასწავლად გამოიყენება  $f(\pm k, l; r)$  იოსტის ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შრედინგერის რადი-ალურ განტოლებას და უსასრულობაში რეგულარული არიან:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(\pm k, l; r) e^{\pm ikr} = 1 \quad (III.1)$$

ზოგადად, იოსტის ამონახსნები არ აკმაყოფილებენ

$$R_{El}(0) = 0 \quad (III.2)$$

პირობას. მათ მნიშვნელობებს  $r = 0$  წერტილში იოსტის ფუნქციები ეწოდება და  $F_l(\pm k)$ -ით აღინიშნება. სამართლიანია შემდეგი მნიშვნელოვანი თანაფარდობა:

$$S_l(k) = e^{i\pi l} \frac{F_l(k)}{F_l(-k)} \quad (III.3)$$

სადაც  $S_l(k) = e^{2i\delta_l}$  გაფანტვის პარციალური ამპლიტუდაა.

გაფანტვის მატრიცის ანალიზური თვისებების შესასწავლად ასევე გამოიყენება რეჯეს პოლუსების მეთოდი, რომელშიც  $l$  ორბიტალური მომენტი განიხილება როგორც კომპლექსური სიდიდე. ამ მეთოდში ხდება (II.1)  $\varphi_l$  პარციალური ამპლიტუდის ანალიზური გაგრძელება  $l$  ორბიტალური მომენტის კომპლექსურ სივრცეში:

$$\varphi(l, E) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{S(l, E) - 1}{2ik}; k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (III.4)$$

მაშინ  $f(k, \theta)$  გაფანტვის ამპლიტუდა გამოისახება ვატსონ-ზომერფელდის ინტეგრალით:

$$\varphi(E, \theta) = -\frac{i}{2} \int_C \frac{2l+1}{\sin \pi l} \varphi(l, E) P_l(-\cos \theta) dl \quad (III.5)$$

რომელშიც ინტეგრების  $C$  კონტური ისეა შერჩეული, რომ  $\varphi(l, E)$  ფუნქციის „შემთხვევითი პოლუსები“  $\text{Re}(l)$ -ზე გამორიცხულია.  $\text{Re}(l) > -\frac{1}{2}$ -თვის და ენერგის ისათვის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას (III.5)-ში  $N$  სასრული რაოდენობის პოლუსი გააჩნია, რომლებიც განლაგებულია  $\text{Im}(l) \geq 0$  ზედა ნახევარსიბრტყეში.

ენერჯის ზრდასთან ერთად ეს პოლუსები მოძრაობენ ე.წ. რეჯეს ტრაექტორიებზე. იუკავას ტიპის პოტენციალებისათვის:

$$V(r) = \int_{\mu}^{\infty} \rho(\alpha) \frac{e^{-\alpha r}}{r} d\alpha; \int_{\mu}^{\infty} \rho(\alpha) d\alpha < \infty \quad (III.6)$$

$\varphi(l, E)$  ფუნქცია (III.5)-ში ნაშთთა თეორიის გამოყენებით შემდეგ სახეზე დადის:

$$\varphi(E, \theta) = \frac{i}{2} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \frac{2l+1}{\sin \pi l} A(l, E) P_l(-\cos \theta) dl + \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n(E)}{\sin \pi l_n} P_{l_n}(-\cos \theta) \quad (III.7)$$

სადაც

$$\beta_n(E) = -\pi(2l_n + 1) \text{Residue}[A(l, E)]_{l=l_n} \quad (III.8)$$

და  $l_n(E)$  არის რეჯეს  $n$ -ური პოლუსის მდებარეობა. (III.8) რეჯეს პოლუსების ფორმულა იმით არის ღირსშესანიშნავი, რომ გამოყოფს ამპლიტუდის სინგულარულ და არასინგულარულ ნაწილებს.

დავუშვათ, მოცემულია დროზე დამოუკიდებელი  $H$  ჰამილტონიანი, რომელსაც შემდეგი პირობები ედება:

1.  $H$  ჰამილტონიანი შეიძლება ჩაინეროს შემდეგი სახით:

$$H = H_0 + H' \quad (III.9)$$

სადაც ცნობილია  $H_0$  ჰამილტონიანის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები.

2.  $H_0$  ჰამილტონიანს გააჩნია უწყვეტი სპექტრი  $E \geq 0$ -თვის.
3.  $H'$  „ურთიერთქმედების ჰამილტონიანი“ არ აშფოთებს  $H_0$  ჰამილტონიანის უწყვეტ სპექტრს ანუ, თუ  $|\Phi_a\rangle$  არის უწყვეტ სპექტრში  $H_0$  ჰამილტონიანის საკუთარი ფუნქცია  $E_a$  ენერჯიით:

$$H_0 |\Phi_a\rangle = E_a |\Phi_a\rangle \quad (III.10)$$

მაშინ არსებობს  $H$  ჰამილტონიანის  $|\psi_a\rangle$  საკუთარი ფუნქცია იმავე  $E_a$  ენერჯიით:

$$H |\psi_a\rangle = E_a |\psi_a\rangle \quad (III.11)$$

ამ პირობების გათვალისწინებით (III.11) შრედინგერის განტოლების ორი –  $|\psi^+\rangle$  და  $|\psi^-\rangle$  ამონახსნი აკმაყოფილებს ლიპმან-შვინგერის განტოლებებს

$$|\psi_a^\pm\rangle = |\Phi_a\rangle + \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\eta} H' |\psi_a^\pm\rangle \quad (III.12)$$

ეს განტოლებები სამართლიანია ნებისმიერ წარმოდგენაში და მას შემდეგ, რაც წარმოდგენა იქნება არჩეული, ისინი ფრედგოლმის ტიპის ინტეგრალური განტოლებები ხდებიან.

3.1. აჩვენეთ, რომ  $f(+k, l; r)$  და  $f(-k, l; r)$  იოსტის ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია.

3.2. გამოიყენეთ წინა ამოცანის შედეგი, გამოსახეთ იოსტის ფუნქციების საშუალებით სათავეში რეგულარული  $R_{l,k}$  ამონახსნი

$$R_{l,k}(0) = 0; R'_{l,k}(0) = 1$$

და მიიღეთ  $S_l(k) = e^{i\pi l} \frac{F_l(k)}{F_l(-k)}$  თანაფარდობა.

3.3. იპოვეთ  $F_0(\pm k)$  იოსტის ფუნქციები და  $S_0(k)$  ფუნქცია  $E$  ენერჯის მქონე ნაწილაკის სფერულ  $V_0$  სიღრმის ორმოზე გაფანტვისას  $l=0$  მდგომარეობაში.

3.4. აჩვენეთ, რომ  $f(k, l; r)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$f(k, l; r) = e^{-ikr} + \frac{1}{k} \int_r^\infty \sin k(r-r') U_l(r') f(k, l; r') dr'$$

სადაც

$$U_l(r) = U(r) + l(l+1)r^{-2}$$

და  $k$  კომპლექსურ სიბრტყეში, შესაბამისი  $F_l(k)$  იოსტის ფუნქცია ჰოლომორფულია ზედა ნახევარსიბრტყეში, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\int_r^\infty |U_l(r')| dr' < \infty$$

3.5. აჩვენეთ, რომ წინა ამოცანის  $F_l(k)$  ფუნქცია ასევე ჰოლომორფულია ზედა ნახევარსიბრტყეში, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\int_r^\infty |U_l(r')| e^{2br'} dr' < \infty$$

3.6. (3.4) ამოცანის ინტეგრალური განტოლების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

$$S_l(k) S_l^*(k^*) = 1; S_l(k) S_l(-k) = 1$$



3.7. შეისწავლეთ  $l=0$  მდგომარეობის ნაწილაკის იუკავას პოტენციალზე გაფანტვისას  $S_0(k)$  ფუნქციის ბარგმანის ზოლი ( $S_l$  ფუნქციის ბარგმანის ზოლი  $k$  კომპლექსურ სიბრტყეში წარმოადგენს არეს, რომელშიც ორივე  $-F_l(k)$  და  $F_l(-k)$  ფუნქცია ჰომომორფულია)  $k$  კომპლექსურ სიბრტყეში.

3.8. გაუსის თეორემის გამოყენებით:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

(რომელიც გვიჩვენებს  $f(z)$  ჰომომორფული ფუნქციის ნულების რაოდენობას ჩაკეტილი კონტურის შიგნით) აჩვენეთ, რომ სამართლიანია ლევისონის თეორემა:

$$\delta_l(+0) - \delta_l(-0) = n_l \pi$$

სადაც  $n_l$  არის ბმული მდგომარეობების რაოდენობა მოცემული  $l$  ორბიტალური მომენტისათვის. ამ ამოცანაში ბარგმანის ზოლი მოიცავს მთელ  $k$  კომპლექსურ სიბრტყეს.

3.9. აჩვენეთ, რომ დაბალ ენერგიებზე ერთი და იმავე ენერგიის ბმული და ვირტუალური მდგომარეობები ერთნაირ წვლილს იძლევიან გაფანტვის სრულ კვეთაში.

3.10. იპოვეთ  $R_{l,k}(r)$  რადიალური ფუნქცია,  $A_l(k)$  პარციალური ამპლიტუდა და  $S$  მატრიცის  $S_l(k)$  დიაგონალური ელემენტები შემდეგ პოტენციალზე გაფანტვისას:

$$U(r) = -U_0 \delta(r-a)$$

3.11. იპოვეთ  $U_0$ -ის უმცირესი მნიშვნელობა, რომელსაც შეუძლია შექმნას ბმული მდგომარეობა:

$$U(r) = -U_0 \delta(r-a)$$

პოტენციალისათვის  $l_0$  ორბიტალური მომენტით.

3.12. აჩვენეთ, რომ (III.4) ფორმულიდან მიიღება (III.5), რომელიც გვიჩვენებს გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზურ გაგრძელებას  $l$  კომპლექსურ სიბრტყეში.

3.13. შრედინგერის განტოლების  $R_{l,k}$  ამონახსნი სათავეში აკმაყოფილებს

$$\lim_{r \rightarrow 0} R_{l,k} \approx r^{l+1}$$

პირობას. აჩვენეთ, რომ  $l$  კომპლექსურ სიბრტყეზე ამ პირობიდან გამომდინარეობს  $\text{Re}(l) > -1/2$  თანაფარდობა.

3.14.\* აჩვენეთ, რომ წინა ამოცანის  $R_{l,k}$  ამონახსნი ჰოლომორფული ფუნქციაა  $l$  კომპლექსურ სიბრტყეზე, თუ სრულდება  $\operatorname{Re}(l) > -1/2$  პირობა.

**მითითება:** ჩანერეთ შრედინგერის რადიალური განტოლება ინტეგრალური სახით:

$$R_{l,k} = r^{l+1} + \int_0^\infty G_l(r, r') (U(r') - k^2) R_{l,k}(r') dr'$$

სადაც  $G_l(r, r')$  გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] G_l(r, r') = \delta(r - r').$$

3.15.\* აჩვენეთ, რომ ( $E > 0$ ) დადებითი ენერგიებისათვის  $S(l, k)$ -ს ყველა პოლუსი მდებარეობს  $l$  კომპლექსური სიბრტყის  $\operatorname{Im}(l) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(l) > -1/2$  არეში.

**მითითება:** ჩანერეთ შრედინგერის რადიალური განტოლება  $l$  და  $l'$  ორბიტალური მომენტებისათვის. გაამრავლეთ ეს განტოლებები, შესაბამისად,  $R_{l',k}(r)$  და  $R_{l,k}(r)$ -ზე და გამოაკელით ერთმანეთს მიღებული განტოლებები.

3.16.\* აჩვენეთ, რომ ( $k^2 < 0$ ) უარყოფითი ენერგიებისათვის  $S(l, k)$ -ს ყველა პოლუსი მდებარეობს  $l$  კომპლექსური სიბრტყის რეალურ ღერძზე.

**მითითება:** გამოიყენეთ ფაქტი, რომ, თუ  $k = ib$ ,  $b > 0$ , მაშინ  $S(l, k)$  პოლუსები ანუ  $F(-k, l)$ -ის ნულები შეესაბამება ბმულ მდგომარეობებს.

3.17.\* აჩვენეთ, რომ  $E < 0$ -თვის  $S(l, k)$ -ს პოლუსები მოძრაობს  $\operatorname{Re}(l)$  ღერძის გასწვრივ  $\operatorname{Re}(l)$ -ის ზრდადი მნიშვნელობებისაკენ  $E$ -ს ზრდასთან ერთად, ანუ, როცა სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(dl_p(E)/dE) > 0$$

**მითითება:** გაამრავლეთ  $R_{l,k}(r)$ -თვის ჩანერილი შრედინგერის რადიალური განტოლება  $R_{l,k}(r)$ -ზე და აინტეგრეთ ნულიდან უსასრულობამდე.

3.18. აჩვენეთ, რომ განმხოლოებული რეჯეს პოლუსი აჩენს ბმულ მდგომარეობას (ან რეზონანსს), როდესაც მისი ტრანექტორია  $E < 0$ -თვის (ან  $E > 0$ -თვის) გადის ფიზიკურ მნიშვნელობებზე (ან უახლოვდება ერთ-ერთ  $l = 0, 1, 2, \dots$  ფიზიკურ მნიშვნელობას).

3.19. აჩვენეთ, რომ  $H_0$  ჰამილტონიანის საკუთარი ფუნქციების ჰილბერტის სივრცეში  $(E_0 - H_0 \pm i\eta)^{-1}$  ოპერატორები კარგად განმარტებულია, ანუ შესაძლებელია მათი საკუთარი მნიშვნელობების და საკუთარი ფუნქციების პოვნა.

3.20. აჩვენეთ, რომ შრედინგერის განტოლების მსგავსი

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_n(t)\rangle = e^{\frac{\eta|t|}{\hbar}} H'_I |\psi_n(t)\rangle, \eta > 0$$

განტოლების ამონახსნი  $|\psi_\eta(-\infty)\rangle = |\Phi\rangle$  პირობის გათვალისწინებით, სადაც  $H'_I$  არის  $H'$  ოპერატორი ურთიერთქმედების სურათში,  $\eta \rightarrow 0$  ზღვარში ეკვივალენტურია „სანყის“  $|\psi^+\rangle$  ვექტორის  $t = 0$ -თვის, ანუ, თუ სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$|\psi^+\rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} |\psi_\eta(0)\rangle$$

3.21. მოცემულია  $\{|\xi\rangle\}$  წარმოდგენა. გამოიყენეთ სისრულის

$$\int |\xi\rangle \langle \xi| d\xi = 1$$

პირობა და აჩვენეთ, რომ ლიპმან-შვინგერის განტოლებას მივყავართ ფრედგოლმის ტიპის ინტეგრალურ განტოლებებამდე.

3.22. აჩვენეთ, რომ ნაწილაკის გაფანტვისას კოორდინატულ წარმოდგენაში, როცა  $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ ,  $H' = V(\vec{r})$ ,  $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , ლიპმან-შვინგერის განტოლებას:

$$|\psi_k^+\rangle = |\Phi_k\rangle + \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{E_k - H_0 \pm i\eta} H'_I |\psi_k^+\rangle$$

მივყავართ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებამდე, შესაბამისი ტალღური ფუნქციისათვის:

$$\psi_k^+(\vec{r}) = \phi_k^-(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} U(\vec{r}') \psi_k^+(\vec{r}') d\vec{r}'$$

სადაც

$$\phi_k^-(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}\vec{r})$$

3.23. განტოლების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$|\psi_a^\pm\rangle = |\Phi_a\rangle + \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\eta} H'_I |\Phi_a\rangle$$

3.24.\* დაუშვათ,  $|\psi_a^+\rangle$  და  $|\psi_b^+\rangle$  სისტემის ორი „სანყისი“ მდგომარეობაა. აჩვენეთ, რომ ისინი ორთონორმირებული ფუნქციებია, ანუ სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$\langle \psi_a^+ | \psi_b^+ \rangle = \delta(a - b)$$

სადაც  $\delta(x)$  დირაკის დელტა ფუნქციაა.

**მითითება:** ისარგებლეთ იმ ფაქტით, რომ  $H$  და  $H'$  ერმიტული ოპერატორებია და ამიტომ წინა ამოცანის ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\langle \psi_a^+ | \psi_b^+ \rangle = \langle \Phi_a | \psi_a^+ \rangle + \lim_{\eta \rightarrow +0} \langle \Phi_a | H' \frac{1}{E_a - H - i\eta} | \psi_b^+ \rangle$$

შემდეგ გამოიყენეთ ლიპმან-შვინგერის განტოლება.

3.25. წინა ამოცანების შედეგების გამოყენებით მიიღეთ შემდეგი თანაფარდობები:

$$\langle \Phi_b | \psi_a^\pm \rangle = \delta(a - b) + \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{E_a - E_b \pm i\eta} \langle \Phi_b | H' | \psi_a^\pm \rangle$$

$$\langle \psi_a^L | \Phi_b \rangle = \frac{1}{E_a - E_b} \langle \psi_a^L | H' | \Phi_b \rangle$$

სადაც  $L$  ინდექსი შეესაბამება  $H$  ჰამილტონიანის ბმულ მდგომარეობას.

**მითითება:** გაამრავლეთ (III.12) ფორმულა მარცხნიდან  $\langle \Phi_b |$ -ზე და გამოიყენეთ  $H_0$ -ის ერმიტულობის თვისება.

3.26.\* აჩვენეთ, რომ მთელი  $l$ -ების შესაბამისი ფაზური წანაცვლებები აკმაყოფილებენ უტოლობას:

$$\delta_{l+1}(E) - \delta_l(E) < \pi/2$$

**მითითება:** განიხილეთ  $l$  ორბიტალური მომენტი როგორც ნამდვილი უწყვეტი სიდიდე და გაანარმოეთ ამ სიდიდით შრედინგერის რადიალური განტოლება.

3.27.\* ლიპმან-შვინგერის განტოლების ამოხსნიდან იპოვეთ ნაწილაკის გაფანტვის ამპლიტუდა სეპარაბელური პოტენციალისათვის, რომლის ბირთვის შემდეგი სახე აქვს:  $U(r, r') = \lambda \chi(r) \chi^*(r)$ . ასევე იპოვეთ გაფანტვის კუთხური განაწილება და სრული კვეთა.

**მითითება:** გამოიყენეთ  $\tilde{U}(\vec{k}, \vec{k}') = \lambda g(k) g^*(k')$  სეპარაბელური პოტენციალისათვის ლიპმან-შვინგერის განტოლების შემდეგი სახე:

$$f(\vec{k}, \vec{k}_0) = -\frac{\lambda m}{2\pi\hbar^2} \left[ g^*(k_0) + \int \frac{g^*(\zeta) f(\zeta, \vec{k}_0) d^3\zeta}{2\pi^2(\zeta^2 - k_0^2 - i\epsilon)} \right]$$

## თავი 4. ნელი ნაწილაკების გაფანტვა. რეზონანსული მოვლენები გაფანტვისას

ნელი ნაწილაკების გაფანტვისას ( $kR \ll 1$ ), პოტენციალების უსასრულობაში საკმარისად სწრაფად დაცემისას (იხ. ამოცანები 4.2-4.4), სამართლიანია ეფექტური რადიუსის გაშლა:

$$k^{2l+1} \text{ctg} \delta_l = -\frac{1}{a_l} + \frac{r_l k^2}{2} + \dots \quad (\text{IV.1})$$

სადაც  $a_l$ -სა და  $r_l$ -ს ეწოდება გაფანტვის სიგრძე და გაფანტვის ურთიერთქმედების რადიუსი. ეს პარამეტრები, (II.1) და (II.3) ფორმულების თანახმად, შესაბამის პარციალურ ტალღაში, განსაზღვრავენ დაბალენერგეტიკულ გაფანტვას.

თუ პოტენციალს არ გააჩნია არალრმა რეალური ან ვირტუალური ( $l = 0$ -თვის) და კვაზისტაციონარული ( $l = 1$ -თვის) დონეები, მაშინ ეფექტური რადიუსის ნევრი გვევლინება როგორც შესწორება და სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$\delta_l \approx -a_l k^{2l+1}, \quad |a_l| \leq R^{2l+1}, \quad \sigma_l \leq 4\pi(2l+1)(kR)^{4l} R^2 \quad (\text{IV.2})$$

საიდანაც ჩანს, რომ გაფანტვის კვეთაში ძირითადი წვლილი შეაქვს  $s$  მდგომარეობებს.

თუ პოტენციალს გააჩნია არალრმა დონე  $|E_l| \ll \hbar^2 / 2m$  ენერგიით და  $l$  მომენტით, მაშინ  $\sigma_l(E)$  გაცილებით მეტია არარეზონანსულ მნიშვნელობაზე. ამ შემთხვევაში  $|a_0| \gg R$  და გვაქვს:

$$\sigma(E) \approx \sigma_{l=0}(E) \approx \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1+r_0\tau_0}{E+\varepsilon_0} \quad (\text{IV.3})$$

სადაც  $|E_0| = \varepsilon_0 = \frac{\hbar^2 \tau_0^2}{2m}$ , ხოლო  $\tau_0 = \frac{1}{a_0} + \frac{r_0}{2a_0^2}$ .

რეზონანსული გაფანტვისას  $l \neq 0$  მომენტით, ენერგიაზე დამოკიდებულების ხასიათი და  $\sigma_l(E)$  სიდიდე არსებითადაა დამოკიდებული დონის ბუნებაზე (რეალურია თუ კვაზისტაციონარულია ეს დონე).  $a_l < 0$ -თვის დონე კვაზიდისკრეტულია და თუ მას წარმოვადგენთ  $E_l = E_R - i\Gamma_R / 2$  სახით (სადაც  $E_R$  და  $\Gamma_R$ , შესაბამისად, დონის ენერგია და სიგანეა),  $\text{ctg} \delta_l(E_l) = i$  განტოლებიდან ვიპოვიot:

$$E_R \equiv \frac{\hbar^2 k_R^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{m|r_l|} > 0; \quad \Gamma_R \approx \left( \frac{2\hbar^2}{m|r_l|} \right) k_R^{2l+1} \quad (\text{IV.4})$$

ამ შემთხვევაში კვეთა  $E_R$ -ის მახლობლად მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma_l(E) \approx \frac{(2l+1)\pi}{k_R^2} \frac{\Gamma_R^2}{(E-E_R)^2 + \Gamma_R^2/4} \quad (\text{IV.5})$$

4.1. იპოვეთ  $\sigma(E)$  გაფანტვის კვეთის ენერგიაზე დამოკიდებულება (როცა ნაწილაკის ენერგია  $E \rightarrow 0$ ) ველში, რომელიც დიდ მანძილებზე  $U(r) \approx \alpha/r^\nu$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $2 < \nu \leq 3$  კანონით ეცემა.

4.2. ნელი ნაწილაკებისათვის იპოვეთ  $\delta_l(k)$  ფაზური წანაცვლებების  $k$ -ზე დამოკიდებულების სახე და იმსჯელეთ ბორნის მიახლოებაში ეფექტური რადიუსის გაშლის შესაძლებლობის შესახებ.

4.3. დაადგინეთ, წინა ამოცანაში როგორ უნდა ეცემოდეს პოტენციალი უსასრულოებაში იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს მოცემული  $l$  მომენტისათვის  $a_l$  გაფანტვის სიგრძისა და  $r_l$  ურთიერთქმედების ეფექტური რადიუსის შემოღება.

4.4. უსასრულოებაში,  $U \approx \alpha/r^\nu$ ;  $\nu > 2$  ხარისხოვანი დაცემის მქონე პოტენციალებისათვის, სხვადასხვა  $l$ -ებისათვის, იპოვეთ ნელი ნაწილაკების ფაზური წანაცვლებების დამოკიდებულება.

4.5.\* უსასრულოებაში,  $U \approx \alpha/r^\nu$ ;  $\nu > 2$  ხარისხოვანი დაცემის მქონე პოტენციალებისათვის განიხილეთ ეფექტური რადიუსის გაშლის (IV.1) ფორმულის მოდიფიკაცია იმ ორბიტალური მომენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ  $\frac{\nu-5}{2} \leq l < \frac{\nu-3}{2}$  პირობას. მიღებული შედეგები გამოიყენეთ  $l=0$  მომენტის

მქონე ნელი ნაწილაკების გაფანტვისათვის, უსასრულოებაში  $U \approx \alpha/r^4$  დაცემის მქონე პოტენციალებისათვის.

**მიზითება:** გამოიყენეთ წინა ორი ამოცანის შედეგები.

4.6. იპოვეთ გაფანტვის სიგრძე შემდეგი პოტენციალებისათვის:

$$\text{ა) } U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases}; \quad \text{ბ) } U(r) = -U_0 R \delta(r-R); \quad \text{გ) } U(r) = -U_0 e^{-r/R}$$

პოტენციალების პარამეტრების რომელი მნიშვნელობებისათვის ხდება უსასრულო გაფანტვის სიგრძე?

4.7. იპოვეთ გაფანტვის სიგრძე შემდეგი პოტენციალებისათვის:

$$\text{ა) } U(r) = -U_0 [1 + (r/R)^2]^2; \quad \text{ბ) } U(r) = U_0 (R/r)^4, U_0 > 0$$

პოტენციალების პარამეტრების რომელი მნიშვნელობებისათვის ხდება უსასრულო გაფანტვის სიგრძე?

4.8. იპოვეთ გაფანტვის სიგრძე და გაფანტვის სრული კვეთა ნელი ნაწილაკების შეუღწევად ელიფსოიდზე, ანუ შემდეგ პოტენციურ ველზე გაბნევისას:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1, \quad c \geq b \\ 0, & \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > 1 \end{cases}$$

სპეციალურად განიხილეთ შემთხვევები  $c \approx b$  და  $c \gg b$ .

4.9. წინა ამოცანაში განიხილეთ  $b > c$ -ზე შემთხვევა.

4.10. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ  $a_0$  გაფანტვის სიგრძე განმზიდავი პოტენციალისათვის, რომელიც უსასრულობაში  $U \approx a/r^4$  კანონით ეცემა.

4.11. წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ კვაზიკლასიკური შესწორება გაფანტვის სიგრძისათვის, რომელიც დაკავშირებულია პოტენციალის უსასრულობაში გაშლის  $U = \alpha r^{-4} \left( 1 + \frac{b}{r} + \dots \right)$  მომდევნო წევრთან.

4.12. 4.10 ამოცანის პირობებში იპოვეთ კვაზიკლასიკური შესწორება გაფანტვის სიგრძისათვის, რომელიც დაკავშირებულია პოტენციალის უსასრულობაში გაშლის  $U = \alpha r^{-4} \left( 1 + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r} \dots \right)$  მომდევნო წევრთან.

4.13. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ  $a_0$  გაფანტვის სიგრძე განმზიდავი პოტენციალისათვის, რომელიც უსასრულობაში  $U \approx a/r^{\nu} (1 + b/r + \dots)$ ;  $\nu > 3$  კანონით ეცემა.

4.14. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ  $a_0$  გაფანტვის სიგრძე განმზიდავი პოტენციალისათვის, რომელიც უსასრულობაში  $U \approx U_0 e^{-\frac{r}{R}}$  კანონით ეცემა.

4.15. უსასრულობაში  $U \approx -\frac{\alpha}{r^{\nu}}$ ;  $\nu > 3$  ყოფაქცევის  $U(r) \leq 0$  მიზიდვის პოტენციალისათვის კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ  $a_0$  გაფანტვის სიგრძე. ჩათვალეთ, რომ მცირე მანძილებზე პოტენციალს  $U \approx \frac{\alpha}{r^{\beta}}$ ;  $0 \leq \beta < 2$  ყოფაქცევა გააჩნია. პოტენციალის პარამეტრების რომელი მნიშვნელობებისათვის ხდება

უსასრულო გაფანტვის სიგრძე?  $U = -\alpha(R+r)^{-4}$  და  $U = -\alpha(R^2+r^2)^{-2}$  პოტენციალებისათვის (სადაც  $R > 0$ ) იპოვეთ  $a_0$  გაფანტვის სიგრძე.

4.16. გაფანტვის სიგრძისთვის, შეშფოთების თეორიის გამოყენებით მიიღეთ ენერჯის დონის ნანაცვლების ფორმულა ნებისმიერი  $l$  მომენტისათვის  $U_L(r)$  შორსქმედი პოტენციალისათვის, რომელზეც მოქმედებს  $r_s$  რადიუსის მქონე მოკლე ქმედების  $U_S(r)$  პოტენციალი. ჩათვალეთ, რომ მცირე  $r \leq r_s$  მანძილებზე  $U_L(r)$  ურთიერთქმედება სუსტია  $|U_L| \ll \frac{\hbar^2}{mr_s^2}$ ;  $r_s \ll r_L$  და განსახილველი დონეებისათვის  $|E_{n,l}^{(0)}| \ll \frac{\hbar^2}{mr_s^2}$

4.17.\* პოტენციალი ნარმოადგენს ძლიერი  $r_s$  რადიუსის მქონე  $U_S(r)$  მოკლე ქმედების და  $r_L \gg r_s$  რადიუსის შორსქმედი  $U_L(r)$  პოტენციალების სუპერპოზიციას; ამასთან ერთად,  $U_S(r)$  პოტენციალი  $r < r_s$  მანძილებზე სუსტია:  $|U_L(r)| \ll \frac{\hbar^2}{mr_s^2}$ . ცნობილია შრედინგერის განტოლების ამონახსნი  $U_L(r)$  პოტენციალისათვის. ამ ამონახსნის საშუალებით  $U_L(r)$  პოტენციალისათვის ( $kr_s \ll 1$ ) ნელი ნაწილაკების შემთხვევაში, იპოვეთ  $\Delta\delta_L^{(s)}$  ფაზური ნანაცვლება  $U_S(r)$  პოტენციალის გავლენით. გამოსახეთ  $\Delta\delta_L^{(s)}$ ,  $U_S(r)$  პოტენციალის  $a_l^{(s)}$  გაფანტვის სიგრძით.

**მითითება:** იპოვეთ  $\Delta\delta_L^{(s)}$  ფაზური ნანაცვლება შეშფოთების თეორიის გამოყენებით, ბორნის მიახლოებაში გამოსახეთ ის მოკლე ქმედების პოტენციალის გაფანტვის სიგრძის საშუალებით და ბოლოს შეცვალოთ ის  $U_S(r)$  პოტენციალის ზუსტი  $a_l^{(s)}$  გაფანტვის სიგრძით.

4.18. რა მოდიფიცირება დასჭირდება რეზერფორდის ფორმულას იმისათვის, რომ აღვწეროთ  $r < r_s$  მცირე მანძილებზე დამახინჯებულ  $U = \pm Ze^2/r$  კულონურ ველში ნაწილაკების გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა? ჩათვალეთ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:  $kr_s \ll 1$  და  $Ze^2 \ll \hbar v$ . კულონური ველის დამახინჯება გამონვეულია  $a_0^{(s)}$  გაფანტვის სიგრძის მქონე  $U_S(r)$  მოკლე ქმედების პოტენციალით.



4.19. იპოვეთ  $a_l$  გაფანტვის სიგრძე ნებისმიერი  $l$  მომენტისა და შემდეგი პოტენციალისათვის:

ა)  $R$ -რადიუსიანი შეუღწევადი სფერო.

ბ)  $U(r) = -\alpha \delta(r - R)$

4.20. იპოვეთ  $a_l$  გაფანტვის სიგრძე ნებისმიერი  $l$  მომენტისათვის,  $R$  რადიუსის და  $U_0$  სიღრმის პოტენციური ორმოსათვის.

4.21. აჩვენეთ, რომ  $r_0$  ეფექტური ურთიერთქმედების რადიუსისათვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$r_0 = 2 \int_0^\infty \left\{ \left( -\frac{r}{a_0} + 1 \right)^2 - \chi_0^2(r) \right\} dr$$

სადაც  $\chi_0(r)$ ,  $l = 0$  და  $E = 0$  მდგომარეობის რადიალური ტალღური ფუნქციაა ( $\chi_0 = rR_0$ ), რომელიც  $r \rightarrow \infty$  მანძილებზე შემდეგნაირად ნორმირდება:

$\chi_0(r) = 1 - \frac{r}{a_0}$ , სადაც  $a_0$  გაფანტვის სიგრძეა.

4.22. ისარგებლეთ წინა ამოცანაში მიღებული ფორმულით და იპოვეთ  $r_0$  ეფექტური ურთიერთქმედების რადიუსი  $R$ -რადიუსიანი ა) შეუღწევადი სფეროსა და ბ)  $U(r) = -\alpha \delta(r - R)$  პოტენციალისათვის მათში ბმული მდგომარეობების გაჩენისას ანუ, როცა  $a_0 = \infty$ .

4.23. აჩვენეთ, რომ  $l \neq 0$  მდგომარეობებისათვის  $r_0$  ეფექტური ურთიერთქმედების რადიუსი ბმული მდგომარეობების გაჩენის მომენტში ასე გამოითვლება:

$$r_l = -2[(2l-1)!!]^2 \frac{1}{C_l^2}; \quad \chi_l^{(0)}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} C_l \frac{1}{r^l} \quad \text{და} \quad \int_0^\infty (\chi_l^{(0)}(r))^2 dr = 1$$

4.24. იპოვეთ  $r_l$ ,  $U(r) = -\alpha \delta(r - R)$  პოტენციალისათვის.

4.25. ნელი ნაწილაკებისათვის იპოვეთ  $\delta_0(k)$  ფაზური ნანაცვლებები და გაფანტვის კვეთა შემდეგ პოტენციურ ველებში:

ა)  $R$ -რადიუსიანი შეუღწევადი სფერო.

ბ)  $U(r) = -\alpha \delta(r - R)$

4.26.\* განიხილეთ  $l \neq 0$  მომენტის მქონე ნელი ნაწილაკების გაფანტვა  $U(r) = -\alpha \delta(r-R)$  პოტენციალურ ველში. სპეციალურად განიხილეთ რეზონანსული გაფანტვის შემთხვევა, როდესაც არსებობს  $E_R \ll \hbar^2/mR^2$  მცირე ბმის ენერჯის მქონე კვაზიდისკრეტული მდგომარეობა და იპოვეთ მისი  $\Gamma_R$  სიგანე.

**მითითება:** გამოიყენეთ (IV.1) ეფექტური რადიუსის გაშლის ფორმულა.

4.27.  $U_0(r)$  პოტენციალის პარამეტრები ისე არის შერჩეული, რომ მას გააჩნია ბმული მდგომარეობა  $E=0$  ენერჯით და  $l$  მომენტით (გაფანტვის სიგრძე  $a_l^{(0)} = \infty$ ). იპოვეთ  $a_l$  გაფანტვის სიგრძე პოტენციალური ენერჯის  $\delta U(r)$  მცირე ცვლილებისას.

4.28. განიხილეთ ნაწილაკის გაფანტვა:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0; & r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases} \quad V_0 > 0$$

პოტენციალისათვის. შემოიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2}; \quad k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2} \quad \text{და} \quad K^2 = k^2 + k_0^2. \quad A$$

ა) ნელი ნაწილაკებისათვის ( $ka \ll 1$ ) გამოთვალეთ  $\delta_0$  და  $\delta_1$  გაფანტვის ფაზები.

ბ) იპოვეთ ნელი ნაწილაკებისათვის არარეზონანსული გაფანტვის  $\sigma_T$  სრული კვეთა, როცა  $ka \ll 1$  და  $\delta_1 \ll \delta_0 \ll 1$ .

4.29. ისარგებლეთ წინა ამოცანის შედეგებით და  $s$  და  $p$  ტალღებისათვის იპოვეთ პირობები, როდესაც ხდება რეზონანსული გაფანტვები.

4.30.\* ამოცანაზე დაყრდნობით იპოვეთ  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  დიფერენციალური კვეთა  $s$  ტალღოვანი რეზონანსული გაფანტვისათვის ( $ka \ll 1, l=0$ ).

4.31.\* წინა ამოცანაზე დაყრდნობით იპოვეთ  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  დიფერენციალური კვეთა  $p$  ტალღოვანი რეზონანსული გაფანტვისათვის ( $ka \ll 1, l=1$ ).

4.32.\* განიხილეთ ნაწილაკის გაფანტვა:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0; & r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases} \quad V_0 > 0$$

პოტენციალისათვის. იპოვეთ კავშირი  $V_0$ ,  $a$  და  $m$  პარამეტრებს შორის, როდესაც ნულოვან ენერჯიაზე სრული კვეთა ნულისკენ მიისწრაფვის.

**მიითითება:** გაითვალისწინეთ, რომ ნულოვან ენერგიაზე მნიშვნელოვანია მხოლოდ  $l = 0$  პარციალური ტალღები.

4.33. განიხილეთ პოტენციალი:

$$V(r) = \begin{cases} V_0; & r < r_0 \\ 0; & r > r_0 \end{cases}$$

სადაც  $V_0$ -ს ორივე ნიშანი შეიძლება ჰქონდეს. აჩვენეთ, რომ  $V_0 \ll E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  და

$kr_0 \ll 1$  პირობებში გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა იზოტროპულია, ხოლო გაფანტვის სრული კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma_{tot} = \left( \frac{16\pi}{9} \right) \frac{m^2 V_0^2 r_0^6}{\hbar^4}$$

4.34. აჩვენეთ, რომ წინა ამოცანაში დიფერენციალური კვეთა შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B \cos\theta$$

და მიიღეთ მიახლოებითი გამოსახულება  $B/A$  შეფარდებისათვის.

4.35. იპოვეთ  $a$  რადიუსისა და  $U_0$  სიღრმის სწორკუთხა სფერულ ორმოზე ნელი ნაწილაკების გაფანტვის კვეთა.

4.36. იპოვეთ  $a$  რადიუსისა და  $U_0$  სიმაღლის სწორკუთხა სფერულ ჯებირზე ნელი ნაწილაკების გაფანტვის კვეთა.

4.37. იპოვეთ ნელი ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა იმ ველში, რომელიც დიდ მანძილებზე ასეთი სახით ეცემა:  $U = \beta/r^n, 2 < n \leq 3$ .

4.38.\*იპოვეთ  $U = \alpha/r^n, \alpha > 0, n > 3$  პოტენციალურ ველში ნელი ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა.

**მიითითება:**  $l = 0$  მდგომარეობისათვის შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ

$\chi = \varphi\sqrt{r}, r = \left( \frac{2\gamma}{(n-2)x} \right)^{\frac{2}{n-2}}$  ჩასმა და  $\varphi$  ფუნქციისათვის მიიღეთ ბესელის ფუნქციის განტოლება.

4.39.\*იპოვეთ  $U(r) = -U_0 e^{-r/a}; U_0 > 0$  პოტენციალურ ველში ნელი ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა.

**მიითება:** შრედინგერის განტოლებაში შემოიღეთ ახალი ცვლადი  $x = 2a\lambda e^{-\frac{r}{2a}}$ ;  $\lambda = \frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}$  და მიიღეთ ბესელის ფუნქციის განტოლება.

4.40. ცენტრალური სიმეტრიის ველში ნაწილაკის მოძრაობისას იპოვეთ ნელი ნაწილაკების გაფანტვის ამპლიტუდა შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში.

4.41. დაადგინეთ ნელი ნაწილაკებისათვის გაფანტვის ამპლიტუდის ენერგიაზე დამოკიდებულების სახე ორგანზომილებიან შემთხვევაში და იპოვეთ გაფანტვის სრული განივკვეთი.

4.42. გამოსახეთ  $r \approx a$  „შიდა“ არეში ურთიერთქმედების  $r_0$  ეფექტური რადიუსი ბმული მდგომარეობის ტალღური ფუნქციით ( $E = \mathcal{E}$ ).

4.43. იპოვეთ გაფანტვის  $\delta_l$  ფაზის ცვლილება  $U(r)$  ველის ვარირებისას.

4.44. იპოვეთ  $a$  გაფანტვის სიგრძე და ურთიერთქმედების  $r_0$  ეფექტური რადიუსი  $R$  რადიუსისა და  $U_0$  სიღრმის სწორკუთხა სფერული ორმოსათვის, რომელსაც გააჩნია ნულთან ახლოს მდებარე ერთადერთი დისკრეტული დონე.

4.45. გამოსახეთ  $\int_0^a \chi^2 dr$  ინტეგრალი  $S$  მდგომარეობის ტალღური ფუნქციის კვადრატადან  $U(r)$  ველის  $\delta_0(k)$  ფაზით, რომელიც მხოლოდ  $a$  რადიუსის სფეროს შიგნით არის ნულისაგან განსხვავებული.

4.46. აჩვენეთ, რომ მცირე ენერგიაზე სამართლიანია შემდეგი ფორმულა:

$$kctg\delta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2$$

სადაც  $a$  გაფანტვის სიგრძეა, ხოლო  $r_0$  ურთიერთქმედების ეფექტური რადიუსია.

4.47.

$$V(r) = \begin{cases} -V_0; & r < r_0 \\ 0; & r > r_0 \end{cases}$$

პოტენციალისათვის  $r = r_0$  ნერტილში სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მიიღეთ

$$kctg\delta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2$$

ფორმულა.

4.48.\* მცირე ენერგიებზე  $l = 0$  -თვის იპოვეთ გაფანტვის კვეთა

$$V(r) = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{ch^2 \alpha r}$$

მოდულიზირებულ პაშენ-ტალერის პოტენციალზე.

**მიითითება:**  $y = ch^2 \alpha x$  და  $u = y^{\frac{\lambda}{2}} v(y)$  ჩასმებით  $v$  ფუნქციისათვის მიიღეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლება.

4.49.\* იპოვეთ ნელი ნაწილაკების ( $\mu a k / \hbar^2 \ll 1$ ) გაფანტვის ფაზური წანაცვლებები და სრული კვეთები

$$V = \frac{a}{r^3}$$

ველისათვის.

**მიითითება:** ისარგებლეთ (II.5) ფორმულით.

4.50.\* იპოვეთ ნელი ნაწილაკების ( $ka \ll 1$ ) გაფანტვის ფაზური წანაცვლებები და სრული კვეთები

$$V(r) = -V_0 \cosh^{-2} r/a$$

ველისათვის.

**მიითითება:** შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ შემდეგი ჩასმები:

$$\Psi = \left( \cosh \frac{r}{a} \right)^{-2\lambda} u; \quad \lambda = \frac{1}{4} \left( \sqrt{8\mu V_0 a^2 \hbar^{-2} + 1} - 1 \right) \text{ და } u \text{ ფუნქციისათვის განტო-}$$

ლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე.

4.51.\* იპოვეთ ნელი ნაწილაკების ( $ka \ll 1$ ) გაფანტვის ფაზური წანაცვლებები

$$V(r) = V_0 \cosh^{-2} r/a; \quad V_0 > 0$$

ველისათვის.

**მიითითება:** მოახდინეთ წინა ამოცანაში ჩატარებული გარდაქმნების ანალოგიური გარდაქმნები.

## თავი 5. სწრაფი ნაწილაკების გაფანტვა. ეიკონალის და კვაზიკლასიკური მიახლოებები

სწრაფი ნაწილაკების გაფანტვისას, როდესაც სრულდება პირობები  $kR \gg 1$  და  $E \gg |U(\vec{r})|$ , ამპლიტუდისათვის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი გაფანტვის მცირე  $\theta \leq 1/kR$  კუთხეებისათვის სამართლიანია ეიკონალის მიახლოება:

$$f(\vec{k}_0, \vec{q}_\perp) = \frac{k}{2\pi i} \int [S(\vec{\rho}) - 1] e^{-i\vec{q}_\perp \vec{\rho}} d^2 \vec{\rho} \quad (V.1)$$

სადაც  $\vec{q}_\perp$  არის მდგენელი  $\hbar \vec{k}_0$  დაცემული ნაწილაკების იმპულსის მართობი მართულებით. ამასთან,  $q_\perp \approx q \approx k\theta$ ,  $q_{||} \approx k\theta^2/2$

$$\text{და} \quad S(\rho) = e^{2i\delta(\rho)}, \quad \delta(\rho) = -\frac{1}{2\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{\rho}, z) dz \quad (V.2)$$

ოპტიკური თეორემის გამოყენებით, (V.1)-დან სრული კვეთისათვის მიიღება ფორმულა:

$$\sigma(E) = 2 \int (1 - \cos 2\delta(\vec{\rho})) d^2 \vec{\rho}. \quad (V.3)$$

ცენტრალური პოტენციალებისათვის (V.2) გამოსახულება  $\delta(\rho)$ -თვის ემთხვევა კვაზიკლასიკურ გამოსახულებას, ხოლო (V.1) ფორმულა შემდეგნაირად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$f(k, \theta) = ik \int_0^{\infty} (1 - e^{2i\delta(\rho)}) J_0(k\rho\theta) \rho d\rho \quad (V.4)$$

სადაც  $J_0(z)$  ბესელის ფუნქციაა.

კვაზიკლასიკურ (WKB) მიახლოებაში:

$$\delta_l^{WKB}(k) = \int_0^{\infty} \left\{ \sqrt{k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}} - k \right\} dr + \frac{1}{2} \pi \left( l + \frac{1}{2} \right) - kr_0 \quad (V.5)$$

სადაც  $r_0$  მობრუნების წერტილია.  $|U(r)| \ll E$  შემთხვევაში (V.5) გამოსახულება მარტივდება:

$$\delta_l^{WKB}(k) = -\int_{r_0}^{\infty} \frac{mU(r)dr}{\hbar^2 \sqrt{k^2 - (l+1/2)^2/r^2}}; \quad r_0 = \frac{l+1/2}{k} \quad (V.6)$$

5.1. აჩვენეთ, რომ  $kR \gg 1$  სწრაფი ნაწილაკების სრული კვეთა  $R$  რადიუსის პოტენციალისათვის შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$\sigma(E) = 4\pi \int_0^\infty \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^\infty U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \right] \right\} \rho d\rho$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ ამ ფორმულის სამართლიანობისათვის არ არის სავალდებულო  $E \gg |U(r)|$  პირობის შესრულება, რაც აუცილებელია ეიკონალის მიახლოების გამოსაყენებლად.

5.2. წინა ამოცანაში მიღებული შედეგები გამოიყენეთ პოტენციალურ ბარიერზე (ან ორმოზე):

$$U = \begin{cases} 0; & r > R \\ U_0; & r < R \end{cases}$$

ნაწილაკების კვეთის გამოსათვლელად.

5.3. იპოვეთ  $l = 0$  მდგომარეობაში

$$V(r) = \begin{cases} -V_0; & r < a \\ 0; & r > a \end{cases} \quad V_0 > 0$$

პოტენციალზე დიდი ენერჯის ნაწილაკის გაფანტვის ამპლიტუდა.

5.4. წინა ამოცანის შედეგი მიიღეთ ბორნის მიახლოებაში.

5.5.  $U(r) = \alpha/r^\nu; \nu > 2, \alpha > 0$  პოტენციალურ ველში მიიღეთ ნაწილაკების სრული გაფანტვის კვეთა  $E \rightarrow \infty$  ენერჯიებისათვის.

5.6. განიხილეთ შემდეგი პოტენციალი:

$$U = g(E)e^{-\frac{r}{R}}$$

სადაც  $g(E) = g_0 \left( \frac{E}{E_0} \right)^n$ . აჩვენეთ, რომ ენერჯის ზრდისას  $E \rightarrow \infty$  სამართლიანია შემდეგი შეზღუდვა სრულ კვეთაზე:

$$\sigma(E) \leq \sigma_0 \ln^2 \left( \frac{E}{E_0} \right)$$

5.7.\* იპოვეთ ეიკონალის მიახლოებაში  $U = \frac{\alpha}{r}$  კულონურ ველზე ნაწილაკების

გაფანტვისას გაფანტვის ამპლიტუდა და დიფერენციალური კვეთა  $\frac{|\alpha|}{\hbar v} \gg 1$  ზღვრულ შემთხვევაში.

**მითითება:** ამპლიტუდის გამოთვლისას ჩათვალეთ, რომ კულონური პოტენციალი „ჩამოჭრილია“ დიდ  $R$  მანძილებზე, ანუ დაუშვით, რომ  $U = 0$ , როცა  $r > R$  და გამოიყენეთ (V.2) ფორმულა.

5.8. ეიკონალის მიახლოებაში გამოსახეთ ნაწილაკების ორ ცენტრზე გაფანტვის ამპლიტუდა ერთ  $U_0(r)$  ცენტრზე გაფანტვის  $f_0$  ამპლიტუდით. ცენტრები ერთმანეთისგან დაშორებულია  $\vec{a}$  მანძილით, ანუ პოტენციალს შემდეგი სახე აქვს:  $U(\vec{r}) = U_0(|\vec{r} - \vec{a}/2| + |\vec{r} + \vec{a}/2|)$ .

5.9. წინა ამოცანაში მიღებული შედეგი გამოიყენეთ ორ სუსტად დაკავშირებულ ცენტრზე (დეიტრონის მსგავსი) გაფანტვის სრული კვეთის დასათვლელად, როდესაც სისტემის მახასიათებელი ზომა გაცილებით დიდია დამცემი ნაწილაკის ცალკეულ ცენტრთან ურთიერთქმედების რადიუსთან შედარებით.

5.10. აჩვენეთ, რომ სწრაფი ელექტრონების წყალბადის ატომის ძირითად მდგომარეობაზე გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა (უგულუბელყავით ნაწილაკების იგივეურობის ეფექტი) მოიცემა ფორმულით:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{4m^2 e^4}{\hbar^4 q^4} \right) \left\{ 1 - \frac{16}{[4 + (qa_0)^2]^2} \right\}^2$$

5.11. განაზოგადეთ ეიკონალის მიახლოება გაცვლითი ურთიერთქმედების შემთხვევაში, როდესაც  $\hat{U}_{exc} \Psi(\vec{r}) \equiv U(r)\Psi(-\vec{r})$ . რა კავშირია გაცვლითი და ჩვეულებრივი პოტენციალების გაფანტვის სრულ კვეთებს შორის?

5.12.\*  $R$ -რადიუსიან, აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე,  $kR \gg 1$  სწრაფი ნაწილაკების გაფანტვისას, იპოვეთ ამპლიტუდა და დიფერენციალური კვეთა მცირე კუთხეებზე გაფანტვის შემთხვევაში, როცა  $kR\theta \leq 1$ .

**მითითება:** გამოთვლებისათვის გამოიყენეთ ფაზური ნანაცვლების კვაზიკლასიკური მიახლოების ამ თავის შესავალი ნაწილის (V.6) ფორმულა.

5.13.  $R$ -რადიუსიან, აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე,  $kR \gg 1$  სწრაფი ნაწილაკების გაფანტვისას, იპოვეთ ამპლიტუდა და დიფერენციალური კვეთა  $\theta \gg (kR)^{-1/3}$  კუთხეებისათვის.

5.14. იპოვეთ გაფანტვის სრული კვეთა  $a$  რადიუსისა და  $U_0$  სიღრმის სწორკუთხა სფერული ორმოსათვის, როცა სრულდება პირობა  $U_0 \ll \frac{\hbar^2 k^2}{m}$ .

5.15. იპოვეთ გაფანტვის სრული კვეთა  $U = U_0 e^{-\frac{r^2}{a^2}}$  პოტენციალისათვის, როცა  $U_0 \ll \frac{\hbar^2 k^2}{m}$ .



15.16.\* იპოვეთ  $a$  რადიუსის მქონე ცილინდრულ არეში მოქცეულ მაგნიტურ ველზე ელექტრონების მცირე კუთხეებზე გაფანტვის კვეთა.

**მითითება:** დაუშვით, რომ მაგნიტური ველი მიმართულია  $y$  ღერძის გასწვრივ, რომელიც ცილინდრული არის ღერძს ემთხვევა, ხოლო ელექტრონები ეცემა  $z$  ღერძის გასწვრივ. მაშინ გაფანტვის სურათი არ არის დამოკიდებული  $y$  კოორდინატაზე და ამოცანა დადის  $xz$  სიბრტყეში მოძრაობაზე. ამიტომ ისარგებლეთ ამ თავის შესავალი ნაწილის (V.1) ფორმულით.

5.17.\* გამოთვალეთ კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში  $\delta_l(k)$  ფაზური ნანაცვლებები დიდ მანძილებზე  $V(r) \approx r^{-n}; n > 2$  ყოფაქცევის პოტენციალისათვის.

**მითითება:** გამოიყენეთ მეორე თავის შესავალი ნაწილის (V.6) ფორმულა.

5.18.\* იპოვეთ წინა ამოცანის პირობებში კვაზიკლასიკური გაფანტვის სრული კვეთა

**მითითება:** II თავის შესავალი ნაწილის (II.3) ფორმულაში ჯამი შეცვალეთ ინტეგრალით და მიღებულ ინტეგრალში ჩაატარეთ ნაწილობითი ინტეგრაცია.

5.19.\* იპოვეთ გაფანტვის კუთხური განაწილება, როგორც  $\rho = l/k$  სამიზნე მანძილის ფუნქცია, კლასიკური გაფანტვის კუთხის  $\theta(\rho)$  ექსტრემალური წერტილის მახლობლად.

**მითითება:** გაფანტვის ამპლიტუდის გამოთვლისას მიღებული ინტეგრალი დაიყვანეთ ეირის  $\Phi(x)$  ფუნქციებზე.

5.20.\* იპოვეთ კვაზიკლასიკური გაფანტვის კუთხური განაწილება მცირე კუთხეებზე, თუ  $\theta$  კლასიკური გადახრის კუთხე ნული ხდება სამიზნე პარამეტრის  $\rho = l_0/k$  გარკვეულ სასრულო მნიშვნელობაზე.

**მითითება:** ამ ამოცანაში კვაზიკლასიკურობა ნიშნავს, რომ  $l_0 \gg 1$  და  $\delta_{l_0} \gg 1$ .

ამიტომ გაფანტვაში მნიშვნელოვანია  $l_0$ -თან ახლოს მყოფი  $l$ -ები და მცირე

$$l' = l - l_0 \text{-ებისათვის შეიძლება დაინეროს: } \delta_l \approx \delta_{l_0} + \frac{\beta}{2} l'^2.$$

5.21.\* აჩვენეთ, რომ კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში  $\delta_l(k)$  ფაზა მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\delta_l(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_a^R \sqrt{k^2 - U(r) - (l+1/2)^2 r^{-2}} dr - \int_{a_0}^R \sqrt{k^2 - (l+1/2)^2 r^{-2}} dr \right]$$

სადაც ინტეგრების ქვედა ზღვრები ინტეგრალქვეშა ფუნქციების ნულებია.

**მიითითება:** გამოიყენეთ მეორე თავის შესავალი ნაწილის (V.5) ფორმულა.

5.22.\* იპოვეთ  $a$  რადიუსის მქონე აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე სწრაფი ნაწილაკების დრეკადი გაფანტვის სრული კვეთა.

**მიითითება:** გამოიყენეთ სასაზღვრო პირობა ტალღური ფუნქციისათვის  $\chi_l(a)=0$  და  $J_p(x)$  ბესელის ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევის ფორმულები არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის.

## თავი 6. სპინის მქონე ნაწილაკების გაფანტვა

არანულოვანი სპინის მქონე ნაწილაკების გაფანტვისას (როდესაც ურთიერთქმედება სპინზეა დამოკიდებული), გაფანტვის ამპლიტუდა მატრიცას წარმოადგენს. მისი მატრიცული ელემენტები  $\chi_f^* \hat{f} \chi_i$  განსაზღვრავენ გაფანტვის ამპლიტუდას სანყისი სპინური მდგომარეობიდან, რომელიც აღინერება  $\chi_i$  სპინური ფუნქციით, საბოლოო მდგომარეობაში კი –  $\chi_f$  სპინური ფუნქციით. ნახევარსპინიანი ნაწილაკების უსპინო ნაწილაკებზე გაფანტვისას (იმ ურთიერთქმედებებისათვის, რომლებიც ლუნობას ინახავს):

$$\hat{f} = A(k, \theta) + iB(k, \theta) \vec{v} \hat{\sigma}, \quad \vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} \vec{k}_0 \vec{k} \\ |\vec{k}_0 \vec{k}| \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \vec{k}_0 \vec{k} \\ |\vec{k}_0 \vec{k}| \end{bmatrix}} \quad (\text{VI.1})$$

გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა (აჯამული გაფანტული ნაწილაკების სხვადასხვა სპინური მდგომარეობით) შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A|^2 + |B|^2 + 2\text{Im}(AB^*) \vec{v} \vec{P}_0 \quad (\text{VI.2})$$

სადაც  $\vec{P}_0 = 2\chi_i^* \hat{s} \chi_i$  – ნაწილაკების პოლარიზაციის ვექტორია სანყის (დაჯახებამდე) მდგომარეობაში. გაფანტული ნაწილაკების პოლარიზაციული მდგომარეობა დამოკიდებულია სისტემაში ურთიერთქმედების ხასიათზე და სანყის  $\vec{P}_0$  პოლარიზაციაზე. თუ დაჯახებამდე ნაწილაკები არ იყვნენ პოლარიზებული ( $\vec{P}_0 = 0$ ), მაშინ დაჯახების შემდეგ პოლარიზაციის ვექტორი შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$\vec{P} = \frac{2\text{Im}(AB)^*}{|A|^2 + |B|^2} \vec{v} \quad (\text{VI.3})$$

ცენტრალური სიმეტრიის მქონე პოტენციალებისათვის, (VI.1) ფორმულაში შემავალი  $A$  და  $B$  სიდიდეებისათვის, პარციალურ ტალღებად გვაქვს შემდეგი გამწლები:

$$A = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(\exp[2i\delta_l^+] - 1) + l(\exp[2i\delta_l^-] - 1)] P_l(\cos \theta) \quad (\text{VI.4})$$

$$B = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (\exp[2i\delta_l^+] - \exp[2i\delta_l^-]) \sin \theta P_l'(\cos \theta) \quad (\text{VI.5})$$

სადაც  $\delta_l^\pm$  ფაზური ნანაცვლებებია (რადიალურ ტალღურ ფუნქციებში) იმ მდგომარეობებისათვის, რომლებიც ხასიათდება განსაზღვრული ორბიტალური  $l$  მომენტით და  $j = l \pm 1/2$  სრული მომენტით.

6.1.  $s = 1/2$  სპინის მქონე ნაწილაკის გარეშე ველთან ურთიერთქმედების ოპერატორს შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)\hat{\sigma}\hat{l}$$

განიხილეთ გაფანტვა ბორნის მიახლოებაში. როგორ არის გაფანტვის სრული კვეთა ენერგიაზე დამოკიდებული?

6.2. გამოიყენეთ წინა ამოცანის შედეგი და ელექტრონის ბირთვის  $U_0 = -Ze^2/r$  კულონურ ველში გაფანტვისას იპოვეთ გაფანტვის ამპლიტუდის სპინზე დამოკიდებული ნაწილი. გაითვალისწინეთ, რომ სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება

შემდეგი გამოსახულებით მოიცემა:  $U_1 = \frac{\hbar^2}{4m^2c^2r} \frac{\partial U_0}{\partial r}$ .

6.3. იპოვეთ სწრაფი ნეიტრონების კულონურ ველში გაფანტვის ამპლიტუდა და დიფერენციალური კვეთა ბორნის მიახლოებაში.

6.4. რა შეზღუდვებს ადებს ჰამილტონიანის ერმიტულობა  $s = 1/2$  სპინის მქონე ნაწილაკის გარეშე ველთან  $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)\hat{l}\hat{\sigma}$  ურთიერთქმედებას? ბორნის პირველ მიახლოებაში როგორია გაფანტული ნაწილაკების პოლარიზაცია, თუ ისინი თავდაპირველად არაპოლარიზებული იყვნენ?

6.5. აჩვენეთ, რომ, თუ წინა 6.4. ამოცანაში დაჯახებამდე ნაწილაკები პოლარიზებული იყვნენ, დაჯახების შედეგად პოლარიზაციის ვექტორი მხოლოდ მობრუნდება.

6.6.\* იპოვეთ პოლარიზაცია, რომელიც წარმოიქმნება სწრაფი  $\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1$  არაპოლა-

რიზებული ელექტრონების ბირთვის კულონურ ველზე გაფანტვისას. როგორია პოლარიზაცია პოზიტრონების გაფანტვისას?

**მითითება:** სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედება მითითებულია 6.1 ამოცანაში.

შემფოთების თეორიის მეორე რიგში ჯერ განიხილეთ  $U_0(r) = -\frac{Ze^2}{r} e^{-\frac{r}{R}}$  კულონური პოტენციალი და საბოლოო შედეგში გადადით  $R \rightarrow \infty$  ზღვარზე.

6.7.  $s = 1/2$  სპინის მქონე ნაწილაკის გარეშე ველთან ურთიერთქმედებას ასეთი სახე აქვს:  $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)\hat{l}\hat{\sigma}$ . იპოვეთ  $\delta_l^\pm$  ფაზური წანაცვლებები ბორნის და კვაზიკლასიკურ მიახლოებებში.

6.8.  $s = 1/2$  სპინის მქონე ნაწილაკის გარეშე ველთან ურთიერთქმედებას შემდეგი სახე აქვს:  $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)\hat{l}\hat{\sigma}$ . იპოვეთ  $\delta_l^\pm$  ფაზური წანაცვლებები ეიკონალის მიახლოებაში.

6.9. უსპინო ნაწილაკი იფანტება სივრცეში მოთავსებულ ორ ერთნაირ  $s = 1/2$  სპინის მქონე ცენტრზე. ურთიერთქმედებას ცალკეულ ცენტრებთან შემდეგი სახე აქვს:  $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r)\hat{l}\hat{\sigma}$ . ბორნის მიახლოებაში არაპოლარიზებული ცენტრებისათვის ( $\vec{P}_n = 0$ ) გამოიკვლიეთ გაფანტვის ამპლიტუდა და დიფერენციალური კვეთა.

6.10. სპინის მქონე ნაწილაკების გაფანტვისათვის განაზოგადეთ ოპტიკური თეორემა.

6.11. ორი ნახევარსპინიანი იგივეური ნაწილაკის ურთიერთქმედების პოტენციალია:

$$U(r) = V(r)(1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)$$

სადაც  $\sigma_i$  პაულის მატრიცებია და 1 ერთეულოვანი ოპერატორია სპინურ სივრცეში, ხოლო  $V(r)$ -ს ასეთი სახე აქვს:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{4\mu r^2}; & r < R \\ 0; & r > R \end{cases} \quad \mu = \frac{m}{2}$$

ა) რას მოგვცემს  $(1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)$  სპინური ოპერატორის მოქმედება სინგლეტურ და ტრიპლეტურ მდგომარეობებზე?

ბ) განიხილეთ ამ ნაწილაკების დაბალ ენერგიებზე გაფანტვა  $kR \ll 1$  ( $k = \sqrt{2\mu E / \hbar^2}$ ), როდესაც სრული სპინი  $s = 0$ . იპოვეთ გაფანტვის ფაზები და სრული კვეთა.

6.12. წინა ამოცანაში განიხილეთ ნაწილაკების დაბალ ენერგიებზე გაფანტვა  $kR \ll 1$  ( $k = \sqrt{2\mu E / \hbar^2}$ , როდესაც სრული სპინი  $s = 1$ ).

ა) იპოვეთ გაფანტვის ფაზები და სრული კვეთა.

ბ) იპოვეთ არაპოლარიზებული ნაკადის სრული კვეთა.

6.13. იპოვეთ ნახევარსპინიანი ნაწილაკების ნულოვანი სპინის ნაწილაკებზე გაფანტვის შემდეგ პოლარიზაცია, თუ გაფანტვამდე პოლარიზაცია ნულისაგან განსხვავებული იყო.

6.14.\* განიხილეთ არაპოლარიზებული ნეიტრონების ერთმანეთზე გაფანტვა, როდესაც მათი ურთიერთქმედების პოტენციალი მოიცემა ფორმულით:

$$V(r) = \begin{cases} \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 V_0, & r \leq a, \\ 0, & r > a \end{cases}$$

სადაც  $\vec{\sigma}_1$  და  $\vec{\sigma}_2$  ნეიტრონების სპინების პაულის მატრიცებია. გამოთვალეთ გაფანტვის სრული კვეთა.

**მითითება:** გამოიყენეთ ფაქტი, რომ მცირე ენერგიებზე გაფანტვისას ძირითადი ნვლილი მოდის  $l = 0$  მდგომარეობიდან.

6.15.\* განიხილეთ იგივეური ნაწილაკების გაფანტვა  $U(r)$  პოტენციალით. იპოვეთ გაფანტვის ეფექტური კვეთა მოკლე ქმედების რადიუსის მქონე პოტენციალურ ველზე ნელი იგივეური ნაწილაკების გაფანტვისას.

**მითითება:** გამოიყენეთ ფაქტი, რომ იგივეური ნაწილაკებისათვის, დამოუკიდებლად იმისა, ნაწილაკების სპინი მთელია თუ არა, ლუნ ჯამურ სპინს შეესაბამება სიმეტრიული ორბიტალური ტალღური ფუნქცია, ხოლო კენტ სპინს – ანტისიმეტრიული ტალღური ფუნქცია.

6.16.\* იპოვეთ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა ელექტრონის ელექტრონზე და  $\alpha$  ნაწილაკის  $\alpha$  ნაწილაკზე გაბნევისას.

**მითითება:** გამოიყენეთ კულონური გაფანტვის ამპლიტუდის ფორმულა:

$$f(\theta) = -\frac{1}{2k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{-\frac{2i}{k} \ln \sin \frac{\theta}{2}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i}{k}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{i}{k}\right)}$$

და წინა ამოცანის შედეგები.

6.17.\* ბორნის მიახლოებაში გამოთვალეთ ნეიტრონ-ნეიტრონის გაფანტვის სრული კვეთა. ჩათვალეთ, რომ ტრიპლეტურ მდგომარეობაში არ გვაქვს გაფანტვა,

ხოლო სინგლეტურ მდგომარეობაში მოქმედებს იუკავას  $V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}$  პოტენ-

ციალი და ნეიტრონები არაპოლარიზებული არიან.

**მითითება:** ისარგებლეთ  $l$  თავის შესავალი ნაწილის (1.8) ფორმულით.

## თავი 7. გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზური თვისებები. შედგენილი ნაწილაკების გაფანტვა. არადრეკადი გაფანტვები

გაფანტვის პროცესების ამპლიტუდებს გარკვეული ანალიზური და უნიტარობის თვისებები გააჩნიათ. კერძოდ,  $U(r)$  პოტენციალურ ველში გაფანტვის ამპლიტუდისათვის სამართლიანია უნიტარობის შემდეგი პირობა:

$$f(\vec{k}, \vec{k}_0) - f^*(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{ik}{2\pi} \int f(\vec{k}, \vec{k}_0) f^*(\vec{k}', \vec{k}) d\Omega' \quad (\text{VII.1})$$

საიდანაც  $\vec{k} = \vec{k}_0$  შემთხვევაში მიიღება (II.4) ოპტიკური თეორემა. უნდა აღინიშნოს, რომ (VII.1)  $S$  მატრიცის უნიტარობის შედეგია. ასევე გამოიყურება უნიტარობის პირობა შედგენილი ნაწილაკების გაფანტვისას, მაგრამ მხოლოდ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც შეუძლებელია არადრეკადი პროცესების განხორციელება.

გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზური თვისებების გამოხატულებაა დისპერსიული თანაფარდობები. ყველაზე მარტივი ანალიზური თვისებები გააჩნია გაფანტვის ამპლიტუდას ცენტრალური სიმეტრიის მქონე პოტენციალისათვის  $\theta = 0$  კუთხეზე (თუ განვიხილავთ გაფანტვის ამპლიტუდას, როგორც ენერჯიის ფუნქციას  $E$  კომპლექსურ სივრცეში). ის აკმაყოფილებს (ფიზიკურ ფურცელზე) შემდეგ დისპერსიულ თანაფარდობას:

$$f(E, 0) = f^B(0) + \sum_n \frac{d_n}{E - E_n} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} f(E', 0)}{E' - E} dE' \quad (\text{VII.2})$$

სადაც  $f^B(0)$  – ბორნის ამპლიტუდაა, ხოლო აჯამვა მიმდინარეობს დისკრეტული სპექტრის ყველა დონით (რომელიც მოცემულ პოტენციალს გააჩნია) და ნაშთი შესაბამის პოლუსში შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$d_n = -(-1)^{l_n} (2l_n + 1) \frac{\hbar^2 A_n^2}{2m} \quad (\text{VII.3})$$

სადაც  $A_n$  ნორმირების კოეფიციენტი განისაზღვრება ბმული მდგომარეობის რადიალური ფუნქციის ასიმპტოტიკით დიდ მანძილებზე  $rR \approx A_n \exp\{-\lambda_n r\}$  და  $l_n$  მომენტით.

7.1. გამოიკვლიეთ ნულოვანი რადიუსის პოტენციალზე გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზური თვისებები და დისპერსიული თანაფარდობები. განიხილეთ ბმული მდგომარეობების როგორც არსებობის, ასევე არარსებობის შემთხვევები.

7.2. გამოიყენეთ დისპერსიული თანაფარდობა და აჩვენეთ, რომ  $U(r) > 0$  განზიდვის პოტენციალისათვის ნაწილაკების კვეთისათვის სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma(E)}{\sqrt{E}} dE \approx 4\pi^2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^{\infty} U(r) r^2 dr$$

7.3. აჩვენეთ, რომ მიზიდვის  $U(r) \leq 0$  პოტენციალზე გაფანტვისას სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma(E)}{\sqrt{E}} dE \approx \pi \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m}} \sigma(0)$$

ამასთან, არასაკმარისი სიღრმის გამო, არ არსებობს ბმული მდგომარეობები; ამ ფორმულაში  $\sigma(0) = 4\pi a_0^2$  გაფანტვის კვეთაა  $E = 0$  ნულოვანი ენერგიისათვის.

7.4. იმის გათვალისწინებით, რომ, როცა  $l \geq L_0 \equiv kR \gg 1$ , პარციალური ტალღებისათვის ურთიერთქმედება ძალზე მცირეა, მაღალი ენერგიების მქონე უსპინო ნაწილაკების სხვადასხვა კუთხეზე გაფანტვებისათვის მიიღეთ ზემოდან შეზღუდვა გაფანტვის ამპლიტუდის სიდიდისათვის.

7.5. წინა, 7.4 ამოცანის პირობებში მიიღეთ ქვემოდან შეზღუდვა სწრაფი ნაწილაკების  $\sigma_{el}$  დრეკადი გაფანტვის კვეთაზე გაფანტვის  $\sigma_{tot}$  სრული კვეთის მოცემული მნიშვნელობისათვის.

7.6. მაღალი ენერგიებისათვის იპოვეთ ზემოდან შეზღუდვა დრეკადი წინ გაბნევის ( $\theta = 0$ ) ამპლიტუდის ნამდვილი ნაწილის სიდიდეზე, იმ პირობებში, როდესაც ცნობილია გაბნევის სრული კვეთა და იგულისხმება, რომ ნაწილაკების ურთიერთქმედება  $R$ -ზე დიდი მანძილებისათვის ძალზე მცირეა. რა შეზღუდვა ედება  $|f(E, \theta = 0)|$ -ს?

7.7. აჩვენეთ, რომ მაღალ ენერგიებზე სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$\frac{\sigma_{tot}}{32\pi} \leq - \frac{d}{dq^2} \ln \operatorname{Im} f(E, q) \Big|_{q=0} \leq \frac{R^2}{4}, \quad q = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

სადაც  $\sigma_{tot}$  სრული კვეთაა, ხოლო  $R$  ურთიერთქმედების რადიუსია.

7.8. აჩვენეთ, რომ ეიკონალის მიახლოებაში გაფანტვის ამპლიტუდა აკმაყოფილებს უნიტარობის პირობას.

7.9. აჩვენეთ, რომ ელექტრონის ატომზე (შედგენილ სისტემაზე) დრეკადი გაბნევის ამპლიტუდა, ბორნის მიახლოებაში გაცვლითი ურთიერთქმედებების გაუთვავ-



ლისწინებლად, ემთხვევა ელექტრონის სტატისტიკურ ლოკალურ  $U(r)$  პოტენციალზე გაფანტვის ამპლიტუდას და გარკვეით მისი ფიზიკური აზრი.

7.10. პოლარიზებული ელექტრონი  $s_z = +1/2$  სპინის პროექციით ეჯახება ძირითად მდგომარეობაში მყოფ წყალბადის ატომს, რომელშიც ელექტრონს საწინააღმდეგო  $s_z = -1/2$  სპინის პროექცია გააჩნია. ბორნის მიახლოებაში იპოვეთ გაფანტვის ამპლიტუდა და კვეთა სპინის „გადაბრუნებით“ (ანუ იმ შემთხვევაში, როცა  $s_z = -1/2$  აქვს გაფანტულ ელექტრონს, ხოლო  $s_z = +1/2$  – ატომურ ელექტრონს), როდესაც ატომი ძირითად მდგომარეობაში რჩება.

7.11.\* შეაფასეთ გადამუხტვის კვეთა სწრაფი პოზიტრონის ძირითად მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ატომზე დაჯახებისას, ანუ იპოვეთ პოზიტრონიუმის (ელექტრონისა და პოზიტრონისაგან შემდგარი წყალბადის მსგავსი სისტემა) წარმოქმნის კვეთა.

**მიითითება:** გადამუხტვის პროცესებისათვის გამოიყენეთ ოპენგეიმერ-ბრინკმან-კრამერის (ობკ) მიახლოება, რომელშიც უგულვებელყოფილია ბირთვებს შორის ურთიერთქმედება (მოცემულ შემთხვევაში უგულვებელყოფილია პოზიტრონის ურთიერთქმედება პროტონთან).

7.12.\* ბორნის მიახლოებაში გამოსახეთ  $A_i + B_i \rightarrow A_f + B_f$  პროცესის ამპლიტუდა (ელექტროსტატიკურად ურთიერთქმედი  $A$  და  $B$  შედგენილი სწრაფი ნაწილაკების დაჯახება) ელექტრული ფორმფაქტორების საშუალებით:

$$eF_{if}^{A(B)}(\vec{q}) = \langle \Psi_{A(B)f} | \sum_a e_a \exp[-i\vec{q} \cdot \vec{r}_a] | \Psi_{A(B)i} \rangle.$$

წყალბადის ატომისათვის გამოთვალეთ  $1s \rightarrow 1s, 1s \rightarrow 2s, 1s \rightarrow 2p$  გადასვლების ფორმფაქტორები.

**მიითითება:** გამოიყენეთ ფაქტი, რომ ამ პროცესებში ბორნის მიახლოებაში გაფანტვის ამპლიტუდა შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$f_{ij} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} T_{if} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \left\langle \Psi_f \left| \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{|\vec{x}_a - \vec{r}_b|} \right| \Psi_i \right\rangle$$

სადაც  $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$   $A$  და  $B$  ნაწილაკების დაყვანილი მასაა.

7.13.\* იპოვეთ დაჯახებების კვეთები შემდეგი პროცესებისათვის:

1)  $H(1s) + H(1s) \rightarrow H(1s) + H(1s)$  – ერთმანეთზე წყალბადის ატომების დრეკადი გაფანტვა.

2) დამუხტული უსტრუქტურო ნაწილაკის (ელექტრონი, მიონი) დაჯახება ძირითად მდგომარეობაში მყოფ წყალბადის ატომზე, რომელსაც მოჰყვა ატომის აგზნებულ  $2s$  და  $2p$  მდგომარეობებში გადასვლა.

**მითითება:** გამოიყენეთ წინა ამოცანის შედეგები.

7.14.\* იპოვეთ ორნაწილაკოვანი სისტემის ელექტრული ფორმფაქტორის ასიმპტოტიკა  $q \rightarrow \infty$ -თვის. იგულისხმება, რომ შედგენილი სისტემის წარმომქმნელ ურთიერთქმედების პოტენციალის  $\tilde{U}(q)$  ფურიე-კომპონენტას  $q \rightarrow \infty$ -თვის  $\tilde{U}(q) \propto q^{-n}$ ;  $n > 1$  ხარისხოვანი ყოფაქცევა გააჩნია.

**მითითება:** ისარგებლეთ იმით, რომ ორნაწილაკოვანი შედგენილი სისტემის  $\Psi_1$  და  $\Psi_2$  მდგომარეობებს შორის გადასვლის ელექტრული ფორმფაქტორი შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$eF_{1 \rightarrow 2}(\vec{q}) = \langle n_2 l_2 l_{2z} | e_1 e^{-i\vec{q}\vec{r}_1} + e_2 e^{-i\vec{q}\vec{r}_2} | n_1 l_1 l_{1z} \rangle \quad (1)$$

სადაც  $e_{1,2}$  ნაწილაკების მუხტებია, ხოლო  $\hbar\vec{q}$  სისტემისათვის გადაცემული იმპულსია.

7.15.\* იპოვეთ თანაფარდობა ამპლიტუდებსა და დიფერენციალურ კვეთებს შორის ნეიტრონის პროტონზე დრეკადი და ნეიტრონის ძირითად მდგომარეობაში მყოფ წყალბადის ატომზე გაფანტვებისას. უგულებელყავით ნეიტრონის მაგნიტური მომენტის ურთიერთქმედება ელექტრონთან. მიუთითეთ მიღებული შედეგის გამოყენების პირობები.

**მითითება:** გაითვალისწინეთ, რომ, ბირთვული ძალების მოკლე ქმედების გამო, პროტონების და ნეიტრონების ურთიერთქმედების დრო გაცილებით ნაკლებია ატომურ დროებთან შედარებით.

7.16.\* იპოვეთ მძიმე დამუხტული ნაწილაკების (მაგალითად, პროტონების ან იონების) ნულოვანი მომენტის მქონე ნეიტრალურ ატომებზე გაფანტვის სრული კვეთა. იგულისხმება, რომ გაფანტული ნაწილაკების სიჩქარე გაცილებით ნაკლებია ატომური ელექტრონების სიჩქარეებზე, მაგრამ, ამასთანავე,  $V \gg \hbar / Ma_B$ , სადაც  $M$  ნაწილაკის მასაა. გაფანტვის სრული კვეთისათვის გამოსათვლელად გამოიყენეთ კვანძოვანი მიახლოება.

**მითითება:** დამუხტული ნაწილაკის ატომთან ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერჯიას (პოლარიზაციულ პოტენციალს)  $r \gg a_B$  დიდ მანძილებზე შემდეგი სახე აქვს:

$$U(r) = \frac{Ze(\vec{d}\vec{r})}{2r^3} = -\frac{1}{2}\beta \frac{(Ze)^2}{r^4}$$

სადაც  $Ze$  ნაწილაკის მუხტია, ხოლო  $\beta$  – ატომის პოლარიზაციულობა.

7.17.\* იპოვეთ მშთანთქმელი („შავ“)  $R$  რადიუსის მქონე სფეროზე სწრაფი ნაწილაკების ( $kR \gg 1$ ) გაფანტვის  $\sigma_{tot}$  სრული კვეთა,  $\sigma_{el}$  დრეკადი და  $\sigma_{inl}$  არადრეკადი გაფანტვის კვეთები.

**მიითითება:** გამოიყენეთ კვაზიკლასიკური მიახლოება და ჩათვალეთ, რომ ყველა ნაწილაკი, რომელიც მიაღწევს სფეროს ზედაპირს, შთანთქმება ზედაპირის მიერ.

7.18.\* როგორც ცნობილია, ელექტრონის პოზიტრონთან ურთიერთქმედების შედეგად ადგილი აქვს ე.წ. ანიჰილაციის მოვლენას ანუ პოზიტრონ-ელექტრონის წყვილი გარდაიქმნება ფოტონებად. ამიტომ პოზიტრონიუმის დონეები სიგანეს იძენენ, რაც დაკავშირებულია დონეების სასრულო სიცოცხლის ხანგრძლივობასთან. იპოვეთ კავშირი პოზიტრონიუმის  $s$  მდგომარეობის დონის  $\Gamma_n$  სიგანესა და  $\sigma_{anih}$  ანიჰილაციის კვეთას შორის.

**მიითითება:** ანიჰილაციური ურთიერთქმედების რადიუსის სიმცირის გამო,

$$R_{anih} \approx \frac{\hbar}{m_e c} \ll a_B, \text{ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს შეშფოთების თეორია დონე-}$$

ების ნანაცვლების გაფანტვის სიგრძის და ფაზური ნანაცვლების მიხედვით.

7.19. იგივეური ნაწილაკებისაგან შედგენილი სისტემის ტალღური ფუნქცია ნებისმიერი ორი ნაწილაკის გადასმის მიმართ ბოზონებისათვის სიმეტრიული უნდა იყოს, ხოლო ფერმიონებისათვის – ანტისიმეტრიული. ამ ფაქტზე დაყრდნობით გამოსახეთ ორი უსპინო ბოზონის დრეკადი გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა გაფანტვის ამპლიტუდის საშუალებით.

7.20. წინა ამოცანის შედეგის განზოგადების საფუძველზე პროტონ-პროტონის გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა გამოსახეთ გაფანტვის ამპლიტუდის საშუალებით. ჩათვალეთ, რომ ურთიერთქმედება სფერული სიმეტრიისაა.

7.21. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია ოპტიკური თეორემა:

$$\sigma_{tot}(E) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} A(E, 0)$$

სადაც  $\sigma_{tot}(E)$  გაფანტვის სრული კვეთაა, ხოლო  $A(E, 0)$  დრეკადი გაფანტვის ამპლიტუდაა (არადრეკადი არხების არსებობისას) ნულოვან კუთხეზე.

7.22. აჩვენეთ, რომ მოცემული  $\sigma_{inel}^{(l)}$ -თვის დრეკადი გაფანტვის კვეთა  $\sigma_{el}^{(l)}$  მოთავსებულია შემდეგ ინტერვალში:

$$\sqrt{\sigma_0^{(l)} - \sigma_0^{(l)} - \sigma_{inel}^{(l)}} \leq \sqrt{\sigma_{el}^{(l)}} \leq \sqrt{\sigma_0^{(l)}} + \sqrt{\sigma_0^{(l)} + \sigma_{inel}^{(l)}}$$

სადაც  $\sigma_0^{(l)} = \pi k^{-2} (2l+1)$ .

7.23. განიხილეთ დრეკადი გაფანტვა არადრეკადი არხების არსებობის პირობებში, როცა გაფანტვის ამპლიტუდა მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} P_l(\cos \theta)$$

სადაც  $\delta_l(k)$  და  $\eta_l(k)$  ნამდვილი სიდიდეებია და  $0 \leq \eta_l \leq 1$ . მოცემული პარციალური ტალღისათვის  $\sigma_{inelastic}^{(l)}$  არადრეკადი სრული გაფანტვის კვეთის საშუალებით დაადგინეთ  $\sigma_{elastic}^{(l)}$  სრული დრეკადი გაფანტვის კვეთის ქვედა და ზედა ზღვრები.

7.24. გამოთვალეთ გაფანტვის სრული კვეთა  $a$  რადიუსის აბსოლუტურად მშთანთქმელ სფეროზე ( $ka \ll 1$ ).

7.25. დაწერეთ შრედიანგერის განტოლება  $Z_e$  და  $Z_e'$  მუხტების მქონე ნაწილაკისათვის, რომლებიც კულონური პოტენციალით ურთიერთქმედებენ (გამოიყენეთ პარაბოლური კოორდინატები). ჩაწერეთ ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$u(\xi, \eta) = e^{ikz} v(\xi, \eta)$$

და აჩვენეთ, რომ  $r \rightarrow \infty$  ზღვარში  $v(\xi, \eta)$  ასიმპტოტური ამონახსნი არ არის დამოკიდებული  $\eta$ -ზე.

7.26. წინა ამოცანაში:

ა) გამოსახეთ  $v(\xi)$  გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების საშუალებით და იპოვეთ სათავეში რეგულარული ასიმპტოტური გამოსახულება.

ბ) იპოვეთ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა და აჩვენეთ, რომ ის ემთხვევა რეზერფორდის ფორმულას.

7.27. ორი –  $He^+$  იონი ერთმანეთზე იფანტება. იონების ბირთვების სპინი ნულია. იონებს შორის ურთიერთქმედება კულონური პოტენციალით ხორციელდება.

ა) მასათა ცენტრის სისტემაში დაწერეთ გაფანტვის ამპლიტუდა.

ბ) იპოვეთ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა, თუ სისტემის სრული სპინი ნულია (სინგლეთური მდგომარეობა).

7.28. ორი –  $He^+$  იონი ერთმანეთზე იფანტება. იონების ბირთვების სპინი ნულია. იონებს შორის ურთიერთქმედება კულონური პოტენციალით ხორციელდება.

ა) იპოვეთ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა, თუ სისტემის სრული სპინი ერთის ტოლია (ტრიპლეთური მდგომარეობა).

ბ) იპოვეთ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა არაპოლარიზებული იონებისათვის.

7.29. ნეიტრონები იფანტება მძიმე ბირთვზე ისე, რომ ნეიტრონების ტალღის სიგრძე მცირეა ბირთვის  $a$  რადიუსზე ( $ka \gg 1$ ). ამასთან, ყველა ნეიტრონი, რომელიც ეცემა  $l < ka \equiv l_0$  (ანუ  $\rho = \frac{\hbar}{mv} = \frac{\hbar}{k} < a$  სამიზნე მანძილით), შთაინთქმება ბირთვის მიერ, ხოლო  $l > l_0$  მქონე ნეიტრონები არ ურთიერთქმედებენ ბირთვებთან. იპოვეთ დრეკადი გაბნევის კვეთა მცირე კუთხეებზე.

7.30. იპოვეთ ნორმალურ მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ატომებზე სწრაფი ელექტრონების არადრეკადი გაფანტვის კუთხური განაწილება ( $1 \gg \theta > v^{-2}$ ).

7.31.\* იპოვეთ ნორმალურ მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ატომებზე ელექტრონების გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა, რომელსაც თან ახლავს  $n$ -ური ( $n$  მთავარი კვანტური რიცხვია) დისკრეტული დონის აღგზნება.

**მიითითება:** ისარგებლეთ პარაბოლური კოორდინატებით.

7.32. იპოვეთ წყალბადის ატომის პირველი აღგზნებული დონის აღგზნების სრული კვეთა.

7.33.\* იპოვეთ ნორმალურ მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ატომის იონიზაციის კვეთა გარკვეული მიმართულებით მეორადი ელექტრონის გამოტყორცნისას; მეორადი ელექტრონის ენერგია მცირეა პირველადი ელექტრონის ენერგიასთან შედარებით, რის გამოც გაცვლითი ეფექტები უმნიშვნელოა.

**მიითითება:** კვეთის დათვლის დროს ინტეგრალის აღებისას ისარგებლეთ პარაბოლური კოორდინატებით.

7.34. იპოვეთ წყალბადის ატომის მიერ ელექტრონის სრული ეფექტური დამუხრუჭება (ატომურ ერთეულებში); ენერგიის დიდი გადაცემისას, დაჯახებული ელექტრონებიდან უფრო სწრაფი ელექტრონი განიხილება, როგორც პირველადი.

7.35. იპოვეთ ნეიტრონის ბმულ პროტონზე გაბნევის კვეთა (პროტონი განიხილეთ, როგორც  $\omega$  სიხშირის მქონე სივრცული იზოტროპული ოსცილატორი).

7.36. პროტონზე და ნეიტრონზე გაფანტვის ამპლიტუდების საშუალებით გამოსახეთ სწრაფი ნაწილაკის დეიტრონზე დრეკადი გაფანტვის ამპლიტუდა.

7.37.\* განსაზღვრეთ მძიმე მშთანთქავ ბირთვზე სწრაფი დეიტრონის დამოუკიდებელ ნეიტრონად და პროტონად დაშლის კვეთა; ჩათვალეთ, რომ ბირთვის  $R_0$  რადიუსი გაცილებით დიდია დეიტრონის ტალღის სიგრძეზე ( $kR_0 \gg 1, \hbar k$  დეიტრონის იმპულსია) და დეიტრონის რადიუსზე.

**მიითითება:** გამოთვლებისას გამოიყენეთ შემდეგი ფორმულა:

$$\int_0^{\infty} (e^{-\xi} - e^{-2\xi}) \frac{d\xi}{\xi} = \ln 2$$

7.38. აჩვენეთ, რომ, ზოგად შემთხვევაში, არადრეკადი დაჯახებებისას  $\sigma = \sigma_e + \sigma_s$  სრული კვეთა და დრეკადი გაფანტვის ამპლიტუდა  $\theta = 0$  კუთხეზე ერთმანეთთან შემდეგნაირად არიან დაკავშირებული:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0)$$

7.39. აჩვენეთ, რომ ჯამი დრეკადი და არადრეკადი გაფანტვის განივკვეთებისა ტოლია:

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_c = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \text{Re} S_l]$$

7.40.  $\nu_1$  სიჩქარის მქონე  $m_1$  მასის ნაწილაკი არადრეკადად იფანტება  $m_2$  მასის უძრავ ნაწილაკზე ლაბორატორიულ სისტემაში (ამასთან,  $m_2 > m_1$ ) და წარმოიქმნება  $m_3$  და  $m_4$  მასებით.

ა) იპოვეთ  $m_3$ -ის გაფანტვის კუთხეებს შორის კავშირი ინერციის ცენტრისა და ლაბორატორიულ სისტემებში.

ბ) იპოვეთ  $m_3$ -ის გაფანტვის დიფერენციალურ კვეთებს შორის კავშირი ინერციის ცენტრისა და ლაბორატორიულ სისტემებში.

## ნაწილი II. რელატივისტური კვანტური მექანიკა

რელატივისტურ არეში ფიზიკური მოვლენები იმით გამოირჩევა, რომ ნაწილაკების ურთიერთქმედებისას შესაძლებელი ხდება მათი ურთიერთგარდაქმნა (დაბადება და ანიჰილაცია). ამიტომ გარეშე ველში ერთნაწილაკოვან განხილვას გარკვეული შეზღუდვები ედება და კოორდინატულ წარმოდგენაში აზრს კარგავს ტალღური ფუნქციის ჩვეულებრივი კვანტურ-მექანიკური გაგება. მართლაც,  $\Delta x \Delta p \geq \hbar$  ჰაიზენბერგის განუზღვრელობის თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ ნაწილაკის ლოკალიზაციას სივრცის მცირე  $\Delta x \leq \hbar / mc$  არეში თან ახლავს ნაწილაკისათვის დიდი ენერჯიის გადაცემა და შესაძლებელი ხდება ახალი ნაწილაკების დაბადება, რის გამოც ერთნაწილაკოვანი ამოცანა აზრს კარგავს. თეორიის რელატივისტური ინვარიანტობის შესანარჩუნებლად ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობების აღწერა ხდება ტალღური ფუნქციებით, რომელთაც გარკვეული ტრანსფორმაციული თვისებები გააჩნიათ ლორენცის გარდაქმნების მიმართ. ეს თვისებები კი (და ასევე შესაბამისი ტალღური განტოლებები) დამოკიდებულია ნაწილაკის სპინზე.

### თავი 1. ლორენცისა და კვანტარეს სიმეტრიები

$M_4$  მინკოვსკის სივრცე წარმოადგენს ნამდვილ ვექტორულ სივრცეს, რომელშიც განმარტებულია მეტრიკული ტენზორი:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

ვექტორები შემდეგი ფორმით ჩაიწერება:  $\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$ , სადაც  $x^\mu$  წარმოადგენს  $\mathbf{x}$  ვექტორის კონტრავარიანტულ კომპონენტებს შემდეგ ბაზისში:

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$M_4$  სივრცეში ვექტორის სიგრძის კვადრატია  $x^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu\nu}$ . ინტერვალის კვადრატის კი შემდეგნაირად განიმარტება:

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu\nu} = c^2 t^2 - x^2 \quad (1.3)$$

ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტები ასე განიმარტება:  $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ .

ლორენცის გარდაქმნები:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.4)$$

უცვლელს ტოვებს ვექტორის სიგრძის კვადრატს, ანუ  $x'^2 = x^2$ .  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  მუდმივი მატრიცაა. კოვარიანტული კომპონენტები კი გარდაიქმნებიან შემდეგნაირად:

$$x'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \quad (1.5)$$

მხებ სივრცეში (მხები სივრცე წარმოადგენს დრო-სივრცის ყოველ ნერტილ-თან ასოცირებულ მხები ვექტორების სივრცეს) ნებისმიერი ვექტორი ასე ჩაინერება:  $u = u^{\mu} e_{\mu}$ , სადაც  $u^{\mu}$  ამ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტებია. დუალური ბაზისი  $\theta^{\mu}$  ასე განიმარტება:  $\theta^{\mu}(e_{\nu}) = \delta^{\mu}_{\nu}$ . ვექტორებს დუალურ სივრცეში  $\omega = \omega_{\mu} \theta^{\mu}$  დუალური ვექტორები ეწოდება. დუალური ვექტორების კომპონენტები (1.5) კანონით გარდაიქმნებიან.  $u$  და  $v$  ვექტორების სკალარული ნამრავლი განიმარტება ასე:

$$u \cdot v = g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu} = u^{\mu} v_{\mu} \quad (1.6)$$

$(m, n)$  რანგის ტენზორი მინკოვსკის სივრცეში კი – ასე:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x) e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_m} \otimes \theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta^{\nu_n} \quad (1.7)$$

ლორენცის გარდაქმნების მიმართ ამ ტენზორის კომპონენტები შემდეგნაირად გარდაიქმნებიან:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x') = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\rho_m} (\Lambda^{-1})^{\sigma_n}_{\nu_n} T^{\rho_1 \dots \rho_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}(x) \quad (1.8)$$

კონტრავარიანტული ვექტორი  $(1,0)$ , ხოლო კოვარიანტული ვექტორი  $(0,1)$  რანგის ტენზორია; მეტრიკული ტენზორი კი –  $(0,2)$  რანგის სიმეტრიული ტენზორია.

$(\Lambda, a)$  პუანკარეს (ან, როგორც ხშირად უწოდებენ, არაერთგვაროვანი ლორენცის) გარდაქმნები მოიცავს ლორენცის გარდაქმნებს და ტრანსლაციებს, ანუ:

$$(\Lambda, a)x = \Lambda x + a. \quad (1.9)$$

(1.9) გარდაქმნები ყველაზე უფრო ზოგადი გარდაქმნებია მინკოვსკის სივრცეში, რომლებიც არ ცვლიან ინტერვალს ნებისმიერ ორ ოთხვექტორს შორის, ანუ:

$$(y' - x')^2 = (y - x)^2 \quad (1.10)$$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  ლევი-ჩივიტას ტენზორი სრულიად ანტისიმეტრიული ტენზორია, ამასთან,  $\epsilon^{0123} = 1$ .

1.1. აჩვენეთ, რომ ლორენცის გარდაქმნები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:

$$\Lambda^T g \Lambda = g.$$



1.2. აჩვენეთ, რომ ლორენცის გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს.

1.3. აჩვენეთ, რომ უსასრულოდ მცირე ლორენცის გარდაქმნებში  $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$ , ინფინიტიზიმული პარამეტრები  $\omega_{\mu\nu}$  ანტისიმეტრიულია.

1.4. შეამოწმეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = A^\alpha_\mu A^\beta_\nu A^\gamma_\lambda A^\delta_\sigma = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \det A$$

$A^\alpha_\mu$  არის  $A$  მატრიცის მატრიცული ელემენტები.

1.5. აჩვენეთ, რომ  $\delta$  კრონეკერის სიმბოლო და  $\epsilon$  ლევი-ჩივიტას სიმბოლო ლორენცის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტებს წარმოადგენენ.

1.6. შეამოწმეთ, რომ:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma & \delta^\mu_\delta \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma & \delta^\nu_\delta \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma & \delta^\rho_\delta \\ \delta^\sigma_\alpha & \delta^\sigma_\beta & \delta^\sigma_\gamma & \delta^\sigma_\delta \end{vmatrix}$$

1.7. გამოთვალეთ სიდიდეები:

ა)  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\beta\gamma\delta}$ ; ბ)  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\gamma\delta}$

1.8. გამოთვალეთ სიდიდეები:

ა)  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\beta\rho\delta}$ ; ბ)  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$

1.9. შემოიღეთ აღნიშვნები:  $\sigma^\mu = (I, \vec{\sigma})$ ;  $\bar{\sigma}^\mu = (I, -\vec{\sigma})$ , სადაც  $I$  ერთეულოვანი მატრიცაა, ხოლო  $\vec{\sigma}$  პაულის მატრიცებია და განმარტეთ შემდეგი მატრიცა  $X = x_\mu \sigma^\mu$ . აჩვენეთ, რომ გარდაქმნა:

$$X \rightarrow X' = SXS^+$$

სადაც  $S \in SL(2, C)$  (აქ  $SL(2, C)$  მეორე რანგის ერთეულოვანი დეტერმინანტის მქონე კომპლექსური მატრიცებია), აღწერს  $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  ლორენცის გარდაქმნას.

1.10. აჩვენეთ, რომ წინა ამოცანაში შემოღებული მატრიცები აკმაყოფილებენ პირობას:  $x^\mu = \frac{1}{2} tr(\bar{\sigma}^\mu X)$

1.11. აჩვენეთ, რომ:  $\Lambda^\mu_\nu = \frac{1}{2} tr(\bar{\sigma}^\mu S \sigma_\nu S^+)$  და  $\Lambda(S) = \Lambda(-S)$ .

1.12.\* იპოვეთ ლორენცის ჯგუფის  $M_{\mu\nu}$  გენერატორების მატრიცული ელემენტები მათ (1.4) ნატურალურ წარმოდგენაში.

**მითითება:** ისარგებლეთ ფაქტით, რომ ლორენცის ნებისმიერი გარდაქმნა, რომელიც დაკავშირებულია ერთეულოვან ელემენტთან, შეიძლება ჩანერილ იქნეს შემდეგი სახით:  $U(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}\right)$ , სადაც  $M_{\mu\nu}$  გენერატორებია.

1.13. აჩვენეთ, რომ ლორენცის ალგებრის კომუტაციურ თანაფარდობებს:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})$$

მივყავართ შემდეგ თანაფარდობებამდე:

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijl} M_l; [N_i, N_j] = -i\epsilon_{ijl} N_l; [M_i, N_j] = i\epsilon_{ijl} N_l$$

სადაც

$$M_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk} \quad \text{და} \quad N_k = M_{k0}$$

1.14. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijl} A_l; [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijl} B_l; [A_i, B_j] = 0$$

სადაც

$$A_i = \frac{1}{2} (M_i + iN_i); B_i = \frac{1}{2} (M_i - iN_i)$$

1.15.  $(\Lambda, a)$  პუანკარეს გარდაქმნა განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu} + a^{\mu}$$

განმარტეთ გამრავლების წესი, ანუ  $(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2)$  და ასევე ჯგუფის ერთეულოვანი და შებრუნებული ელემენტები.

1.16. პუანკარეს ჯგუფისათვის შეამოწმეთ, რომ სამართლიანია გამრავლების შემდეგი წესი:

$$U^{-1}(\Lambda, 0)U(1, \epsilon)U(\Lambda, 0) = U(1, \Lambda^{-1}\epsilon)$$

1.17. წინა – 1.15 ამოცანაზე დაყრდნობით აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$U^{-1}(\Lambda, 0)P_{\mu}U(\Lambda, 0) = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} P_{\nu}$$

1.18. გამოთვალეთ კომუტატორი  $[M_{\mu\nu}, P_{\rho}]$ .

1.19. აჩვენეთ, რომ:

$$U^{-1}(\Lambda, 0)U(\Lambda', 0)U(\Lambda, 0) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda, 0)$$

1.20. გამოთვალეთ კომუტატორი:  $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$ .

1.21. აჩვენეთ, რომ ტრანსლაციის გენერატორები კომუტირებენ, ანუ:

$$[P_\mu, P_\mu] = 0$$

1.22. განიხილეთ ნარმოდგენა, რომელშიც მინკოვსკის სივრცეში  $x$  ვექტორებია  $(x, 1)^T$ , ხოლო პუანკარეს ჯგუფის ელემენტებს  $(\Lambda, a)$  ნარმოადგენენ  $5 \times 5$  მატრიცები:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

შეამოწმეთ, რომ ამ ნარმოდგენის გენერატორები აკმაყოფილებდნენ 1.17, 1.19, 1.20 ამოცანებში განხილულ კომუტაციურ თანაფარდობებს.

1.23. კლასიკური სკალარული ველის ნარმოდგენაში (სკალარული ველი შემდეგნაირად გარდაიქმნება:  $\Phi(\Lambda x + a) = \Phi(x)$ ) იპოვეთ პუანკარეს ჯგუფის გენერატორები. შეამოწმეთ, რომ გენერატორები აკმაყოფილებდნენ 1.17, 1.19, 1.20 ამოცანებში განხილულ კომუტაციურ თანაფარდობებს.

1.24. პაული-ლუბარსკის ვექტორი განმარტებულია შემდეგნაირად:  $W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\nu\lambda} P^\sigma$ .

აჩვენეთ, რომ:  $W_\mu P^\mu = 0$  და  $[W_\mu, P_\nu] = 0$ .

1.25. შეამოწმეთ, რომ სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$W^2 = -\frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} P^2 + M_{\mu\sigma} M^{\nu\sigma} P^\mu P_\nu$$

1.26.\* შეამოწმეთ, რომ  $P^2$  და  $W^2$  ოპერატორები, რომელთაც კაზიმირის ოპერატორები ეწოდებათ, კომუტირებენ პუანკარეს ჯგუფის გენერატორებთან.

**მიითითება:** გამოიყენეთ 1.17, 1.19 და 1.24 ამოცანების შედეგები.

1.27.\* აჩვენეთ, რომ:

$$W^2 | \vec{p} = 0, m, s, \sigma \rangle = -m^2 s(s+1) | \vec{p} = 0, m, s, \sigma \rangle$$

სადაც  $| \vec{p} = 0, m, s, \sigma \rangle$  ნარმოადგენს  $m$  მასის,  $\vec{p}$  იმპულსის,  $s$  სპინის მქონე ნაწილაკის მდგომარეობის ვექტორს. მასა და სპინი ახდენს პუანკარეს ჯგუფის დაუყვანადი ნარმოდგენის კლასიფიკაციას.

**მიითითება:** გამოიყენეთ 1.24 ამოცანის შედეგი და ის ფაქტი, რომ:

$$P^\mu |p^\mu, s, \sigma\rangle = p^\mu |p^\mu, s, \sigma\rangle$$

1.28. შეამოწმეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$[M_{\mu\nu}, W_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}W_\mu - g_{\mu\sigma}W_\nu)$$

1.29. შეამოწმეთ, სამართლიანია თუ არა ტოლობა:

$$[W_\mu, W_\nu] = -i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\sigma P^\rho$$

1.30. გამოთვალეთ შემდეგი კომუტატორები:

ა)  $[W_\mu, M^2]$

ბ)  $[M_{\mu\nu}, W^\mu W^\nu]$

1.31. გამოთვალეთ შემდეგი კომუტატორები:

ა)  $[M^2, P_\mu]$

ბ)  $[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma}, M_{\alpha\beta}]$

1.32. მასიური ნაწილაკისათვის სტანდარტული იმპულსია  $(m, 0, 0, 0)$ , აჩვენეთ, რომ მცირე ჯგუფი ამ შემთხვევაში არის  $SU(2)$ .

1.33. უმასო ნაწილაკისათვის სტანდარტული იმპულსია  $(k, 0, 0, k)$ . აჩვენეთ, რომ მცირე ჯგუფი ამ შემთხვევაში არის სიბრტყეში მობრუნებებისა და ტრანსლაციების ჯგუფი  $E(2)$ .

1.34. \*აჩვენეთ, რომ კონფორმული გარდაქმნები:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = e^{-\rho} x^\mu$$

სპეციალური კონფორმული გარდაქმნები

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + c^\mu x^2}{1 + 2c \cdot x + c^2 x^2}$$

და ჩვეულებრივი პუანკარეს გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს.

**მიითითება:** გამოიყენეთ ფაქტი, რომ ამ ჯგუფის ელემენტები შემდეგნაირად შეიძლება ჩაინეროს:

$$U(\omega, \varepsilon, \rho, c) = \exp i \left( P_\mu \varepsilon^\mu - \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \rho D + c_\mu K^\mu \right)$$

სადაც  $D$  არის დილატაციის ჯგუფის გენერატორი, ხოლო  $K^\mu$  წარმოადგენს სპეციალური კონფორმული გარდაქმნის 4 გენერატორს.

1.35. იპოვეთ წინა – 1.33 ამოცანის შემთხვევაში კომუტაციური თანაფარდობანი.

## თავი 2. კლეინ-გორდონის განტოლება

უსპინო ნაწილაკისათვის  $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(x)$  ტალღური ფუნქცია ერთკომპონენტიანი სიდიდეა და წარმოადგენს ოთხგანზომილებიან სკალარს ანუ, ლორენცის გარდაქმნებისას,  $\Psi'(\Lambda x) = \Psi(x)$ . ამგვარი თავისუფალი ნაწილაკები აღინერება კლეინ-გორდონის განტოლებით:

$$(p^2 + m^2 c^2) \Psi(x) = 0 \quad (II.1)$$

გაშლილი სახით:

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Psi \quad (II.2)$$

$e$  მუხტის მქონე უსპინო ნაწილაკის ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრაობისას (რომელიც აღინერება  $A^\mu(\varphi, \vec{A})$  ოთხპოტენციალით), (II.1) და (II.2) განტოლებებში უნდა მოვახდინოთ შემდეგი შეცვლა:  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$ , ანუ გვექნება:

$$\frac{1}{c^2} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right)^2 \Psi = \left[ \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2 c^2 \right] \Psi \quad (II.3)$$

საიდანაც გამომდინარეობს უწყვეტობის განტოლება:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (II.4)$$

სადაც

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar} \varphi \Psi^* \Psi \right) \quad (II.5)$$

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* - \frac{2ie}{\hbar} \vec{A} \Psi^* \Psi \right) \quad (II.6)$$

ცენტრალური სიმეტრიის მქონე  $V(r)$  პოტენციალისათვის კლეინ-გორდონის რადიალურ განტოლებას  $R(r)$  ფუნქციისათვის შემდეგი სახე აქვს:

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left[ (E - V)^2 - m^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (II.7)$$

დაყვანილი რადიალური განტოლება  $u(r) = rR(r)$  ფუნქციისათვის ასე გამოიყურება:

$$u'' + \left[ (E - V)^2 - m^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0 \quad (II.8)$$

2.1. ამოხსენით კლეინ-გორდონის განტოლება.

2.2. აჩვენეთ, რომ კლეინ-გორდონის განტოლება ლორენც-ინვარიანტულია.

2.3. გამოთვალეთ შემდეგი სიდიდე:

$$Q = iq \int dV \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right)$$

სადაც  $\phi$  არის კლეინ-გორდონის განტოლების ამონახსნი.

2.4. თავისუფალი ნამდვილი სკალარული ველის ჰამილტონიანს შემდეგი სახე აქვს:

$$H = \frac{1}{2} \int dV [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

კლეინ-გორდონის განტოლების ზოგადი ამონახსნისათვის გამოითვალეთ  $H$  ჰამილტონიანი.

2.5. ნამდვილი სკალარული ველის იმპულსს შემდეგი სახე აქვს:

$$\vec{P} = - \int dV \partial_0 \phi \nabla \phi$$

კლეინ-გორდონის განტოლების ზოგადი ამონახსნისათვის გამოითვალეთ  $\vec{P}$  მომენტი.

2.6. აჩვენეთ, რომ დენის სიმკვრივე:

$$j_\mu = -\frac{i}{2} (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi)$$

აკმაყოფილებს უწყვეტობის განტოლებას:

$$\partial^\mu j_\mu = 0$$

2.7. აჩვენეთ, რომ  $\partial_\mu j^\mu = 0$  უწყვეტობის განტოლებას აკმაყოფილებს შემდეგი დენი:

$$j_\mu = -\frac{i}{2} (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) - q A_\mu \phi^* \phi$$

სადაც  $\phi$  არის კლეინ-გორდონის განტოლების ამონახსნი  $A_\mu$  პოტენციალის მქონე გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში.

2.8. აჩვენეთ, რომ არარელატივისტურ ზღვარში ამ თავის შესავალი ნაწილის (II.8) კლეინ-გორდონის განტოლებიდან შრედინგერის განტოლება მიიღება.

2.9. აჩვენეთ, რომ კლეინ-გორდონის განტოლების ალბათობის სიმკვრივიდან არარელატივისტურ ზღვარში შრედინგერის განტოლების  $\rho = \psi^* \psi$  სიმკვრივე მიიღება.

2.10. იპოვეთ ენერჯის დონეები კლეინ-გორდონის განტოლებაში უსასრულოკედლებიან სწორკუთხა ორმოში, რომლისთვისაც პოტენციალს შემდეგი სახე აქვს:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0 \\ \infty, & r > r_0 \end{cases}$$

2.11.\* სკალარული ნაწილაკი  $s$  მდგომარეობაში მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ველში:

$$qA^0 = \begin{cases} -V, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

სადაც  $V$  დადებითი მუდმივაა. იპოვეთ დისპერსიული თანაფარდობა, ანუ ბმული მდგომარეობებისათვის კავშირი ენერჯიასა და იმპულსს შორის. რა პირობა უნდა კმაყოფილდებოდეს, რომ  $V < 2m$  შემთხვევაში არსებობდეს მხოლოდ ერთი ბმული მდგომარეობა?

2.12.\* იპოვეთ ენერჯის სპექტრი და ტალღური ფუნქციები მუდმივ მაგნიტურ  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  ველში მოძრავი სკალარული ნაწილაკისათვის.

2.13.\* გამოთვალეთ არეკვლისა და გაჟონვის კოეფიციენტები  $E$  ენერჯის და  $q$  მუხტის მქონე სკალარული ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ველში:

$$A^0 = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ U_0, & z > 0 \end{cases}$$

სადაც  $U_0$  დადებითი მუდმივაა.

2.14.\*  $q$  მუხტისა და  $m$  მასის ნაწილაკი გადის შემდეგ პოტენციალურ ბარიერში:

$$A^0 = \begin{cases} 0, & z < 0, z > a \\ U_0, & 0 < z < a \end{cases}$$

სადაც  $U_0$  დადებითი მუდმივაა. იპოვეთ გაჟონვის კოეფიციენტი. ასევე იპოვეთ ნაწილაკის ენერჯია, რომლისთვისაც გაჟონვის კოეფიციენტი ერთის ტოლია.

2.15.\* იპოვეთ დამუხტული  $\pi^-$  პი-მეზონის ენერჯის დონეები კულონურ ველში, რომელსაც ქმნის  $Ze$  მუხტის მქონე ბირთვი.

2.16.\* ამოხსენით კლეინ-გორდონის განტოლება:

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}$$

სკალარული კულონური პოტენციალისათვის.

2.17.\* ბირთული ძალების ასახსნელად, 1935 წელს იუკავამ დაუშვა, რომ ნუკლონებს შორის ბირთვული ძალები წარმოიქმნება  $m$  მასის მქონე პიონების გაცვლების შედეგად. წყაროს (ბირთვული მუხტის) შემცველი კლეინ-გორდონის არაერთგვაროვანი განტოლების საშუალებით იპოვეთ ბირთვული პოტენციალი, რომელსაც ქმნის  $g$  ბირთვული მუხტის მქონე უძრავი ნუკლონი ( $g$  ძლიერი ბირთვული ურთიერთქმედების მუდმივაა, რომელიც ელექტრული მუხტის ანალოგია).

2.18.\*  $l = 0$  შემთხვევისათვის ამოხსენით კლეინ-გორდონის განტოლება:

$$V(r) = -Z\alpha e^{-\frac{r}{a}}$$

ექსპონენციალური პოტენციალისათვის.

2.19.  $\begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix}$  ორკომპონენტიანი ტალღური ფუნქციის გამოყენებით, სადაც:

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \phi + \frac{i}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right); \quad \chi = \frac{1}{2} \left( \phi - \frac{i}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

ჩანერეთ კლეინ-გორდონის განტოლება შრედინგერის განტოლების ფორმით.

2.20.\* იპოვეთ წინა ამოცანის ჰამილტონიანის ენერჯიის საკუთარი მნიშვნელობები; იპოვეთ ამ ჰამილტონიანის არარელატივისტური ზღვარი.

2.21. იპოვეთ სიჩქარის ოპერატორი:  $\vec{v} = i[H, \vec{x}]$ , სადაც  $H$  არის 2.12 ამოცანის ჰამილტონიანი; იპოვეთ  $\vec{v}$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები.

2.22. ორკომპონენტიანი ტალღური ფუნქციების სივრცეში სკალარული ნამრავლი განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2} \int dV \psi_1^+ \sigma_3 \psi_2$$

ა) აჩვენეთ, რომ: (2.15) ამოცანის ჰამილტონიანი ერმიტულია.

ბ)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx}$  მდგომარეობაში იპოვეთ  $\langle H \rangle$  ჰამილტონიანის და  $\langle \vec{v} \rangle$  სიჩქარის საშუალოები.

2.23.\* თავისუფალი ნაწილაკისათვის კლეინ-გორდონის განტოლებიდან მიიღეთ:

ა) არარელატივისტურ ზღვარში შრედინგერის განტოლება.

ბ) მიიღეთ რელატივისტური შესწორება პირველ რიგში.

2.24. მუდმივ ელექტრომაგნიტურ ველში მოთავსებული დამუხტული ნაწილაკისათვის კლეინ-გორდონის განტოლებიდან არარელატივისტურ ზღვარში მიიღეთ შრედინგერის განტოლება.



2.25.\* იპოვეთ წინა ამოცანაში ნაწილაკის ჰამილტონიანის  $\frac{1}{c^2}$  რიგის რელატივისტური შესწორება.

2.26.\* იპოვეთ წინა ამოცანაში  $\frac{1}{c^4}$  რიგის რელატივისტური შესწორება და აჩვენეთ, რომ ეს შესწორება შეიცავს წევრებს, რომლებიც განსხვავდებიან:

$$H = \sqrt{c^2 \left( \hat{p} - \frac{e\hat{A}}{c} \right)^2} + m^2 c^4 + e\phi - mc^2$$

ჰამილტონიანის გაშლის წევრებისაგან.

2.27.\* აჩვენეთ, რომ საკმარისად ძლიერ ელექტრომაგნიტურ ველში დამუხტული უსპინო ნაწილაკი მუხტის ნიშნისგან დამოუკიდებლად განიცდის მიზიდვას (კვანტურ-მექანიკური აზრით).

2.28.\* იპოვეთ ბორნის მიახლოებაში  $Ze$  მუხტის მქონე უსასრულოდ მძიმე ბირთვის კულონურ ველში რელატივისტური  $e_1$  მუხტის მქონე უსპინო ნაწილაკის გაფანტვის ამპლიტუდა და დიფერენციალური კვეთა. მიღებული შედეგები შეადარეთ არარელატივისტურ შემთხვევას და მიუთითეთ მათი გამოყენებადობის პირობები.

2.29.\* იპოვეთ ბორნის მიახლოებაში  $\phi(r)$  გარეშე ელექტროსტატიკურ ველში დამუხტული უსპინო ნაწილაკის  $\sigma(\mathcal{E})$  გაფანტვის კვეთის ენერგიაზე დამოკიდებულების სახე  $\mathcal{E} \rightarrow \infty$  ზღვარში.

მიუთითეთ მიღებული შედეგის გამოყენებადობის პირობები და შეადარეთ ისინი არარელატივისტურ შემთხვევას.

2.30.\* იპოვეთ ბორნის მიახლოებაში  $U(r)$  გარეშე სკალარულ ველში უსპინო ნაწილაკის  $\sigma(\mathcal{E})$  გაფანტვის კვეთის ენერგიაზე დამოკიდებულების სახე  $\mathcal{E} \rightarrow \infty$  ზღვარში.

### თავი 3. დირაკის მატრიცები

$M_4$  მინკოვსკის სივრცეში,  $\gamma$  მატრიცები აკმაყოფილებენ ანტიკომუტაციურ თანაფარდობებს:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (III.1)$$

დირაკის წარმოდგენაში  $\gamma$  მატრიცებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (III.2)$$

$\gamma$  მატრიცების სხვა წარმოდგენები მიიღება  $\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$  უნიტარული გარდაქმნებით.

ვეილის წარმოდგენაში  $\gamma$  მატრიცებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (III.3)$$

ხოლო მაიორანას წარმოდგენაში:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix} \quad (III.4)$$

$\gamma^5$  მატრიცა შემდეგნაირად განიმარტება  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , ხოლო  $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ . დირაკის წარმოდგენაში:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (III.5)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ არსებობს დირაკის მატრიცების სხვა აღნიშვნებიც, რომელსაც განვიხილავთ IV თავში.

$\sigma_{\mu\nu}$  მატრიცები ასე განიმარტება:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (III.6)$$

შემოდის ასეთი განმარტებაც:

$$\hat{a} = \not{a} = a^\mu \gamma_\mu \quad (III.7)$$

ზოგჯერ ხმარობენ ასეთ აღნიშვნებსაც:

$$\beta = \gamma_0, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}. \quad (III.8)$$

ამ აღნიშვნებში (III.1) ანტიკომუტაციური თანაფარდობები ასე ჩაინერება:

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij} \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0 \quad (\text{III.9})$$

3.1. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\gamma_\mu^+ = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0$$

3.2. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\sigma_{\mu\nu}^+ = \gamma^0 \sigma_{\mu\nu} \gamma^0$$

3.3. შეამოწმეთ, რომ  $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = i[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$  გამოსახულება აკმაყოფილებდეს შემდეგ თანაფარდობას:

$$[\gamma^\nu, \hat{\sigma}_{\alpha\beta}] = 2i(g^\nu{}_\alpha \gamma_\beta - g^\nu{}_\beta \gamma_\alpha)$$

3.4. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\gamma_5^+ = \gamma_5 = \gamma^5 = \gamma_5^{-1}$$

3.5. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$$

3.6. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

ა)  $(\gamma_5)^2 = 1$

ბ)  $(\gamma_5 \gamma_\mu)^+ = \gamma^0 \gamma_5 \gamma_\mu \gamma^0$

3.7. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

3.8. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0$$

3.9. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$a^2 = a^2$$

3.10. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები  $\gamma$  მატრიცების შემდეგი კომბინაციებისათვის:

ა)  $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$ ; ბ)  $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu$

3.11. აჩვენეთ, რომ:  $\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta}$

- 3.12. აჩვენეთ, რომ:  $\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\alpha$
- 3.13. აჩვენეთ, რომ:  $\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 12$
- 3.14. აჩვენეთ, რომ:  $\gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^5 = -4$
- 3.15. აჩვენეთ, რომ:  $\sigma_{\alpha\beta} \gamma_\mu \sigma^{\alpha\beta} = 0$
- 3.16. აჩვენეთ, რომ:  $\sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} = -4\sigma^{\mu\nu}$  ;
- 3.17. აჩვენეთ, რომ:  $\sigma^{\alpha\beta} \gamma^5 \gamma^\mu \sigma_{\alpha\beta} = 0$  ;
- 3.18. აჩვენეთ, რომ:  $\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = 12\gamma_5$
- 3.19. აჩვენეთ, რომ  $\vec{\gamma}$  მატრიცები ერმიტულია.
- 3.20. აჩვენეთ, რომ:  $\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\delta_{ik}$  (1)
- 3.21. გამოსახეთ  $\alpha$  მატრიცები  $\gamma$  მატრიცებით.
- 3.22. გამოსახეთ  $\gamma$  მატრიცები პაულის მატრიცებით.
- 3.23. აჩვენეთ, რომ  $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$  მატრიცა ტოლია  $-\rho_1$  მატრიცის და  $\gamma_5^2 = 1$
- 3.24. აჩვენეთ, რომ  $\gamma_5$  მატრიცა გადასვამს ტალღური ფუნქციის კომპონენტებს და პირველი და მეორე ორი კომპონენტის ლუნობას ცვლის საწინააღმდეგოთი.
- 3.25. აჩვენეთ, რომ:  $\gamma_5 = i\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  .
- 3.26. დაამტკიცეთ, რომ  $\gamma_5$  მატრიცა დირაკის მატრიცებიდან ერთადერთი მატრიცაა, რომელიც  $\gamma$  მატრიცების ნამრავლთან კომუტატორი ან ანტიკომუტატორია, იმის მიხედვით,  $\gamma$  მატრიცების რიცხვი ლუწია თუ კენტი.
- 3.27. დაამტკიცეთ, რომ  $1, \beta, \bar{\sigma}$  და  $\beta\bar{\sigma}$  მატრიცები (ე.წ. ლუწი მატრიცები) ტალღური ფუნქციის კომპონენტებს არ გადასვამენ, ე.ი. ზედა ორ და ქვედა ორ კომპონენტს ერთმანეთში არ ურევენ, ხოლო  $\bar{\alpha}, \beta\bar{\alpha}, \gamma_5 = -i\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  და  $\beta\gamma_5$  მატრიცები (ე.წ. კენტი მატრიცები) გადასვამენ ტალღური ფუნქციის კომპონენტებს.
- 3.28. დაადგინეთ, როგორ მოქმედებენ  $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$  სპინური ოპერატორები  $\sigma_3$  ოპერატორის საკუთარ ფუნქციებზე.
- 3.29. გაამარტივეთ გამოსახულება:  $\sigma_i \sigma_k \sigma_l$
- 3.30. დაამტკიცეთ, რომ:
- ა)  $\gamma_0 \hat{p}^+ \gamma_0 = \hat{p}$  ; ბ)  $\hat{p}^2 = p^2$

3.31. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა)  $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

ბ)  $\gamma_\mu \hat{A} + \hat{A} \gamma_\mu$

3.32. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\gamma_\mu \hat{A} R \gamma_\mu + \hat{A} \gamma_\mu R \gamma_\mu = 2R\hat{A}$$

სადაც  $R$  ნებისმიერი კომბინაციაა  $\gamma$  მატრიცების.

3.33. წინა, 3.32-ე ამოცანის შედეგზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

ა)  $\gamma_\mu \hat{A} \gamma_\mu = -2\hat{A}$

ბ)  $\gamma_\mu \hat{A}\hat{B} \gamma_\mu = 4(AB)$

3.34. 3.32-ე ამოცანის შედეგზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

ა)  $\gamma_\mu \hat{A}\hat{B}\hat{C} \gamma_\mu = -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}$

ბ)  $\gamma_\mu \hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D} \gamma_\mu = 2(\hat{D}\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{B}\hat{A}\hat{D})$

3.35. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა)  $\gamma_\mu \hat{A} \gamma_\nu \hat{B} \hat{C} \gamma_\nu \hat{D} \gamma_\mu$

ბ)  $\gamma_\nu \hat{C} \gamma_\mu \hat{A} \hat{B} \hat{C} \gamma_\mu \hat{A} \gamma_\nu$

3.36. გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა)  $\gamma_\nu (1 + \gamma_5) \hat{A} \hat{B} \hat{C} (1 + \gamma_5) \gamma_\mu$

ბ)  $\gamma_\mu \hat{A} (1 + \gamma_5) \hat{B} (1 - \gamma_5) \gamma_\mu$

3.37. გამოსახეთ  $\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\sigma} \mathcal{E}_{\mu\nu\rho\tau}$  სიდიდე ორი მეტრიკული ტენზორის ნამრავლების ჯამის საშუალებით.

3.38. გამოთვალეთ შემდეგი გამოსახულება:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\sigma} \mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\rho}$$

3.39. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = a g_{\mu\nu} \gamma_\lambda + b g_{\mu\lambda} \gamma_\nu + c g_{\nu\lambda} \gamma_\mu + i d \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5$$

და იპოვეთ  $a, b, c, d$  კოეფიციენტები.

3.40. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\mu = A g_{\mu\nu} \gamma_\lambda + B g_{\mu\lambda} \gamma_\nu + C g_{\nu\lambda} \gamma_\mu + i D \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5$$

და იპოვეთ  $A, B, C, D$  კოეფიციენტები.

3.41. აჩვენეთ, რომ  $\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = -i \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma_\lambda \gamma_\sigma$

3.42. იპოვეთ შპური  $Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0$

3.43. იპოვეთ შპური  $Sp(\vec{\sigma}^0 \vec{A})(\vec{\sigma}^0 \vec{B})$

3.44. იპოვეთ შპური  $Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0 \sigma_l^0$

3.45. იპოვეთ შპური  $Sp(\vec{\sigma}^0 \vec{A})(\vec{\sigma}^0 \vec{B})(\vec{\sigma}^0 \vec{C})$

3.46. იპოვეთ შპური  $Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0 \sigma_l^0 \sigma_m^0$

3.47. იპოვეთ შპური  $Sp \vec{\sigma}^0 (\vec{\sigma}^0 \vec{A})(\vec{\sigma}^0 \vec{B})(\vec{\sigma}^0 \vec{C})$

3.48. აჩვენეთ, რომ:  $Sp \alpha_j \alpha_k = Sp \gamma_i \gamma_k = Sp \sigma_i \sigma_k = 4 \delta_{jk}$

3.49. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\vec{A}$  და  $\vec{B}$  ვექტორები კომუტირებენ  $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$  და  $\vec{\sigma}$  მატრიცებთან, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$Sp((\vec{\alpha} \vec{A})(\vec{\alpha} \vec{B})) = Sp((\vec{\gamma} \vec{A})(\vec{\gamma} \vec{B})) = Sp((\vec{\sigma} \vec{A})(\vec{\sigma} \vec{B})) = 4(\vec{A} \vec{B})$$

3.50. იპოვეთ შპური  $Sp(\alpha_j \alpha_k \alpha_l)$

3.51. იპოვეთ შპური  $Sp(\alpha_j \alpha_k \alpha_l \alpha_m)$

3.52. იპოვეთ შპური  $Sp\{\vec{\alpha}(\vec{\alpha} \vec{A})(\vec{\alpha} \vec{B})(\vec{\alpha} \vec{C})\}$

3.53. იპოვეთ შპური  $Sp(\alpha_j \alpha_k \sigma_l)$

3.54. იპოვეთ შპური  $Sp \vec{\sigma}(\vec{\alpha} \vec{A})(\vec{\alpha} \vec{B})$

3.55. იპოვეთ შპური  $Sp(\vec{\alpha} \vec{A})(\vec{\alpha} \vec{B})(\vec{\sigma} \vec{C})$

3.56. დაამტკიცეთ, რომ:  $Sp(\alpha_j \alpha_k \alpha_m \alpha_l) = Sp(\alpha_j \alpha_k \sigma_m \sigma_l)$

3.57. იპოვეთ შპური  $Sp(\alpha_j \alpha_k \sigma_l \sigma_m)$

3.58. აჩვენეთ, რომ შპური კენტი რაოდენობის  $\gamma$  მატრიცებისათვის ნულის ტოლია.

3.59. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი რეკურსიული ფორმულა  $n$  ( $n$  ლუწი რიცხვია)  $\gamma$  მატრიცისათვის:

$$Sp \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n} = g_{\mu_1 \mu_2} Sp \gamma_{\mu_3} \dots \gamma_{\mu_n} - g_{\mu_1 \mu_3} Sp \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \dots \gamma_{\mu_n} + \dots + (-1)^n g_{\mu_1 \mu_n} Sp \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_{n-1}}$$

3.60. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა  $\gamma$  მატრიცების შპურებისათვის:

$$tr \gamma_\mu = 0$$

3.61. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა  $\gamma$  მატრიცების შპურებისათვის:

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$$

3.62. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა  $\gamma$  მატრიცების შპურებისათვის:

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho})$$

3.63. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა  $\gamma_5$  მატრიცების შპურებისათვის:

$$tr \gamma_5 = 0$$

3.64. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა  $\gamma$  მატრიცების შპურებისათვის:

$$tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0$$

3.65. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა  $\gamma$  მატრიცების შპურებისათვის:

$$tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = -4i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

3.66. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$tr(\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n+1}) = 0$$

3.67. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა  $\gamma$  მატრიცების შპურებისათვის:

$$tr(\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n}) = tr(\not{a}_{2n} \dots \not{a}_1)$$

3.68. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა  $\gamma$  მატრიცების შპურებისათვის:

$$tr(\gamma_5 \gamma_\mu) = 0$$

3.69. გამოთვალეთ შპური:

$$tr(\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_6)$$

3.70. გამოთვალეთ შპური:

$$tr[(\not{p} - m)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)(\not{q} + m)\gamma_\nu]$$

3.71. გამოთვალეთ შემდეგი გამოსახულება:

$$tr \gamma_\mu (1 - \gamma_5) (\hat{p} - m) \gamma^\mu$$

3.72. გამოთვალეთ შემდეგი შპურები:

ა)  $tr \gamma_\mu (\hat{p} + m) \gamma_\nu (\hat{q} + m)$

ბ)  $tr \gamma_\mu \gamma_5 (\hat{p} + m) \gamma_\nu \gamma_5 (\hat{p} + m)$

3.73. გამოთვალეთ შემდეგი შპურები:

ა)  $tr(1 + \gamma_5) \hat{p} (1 + \gamma_5) \hat{q} (\hat{p} - m)$

ბ)  $tr(1 + \gamma_5) \hat{a} \hat{b} (1 + \gamma_5) \hat{a} \hat{c}$

3.74. გამოთვალეთ შემდეგი შპურები:

ა)  $tr(\hat{A} + a)(\hat{B} + b)(\hat{C} + c)(\hat{D} + d)$

ბ)  $tr \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} \hat{e} \hat{f} \hat{b} \hat{a}$

გ)  $tr \gamma_\mu \gamma_\nu \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma_\nu \gamma_\mu \hat{a}$

3.75.\* შეამოწმეთ შემდეგი იგივეობა:

$$\exp(\gamma_5 \not{a}) = \cos \sqrt{a_\mu a^\mu} + \frac{1}{\sqrt{a_\mu a^\mu}} \gamma_5 \not{a} \sin \sqrt{a_\mu a^\mu}$$

სადაც  $a^2 > 0$ .

**მითითება:** გაშალეთ ექსპონენტი მწკრივად.

3.76.\* აჩვენეთ, რომ მატრიცები:

$$\Gamma^a = \{I, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$$

წრფივად დამოუკიდებელი  $4 \times 4$  მატრიცებია.

3.77. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ორი  $\Gamma$  მატრიცის ნამრავლი ისევ ერთ-ერთი  $\Gamma^a$  მატრიცაა.

3.78.\* აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი  $4 \times 4$  მატრიცა შეიძლება ჩაინეროს  $\Gamma^a = \{I, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$  მატრიცების სახით, ანუ  $A = \sum_a c_a \Gamma^a$ , სადაც

$$c_a = \frac{1}{4} tr(A \Gamma_a)$$

**მითითება:** გაამრავლეთ  $A = \sum_a c_a \Gamma^a$  განტოლება მარჯვნიდან  $\Gamma_b$ -ზე და ცალკე

გამოყავით  $b$  წევრი.

3.79. გამოსახეთ  $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho$  მატრიცების ნამრავლი  $\Gamma$  მატრიცებით.

3.80. გამოსახეთ  $\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu$  მატრიცების ნამრავლი  $\Gamma$  მატრიცებით.



3.81. გამოსახეთ  $\sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho\gamma_5$  მატრიცების ნამრავლი  $\Gamma$  მატრიცებით.

3.82. გამოსახეთ  $\{\gamma^\mu, \sigma^{\nu\sigma}\}$  ანტიკომუტატორი  $\Gamma$  მატრიცებით.

3.83.\* გამოთვალეთ შპური  $tr(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_a\gamma_b\gamma_5)$ .

3.84. შეამოწმეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\gamma_5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}$$

3.85.\* აჩვენეთ, რომ  $[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}]$  შეიძლება გამოისახოს  $\sigma_{\mu\nu}$ -ებით. იპოვეთ გამ-  
ლის კოეფიციენტები.

**მიითითება:** გამოიყენეთ კომუტატორების  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$  თვისება და ამ თავის შესავალი ნაწილის (III.1) ფორმულა.

3.86.\* აჩვენეთ, რომ, თუ მატრიცა კომუტირებს ყველა  $\gamma^\mu$  მატრიცასთან, მაშინ ის პროპორციულია ერთეულოვანი მატრიცის.

3.87.\* მოცემულია  $U = \exp(\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{n})$ , სადაც  $\beta$  და  $\vec{\alpha}$  დირაკის მატრიცებია;  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორია. შეამოწმეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\vec{\alpha}' \equiv U\vec{\alpha}U^+ = \vec{\alpha} - (I - U^2)(\vec{\alpha}\cdot\vec{n})\vec{n}$$

3.88.\* აჩვენეთ, რომ (III.2) მატრიცები  $\gamma$  მატრიცების წარმოდგენაა. იპოვეთ უნიტარული მატრიცა, რომელსაც ეს წარმოდგენა გადაჰყავს დირაკის წარმოდგენაში. გამოთვალეთ  $\sigma_{\mu\nu}$  და  $\gamma_5$  ამ წარმოდგენაში.

3.89.\* იპოვეთ დირაკის მატრიცები ორ განზომილებაში. განსაზღვრეთ  $\gamma_5$  და გამოითვალეთ  $tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu)$ . გაამარტივეთ ნამრავლი  $\gamma^5\gamma^\mu$ .

3.90. აჩვენეთ, რომ შეუძლებელია ისეთი მეორე რანგის მატრიცის მონახვა, რომელიც კომუტატიური იქნებოდა პაულის  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0$  მატრიცებთან.

3.91. აჩვენეთ, რომ დირაკის მატრიცების რანგი უსათუოდ ლუნი უნდა იყოს.

3.92. აჩვენეთ, რომ სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$\alpha_j\alpha_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l$$

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l$$

$$\gamma_j\gamma_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l$$

3.93. იპოვეთ  $[\alpha_j, \alpha_k]$ ,  $[\sigma_j, \sigma_k]$ ,  $[\gamma_j, \gamma_k]$  კომუტატორები.

3.94. იპოვეთ შემდეგი ნამრავლები:

$$(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2), (\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2), (\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2), (\vec{\sigma}^0 \vec{A})(\vec{\sigma}^0 \vec{B})$$

სადაც  $\vec{A}$  და  $\vec{B}$  ვექტორების მდგენელები კომუტატიურია  $\sigma_i$  მატრიცებთან.

3.95. წინა ამოცანაში განიხილეთ შემთხვევები, როცა  $\vec{A} = \vec{B}$ ,  $\vec{A}$  ვექტორის კომპონენტები ერთმანეთთან კომუტირებს და როცა  $\vec{A} = \vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორია.

3.96. წინა ამოცანაში მიღებული შედეგის გამოყენებით გამოთვალეთ ნამრავლი  $(\vec{\sigma} \cdot \hat{l})(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})$ , სადაც  $\hat{l}$  ორბიტალური მომენტის ოპერატორია, ხოლო  $\hat{p}$  იმპულსია.

3.97. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

$$\begin{aligned}(\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2) + (\vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_1) &= 2(\vec{A} \vec{B}) \\ (\vec{\gamma}_1 \vec{\gamma}_2) - (\vec{\gamma}_2 \vec{\gamma}_1) &= 2i(\vec{\sigma}[\vec{A} \times \vec{B}])\end{aligned}$$

3.98. აჩვენეთ, რომ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 (\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0)$  სამი მატრიცა ვექტორის კომპონენტებს წარმოადგენენ.

3.99. აჩვენეთ, რომ  $\vec{\sigma}^0$  აქსიალური (ფსევდო) ვექტორია, ხოლო  $\vec{\alpha}$  პოლარული (ნამდვილი) ვექტორია.

3.100. აჩვენეთ, რომ  $1, \sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0$  მატრიცები სრულ სისტემას ადგენენ.

3.101. გამოთვალეთ შემდეგი გამოსახულებები:

$$[\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}], [\vec{\alpha} \times \vec{\alpha}], [\vec{\gamma} \times \vec{\gamma}], [\vec{\sigma}^0 \times \vec{\sigma}^0]$$

3.102. აჩვენეთ, რომ:

$$(\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0)^2 = 3 - 2(\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0)$$

სადაც იგულისხმება, რომ  $\sigma_{li}^0$  მატრიცები კომუტატიურია  $\sigma_{2k}^0$  მატრიცებთან.

3.103. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი მთელი დადებითი  $n$ -თვის სამართლიანია ტოლობა:

$$(\vec{\sigma}_1^0)(\vec{\sigma}_2^0)^n = a_n + b_n(\vec{\sigma}_1^0)(\vec{\sigma}_2^0)$$

სადაც

$$a_n = \frac{3 + (-3)^n}{4}; \quad b_n = \frac{3 - (-3)^n}{4}$$

## თავი 4. დირაკის განტოლება

$s = 1/2$  სპინის მქონე ნაწილაკებისათვის დირაკის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H_D \Psi \quad (\text{IV.1})$$

სადაც  $H_D$  დირაკის ჰამილტონის ოპერატორია:

$$H_D = c \vec{\alpha} \vec{p} + mc^2 \beta \quad (\text{IV.2})$$

ხოლო  $\Psi$  ტალღური ფუნქცია ბისპინორი ანუ ოთხკომპონენტიანი სიდიდეა:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

დირაკის მატრიცები განვიხილეთ მე-3 თავში.

კოვარიანტული სახით (IV.1) დირაკის განტოლება ასე იწერება:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \quad (\text{IV.4})$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r=1}^2 \int d^3 \vec{p} \sqrt{\frac{m}{E_p}} (u_r(\vec{p}) c_r(\vec{p}) e^{-ipx} + v_r(\vec{p}) d_r^+(\vec{p}) e^{ipx}) \quad (\text{IV.5})$$

სადაც  $u_r(\vec{p})$  და  $v_r(\vec{p})$  (IV.3)-ში იყო განმარტებული. ისინი აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს:

$$(\not{p} - m)u_r(\vec{p}) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

$$(\not{p} + m)v_r(\vec{p}) = 0 \quad (\text{IV.7})$$

და ორთონორმირების პირობებს:

$$\bar{u}_r(\vec{p})u_s(\vec{p}) = -\bar{v}_r(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \delta_{rs} \quad (\text{IV.8})$$

$$\bar{u}_r(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \bar{v}_r(\vec{p})u_s(\vec{p}) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  ლორენცის გარდაქმნების მიმართ,  $\Psi(x)$  დირაკის სპინორი შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x) = e^{\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} \Psi(x) \quad (\text{IV.10})$$

სადაც  $S(\Lambda)$  ლორენცის გარდაქმნის მატრიცა სპინორულ წარმოდგენაშია და აკმაყოფილებს განტოლებებს:

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma_0 S^+(\Lambda) \gamma_0 \quad (IV.11)$$

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (IV.12)$$

$A^\mu$  ელექტრომაგნიტურ ველში  $-e$  მუხტის მქონე ელექტრონის მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m] \Psi(x) = 0 \quad (IV.13)$$

სივრცული ღერძების ინვერსიისას დირაკის სპინორები შემდეგნაირად გარდაიქმნებიან:

$$\Psi(t, \vec{x}) \rightarrow \Psi'(t, -\vec{x}) = \gamma_0 \Psi(t, \vec{x}) \quad (IV.14)$$

დროის ინვერსია ანტიუნიტარული ოპერაციაა:

$$\Psi(t, \vec{x}) \rightarrow \Psi'(t, -x) = T \Psi^*(t, \vec{x}) \quad (IV.15)$$

სადაც  $T$  მატრიცა აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$T \gamma_\mu T^{-1} = \gamma^{\mu*} = \gamma_\mu^T \quad (IV.16)$$

დირაკის წარმოდგენაში ამ განტოლების ამონახსნია:

$$T = i\gamma^1 \gamma^2 \quad (IV.17)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$T^+ = T^{-1} = T = -T^* \quad (IV.18)$$

მუხტური შეუღლებისას  $\Psi(x)$  სპინორები ასე გარდაიქმნებიან:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi_c(x) = C \bar{\Psi}^T \quad (IV.19)$$

ხოლო  $C$  მატრიცები შემდეგ თანაფარდობებს აკმაყოფილებენ:

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad C^{-1} = C^T = C^+ = -C \quad (IV.20)$$

დირაკის წარმოდგენაში:

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 \quad (IV.21)$$

4.1. ქვემოთ ჩამოთვლილი ოპერატორებიდან რომელი კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან:

ა)  $\vec{p} = -i\nabla$

ბ)  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

გ)  $\vec{L}^2$

4.2. ქვემოთ ჩამოთვლილი ოპერატორებიდან რომელი კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან:

ა)  $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$

ბ)  $\vec{S}^2$

გ)  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

დ)  $\vec{J}^2$

4.3. ქვემოთ ჩამოთვლილი ოპერატორებიდან რომელი კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან:

ა)  $\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

ბ)  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}$ , სადაც  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორია

გ)  $\hat{\Lambda} = \hat{p} \vec{\Sigma}$

4.4. ქვემოთ ჩამოთვლილი ოპერატორებიდან რომელი კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან:

ა)  $\hat{I}[\hat{I}\Psi(\vec{r}) \equiv \Psi(-\vec{r})]$

ბ)  $\hat{P} = \beta \hat{I} P$

გ)  $\gamma_5$

4.5.\* ამოხსენით დირაკის განტოლება თავისუფალი ნაწილაკისათვის, ანუ მიიღეთ (IV.5).

4.6. აჩვენეთ, რომ დირაკის განტოლებას აკმაყოფილებს არა მხოლოდ  $\Psi$ , არამედ ფუნქციაც:

$$F = \left( \frac{\hat{E}}{c} + (\vec{\alpha} \hat{p}) + \alpha_4 mc \right) \psi$$

4.7. დირაკის ნაწილაკისათვის იპოვეთ  $u_s(\vec{p})e^{-ip \cdot x}$  და  $v_s(\vec{p})e^{ip \cdot x}$  მდგომარეობების ენერგია.

4.8. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

$$\sum_{i=1}^2 u_r(p) \bar{u}_r(p) = \frac{\not{p} + m}{2m} \equiv \Lambda_+(p)$$

$$-\sum_{i=1}^2 v_r(p) \bar{v}_r(p) = -\frac{p-m}{2m} \equiv \Lambda_-(p)$$

სადაც  $\Lambda_+(p)$  და  $\Lambda_-(p)$  სიდიდეები წარმოადგენენ ენერჯის პროექციის ოპერატორებს.

4.9. აჩვენეთ, რომ:  $\Lambda_{\pm}^2 = \Lambda_{\pm}$  და  $\Lambda_+ \Lambda_- = 0$ .

4.10. როგორ მოქმედებენ  $\Lambda_+(p)$  და  $\Lambda_-(p)$  ოპერატორები  $u_r(\vec{p})$  და  $v_r(\vec{p})$  საბაზისო სპინორებზე? მიიღეთ შედეგები სპინორების ზუსტი გამოსახულებების გამოყენებით და მათ გარეშე.

4.11. უძრაობის სისტემაში დირაკის ნაწილაკის სპინი შემდეგნაირად განიმარტება:  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\Sigma}$ . აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:  $\vec{\Sigma} = \gamma_5 \gamma_0 \vec{\gamma}$

4.12. წინა, 4.11 ამოცანის პირობებში აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

ა)  $[S^i, S^j] = i \epsilon^{ijk} S^k$

ბ)  $S^2 = -\frac{3}{4}$

4.13.\* აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u_r(\vec{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\vec{p}); \quad \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} v_r(\vec{p}) = (-1)^{r+1} v_r(\vec{p})$$

**მიითვება:** გამოიყენეთ (4.5) ამოცანის შედეგები.

4.14. არიან თუ არა  $u_r(\vec{p})$  და  $v_r(\vec{p})$  სპინორები  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები, სადაც  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორია?

4.15. სპინორულ წარმოდგენაში იპოვეთ ბუსტის ოპერატორი უძრაობის ათვის სისტემიდან  $\nu$  სიჩქარით,  $z$  ღერძის გასწვრივ მოძრავ სისტემაზე გადასვლისათვის. არის თუ არა ეს ოპერატორი უნიტარული?

4.16. ამოხსენით წინა, 4.11 ამოცანა სისტემისათვის, რომელიც ბრუნავს ღერძის გარშემო კუთხზე. არის თუ არა ეს ოპერატორი უნიტარული?

4.17.\* პაული-ლუბარსკის ვექტორი განიმარტება შემდეგნაირად:  $W_{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^{\sigma}$ ,

სადაც  $M^{\nu\rho} = \frac{1}{2} \sigma^{\nu\rho} + i(x^{\nu} \partial^{\rho} - x^{\rho} \partial^{\nu})$  კუთხური მომენტი,  $P^{\mu}$  კი ოთხიმპულსია. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$W^2\psi(x) = -\frac{3}{4}m^2\psi(x)$$

სადაც  $\psi(x)$  დირაკის განტოლების ამონახსნია.

**მითითება:** შეიტანეთ პაული-ლუბარსკის ვექტორის განმარტებაში კუთხური მომენტის და ოთხიმპულსის გამოსახულებანი და მიიღეთ ამ ვექტორის შემდეგი

გამარტივებული ჩანერა: 
$$W^\mu = \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\nu\rho}\partial_\sigma$$

4.18. კვარიანტული ოპერატორი, რომელიც აპროექცირებს სპინის ოპერატორს ნებისმიერ ნორმალიზებად  $s^\mu$  ( $s^2 = -1$ ) ოთხ ვექტორზე,  $W_\mu s^\mu$ -ით მოიცემა, სადაც  $s \cdot p = 0$  ანუ  $s^\mu$  პოლარიზაციის ვექტორი იმპულსის ვექტორის ორთოგონალურია. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\frac{W_\mu s^\mu}{m} = \frac{1}{2m}\gamma_5 \not{s}$$

იპოვეთ ეს ოპერატორი უძრაობის სისტემაში.

4.19. სპინორულ ბაზისთან ერთად ხშირად გამოიყენება სპირალობის ბაზისიც. სპინორული ბაზისი მიიღება, თუ უძრაობის სისტემაში ავიღებთ:  $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ . იპოვეთ ამ შემთხვევაში სპინისათვის განტოლებები.

4.20. ულტრარელატივისტურ ზღვარში იპოვეთ 4.15 ამოცანაში განმარტებული სპინისათვის განტოლებები.

4.21. აჩვენეთ, რომ  $\gamma_5 \not{s}$  ოპერატორი კომუტირებს  $\not{p}$  ოპერატორთან და ამ ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობებია  $\pm 1$ .

4.22.\* დირაკის ნანილაკი მოძრაობს  $z$  ღერძის გასწვრივ  $\vec{p}$  იმპულსით. არარელატივისტური სპინური ტალღური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

გამოთვალეთ შემდეგი საშუალო:  $\langle \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \rangle$ . იპოვეთ არარელატივისტური ზღვარი.

**მითითება:** გამოიყენეთ ფორმულა:  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i[\vec{A} \times \vec{B}] \cdot \vec{\sigma}$

4.23. იპოვეთ  $z$  ღერძის გასწვრივ  $\vec{p}$  იმპულსით მოძრავი ელექტრონისათვის დირაკის სპინორი. ელექტრონი პოლარიზებულია  $\vec{n} = \left(\theta, \phi = \frac{\pi}{2}\right)$  მიმართულების გასწვრივ.

4.24. წინა ამოცანაში გამოთვალეთ პოლარიზაციულ ვექტორზე სპინის პროექციის საშუალო მნიშვნელობა.

4.25. არის თუ არა  $\gamma_5$  ოპერატორი მოძრაობის ინტეგრალი თავისუფალი დირაკის ნაწილაკისათვის? იპოვეთ ამ ოპერატორის საკუთარი ენერჯის მნიშვნელობები და პროექციები.

4.26. ვეილის ველები შემდეგნაირად განიმარტება:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$$

სადაც  $\psi$  დირაკის სპინორია. იპოვეთ მოძრაობის განტოლებები ამ ველებისათვის. აჩვენეთ, რომ უმასო ნაწილაკებისათვის ეს განტოლებები ცალდება.

4.27. განიხილეთ განტოლებათა სისტემა შემდეგი ორკომპონენტიანი ფუნქციებისათვის:

$$i\sigma^\mu \frac{\partial \psi_R(x)}{\partial x^\mu} = m\psi_L(x)$$

$$i\bar{\sigma}^\mu \frac{\partial \psi_L(x)}{\partial x^\mu} = m\psi_R(x)$$

სადაც  $\sigma^\mu = (I, \vec{\sigma})$ ;  $\bar{\sigma}^\mu = (I, -\vec{\sigma})$ .

შესაძლებელია თუ არა ამ განტოლებათა სისტემის დირაკის განტოლების სახით ჩანერა? თუ ეს შესაძლებელია, იპოვეთ უნიტარული მატრიცა, რომელიც აკავშირებს ახალ  $\mathcal{Y}$  მატრიცებს დირაკის მატრიცებთან.

4.28. აჩვენეთ, რომ წინა ამოცანაში განხილული განტოლებათა სისტემა რელატივისტურად კოვარიანტულია. იპოვეთ  $S_R$  და  $S_L$   $2 \times 2$  მატრიცები, რომლებიც აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობას:  $\psi'_{R,L}(x') = S_{R,L}\psi_{R,L}(x)$ , სადაც  $\psi'_{R,L}$  ტალღური ფუნქცია  $\psi_{R,L}$  ტალღური ფუნქციიდან მიიღება,  $x$  ღერძის გასწვრივ ბუსტის ოპერაციის ჩატარებით.

4.29. შეამოწმეთ, რომ  $K = \beta(\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1)$  ოპერატორი, სადაც  $\vec{\Sigma} = -\frac{i}{2}\vec{\alpha} \times \vec{\alpha}$ , სპინის ოპერატორია, ხოლო  $\vec{L}$  ორბიტალური მომენტი, კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან.



4.30. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია გორდონის შემდეგი ტოლობები:

$$2m\bar{u}(\vec{p}_1)\gamma_\mu u(\vec{p}_2) = \bar{u}(\vec{p}_1)[(p_1 + p_2)_\mu + i\sigma_{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\nu]u(\vec{p}_2)$$

$$2m\bar{v}(\vec{p}_1)\gamma_\mu v(\vec{p}_2) = -\bar{v}(\vec{p}_1)[(p_1 + p_2)_\mu + i\sigma_{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\nu]v(\vec{p}_2)$$

არ გამოიყენოთ დირაკის სპინორების რომელიმე კონკრეტული წარმოდგენა.

4.31. შეამოწმეთ შემდეგი იგივეობის სამართლიანობა:

$$\bar{u}(\vec{p}')\sigma_{\mu\nu}(p_1 + p_2)^\nu u(\vec{p}) = i\bar{u}(\vec{p}')(\not{p}' - \not{p})u(\vec{p})$$

4.32. მოცემულია დენი  $J_\mu = \bar{u}(\vec{p}_2)\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}_2u(\vec{p}_1)$ , სადაც  $u(\vec{p})$  და  $\bar{u}(\vec{p})$  დირაკის სპინორებია. აჩვენეთ, რომ  $J_\mu$  შეიძლება ჩაინეროს შემდეგი სახით:

$$J_\mu = \bar{u}(\vec{p}_2)[F_1(m, q^2)\gamma_\mu + F_2(m, q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu]u(\vec{p}_1)$$

სადაც  $q = p_2 - p_1$ . განსაზღვრეთ  $F_1$  და  $F_2$  ფუნქციები.

4.33. ჩანერეთ:

$$\bar{u}(\vec{p})\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u(\vec{p})$$

გამოსახულება, როგორც  $N = u^+(\vec{p})u(\vec{p})$  ნორმალიზების ფაქტორის ფუნქცია.

4.34. მიიღეთ უწყვეტობის განტოლება დირაკის განტოლებისათვის.

4.35. მოცემულია დენი  $J_\mu = \bar{u}(\vec{p}_2)\not{p}^\rho\not{q}^\lambda\sigma_{\mu\rho}\gamma_\lambda\not{p}_2u(\vec{p}_1)$ , სადაც  $u(\vec{p}_1)$  და  $u(\vec{p}_2)$

დირაკის სპინორებია;  $p = p_1 + p_2$  და  $q = p_2 - p_1$ . აჩვენეთ, რომ  $J_\mu$  შეიძლება ჩაინეროს შემდეგი სახით:

$$J_\mu = \bar{u}(\vec{p}_2)(F_1\gamma_\mu + F_2q_\mu + F_3\sigma_{\mu\rho}q^\rho)u(\vec{p}_1)$$

და განსაზღვრეთ  $F_i = F_i(q^2, m)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) ფუნქციები.

4.36. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\psi(x)$  არის დირაკის განტოლების ამონახსნი, მაშინ ის კლეინ-გორდონის განტოლების ამონახსნიცაა.

4.37.  $\vec{p}$  იმპულსის მქონე და ნებისმიერ სპინურ მდგომარეობაში მყოფი ელექტრონისათვის განსაზღვრეთ  $\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi$  ალბათობის სიმკვრივე და  $\vec{j} = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$  დენის სიმკვრივე. მიღებული გამოსახულებები შეადარეთ არარელატივისტურ გამოსახულებებს.

4.38. თავისუფალი დირაკის ნაწილაკისათვის იპოვეთ, თუ როგორ არის მდებარეობის  $\vec{r}_H(t) = e^{iHt}\vec{r}e^{-iHt}$  ოპერატორი დროზე დამოკიდებული.

4.39.  $t = 0$  მომენტში თავისუფალი ელექტრონის მდგომარეობა აღინერება შემდეგი ტალღური ფუნქციით:

$$\psi(t=0, \vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

იპოვეთ  $\psi(t > 0, \vec{x})$ .

4.40. დირაკის განტოლებისათვის განსაზღვრეთ შემდეგი ტალღური პაკეტის დროში ევოლუცია:

$$\psi(t=0, \vec{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2d^2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.41.\*  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  მომენტის და დადებითი სპირალობის მქონე ელექტრონი გადის შემდეგ პოტენციალურ ბარიერში:

$$-eA^0 = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ V, & z > 0 \end{cases}$$

გამოთვალეთ არეკვლისა და გაჟონვის კოეფიციენტები.

4.42.\* გამოთვალეთ არეკვლისა და გაჟონვის კოეფიციენტები ელექტრონისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ბარიერში:

$$-eA^0 = \begin{cases} 0, & z < 0, z > a \\ V, & 0 < z < a \end{cases}$$

სადაც  $E$  ელექტრონის ენერგიაა, ხოლო სპირალობაა  $1/2$ .

**მითითება:** ამ ამოცანის ამოხსნა ანალოგიურია წინა, 4.41 ამოცანის ამოხსნისა.

4.43.\* ელექტრონი მოძრაობს  $2a$  სიგანისა და  $V$  სიღრმის პოტენციალურ ორმოში. განიხილეთ მხოლოდ ბმული მდგომარეობები; იპოვეთ დისპერსიული თანაფარდობები.

4.44.\* წინა ამოცანაში განიხილეთ  $V < 2m$  შემთხვევა და იპოვეთ კავშირი  $V$ -სა და  $a$ -ს შორის, თუ გვაქვს  $N$  მდგომარეობა. თუ გვაქვს მხოლოდ ერთი ბმული მდგომარეობა, როგორია ის – ლუნი თუ კენტი?

4.45.\* ელექტრონი მოძრაობს სამგანზომილებიან სფერულ ორმოში:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 < 0; & r < r_0 \\ 0; & r > r_0 \end{cases}$$

იპოვეთ ტალღური ფუნქციები  $J = \frac{1}{2}$  ბმული მდგომარეობებისათვის, სადაც ზე- და ორ კომპონენტს გააჩნია ლუნი ორბიტალური ლუნობა.

4.46.\* ნინა ამოცანაში: ა) იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება და ბ) შეისწავლეთ, რა მოხდება, როდესაც პოტენციალური ენერგია გაიზრდება ისე, რომ  $V_0 \geq 2m$ .

4.47.\* აჩვენეთ, რომ  $m$  მასის მქონე ნანილაკის დირაკის განტოლებას  $V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$  ოსცილატორული პოტენციალისათვის არ გააჩნია ბმული მდგომარეობები.

4.48.\* აჩვენეთ, რომ  $V(r) = -imc\omega(\vec{\gamma} \cdot \vec{r})$  პოტენციალისათვის დირაკის განტოლებას გააჩნია ბმული მდგომარეობები და იპოვეთ ისინი.

4.49.  $U \approx \frac{1}{r^s}$ ;  $s < 1$  პოტენციალისათვის დაადგინეთ დირაკის ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევა სათავის მახლობლად.

4.50.\*  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  მუდმივ მაგნიტურ ველში მოძრაობისას იპოვეთ ელექტრონის ენერგიის სპექტრი.

4.51. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\psi(x)$  არის დირაკის განტოლების ამონახსნი ელექტრომაგნიტურ ველში, მაშინ ის აკმაყოფილებს „განზოგადებულ“ კლეინ-გორდონის განტოლებას:

$$\left[ (\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial_\mu - ieA_\mu) - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 \right] \psi(x) = 0$$

სადაც  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორია.

**მიითითება:** მარცხნიდან იმოქმედეთ  $(i\partial + eA + m)$  ოპერატორით  $(i\partial + eA - m)\psi(x) = 0$  განტოლებაზე და აგრეთვე გამოიყენეთ შემდეგი თანაფარდობა:

$$-\frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = ie(\partial_\mu A^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu A_\nu)$$

4.52.\* იპოვეთ  $H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} + e\vec{A}) - eA^0 + m\beta$  დირაკის ჰამილტონიანის არარელატივისტური მიახლოება  $\frac{v^2}{c^2}$  რიგში.

4.53. თუ  $V_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$  ვექტორული ველია, აჩვენეთ, რომ  $V_\mu(x)$  ნამდვილი სიდიდეა. იპოვეთ ამ სიდიდის ტრანსფორმაციული თვისებები ლორენც გარდაქმნების მიმართ.

4.54.\* წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ  $V_\mu(x)$  სიდიდის ტრანსფორმაციული თვისებები P ლუნობის, C მუხტური შეუღლების და T დროის ინვერსიის მიმართ.

4.55.\* იპოვეთ  $A^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$  სიდიდის ტრანსფორმაციული თვისებები ლორენც გარდაქმნების, C მუხტური შეუღლების, P ლუნობის და T დროის ინვერსიის მიმართ.

4.56. შეამოწმეთ, რომ  $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\partial^\mu\psi(x)$  სიდიდე ლორენც სკალარია. იპოვეთ მისი გარდაქმნის წესი დისკრეტული გარდაქმნების – C მუხტური შეუღლების, P ლუნობის და T დროის ინვერსიის მიმართ.

4.57. დირაკის განტოლების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ  $C\bar{u}^T(p,s) = v(p,s)$ , სადაც C მუხტური შეუღლების ოპერატორია. შეამოწმეთ ასევე ეს თანაფარდობა კონკრეტულ ნარმოდგენაში.

4.58. C მატრიცა განიმარტება შემდეგნაირად:

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$$

აჩვენეთ, რომ, თუ  $C'$  და  $C''$  მატრიცები აკმაყოფილებენ ზემოთ მოყვანილ თანაფარდობას, მაშინ  $C' = kC''$ , სადაც  $k$  მუდმივაა.

4.59. თუ:

$$\psi(x) = N_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\sigma_3 p}{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iEt + ipz}$$

1/2 სპინის მქონე რელატივისტური ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა S ათვის სისტემაში. იპოვეთ:

ა) ანტინაწილაკის  $\psi_c(x) = C\bar{\psi}^T(x)$  ტალღური ფუნქცია.

ბ) ამ ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია იმ დამკვირვებლისათვის, რომელიც მოძრაობს  $\vec{p} = pe_z$  იმპულსით.

4.60. წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ:

ა) სივრცისა და დროის ინვერსიის შედეგად მიღებული ტალღური ფუნქციები.

ბ) ტალღური ფუნქცია იმ ათვის სისტემაში, რომელიც მიიღება  $S$  ათვის სისტემის მობრუნებით  $x$  ღერძის ირგვლივ  $\theta$  კუთხეზე.

4.61. იპოვეთ  $C$  და  $P$  მატრიცები  $\gamma$  მატრიცების ვეილის წარმოდგენაში.

4.62. აჩვენეთ, რომ დირაკის ნაწილაკების სპირალობა ნიშნის იცვლის სივრცის არეკვლისას.

4.63.\* აჩვენეთ, რომ დირაკის ნაწილაკების სპირალობა არ იცვლის ნიშნის დროის ინვერსიისას.

4.64.\*  $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$  წარმოადგენს დირაკის ჰამილტონიანს. განსაზღვრეთ  $\theta$  პარამეტრი იმ მოთხოვნიდან, რომ ახალ  $H' = UHU^+$  ჰამილტონიანს, სადაც  $U = e^{\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \theta(p)}$ , აქვს  $H' \approx \beta$  სახე (ფოლდი-ვაუტხაუზენის გარდაქმნა).

4.65. აჩვენეთ, რომ  $\vec{\Sigma} = \frac{i}{2} \vec{\gamma} \times \vec{\gamma}$  სპინის და  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  კუთხური მომენტის

ოპერატორებს ფოლდი-ვაუტხაუზენის წარმოდგენაში შემდეგი სახე აქვთ:

$$\vec{\Sigma}_{FW} = \frac{m}{E_p} \vec{\Sigma} + \frac{\vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{\Sigma})}{2E_p(m + E_p)} + \frac{i\beta(\vec{\alpha} \times \vec{p})}{2E_p}$$

$$\vec{L}_{FW} = \vec{L} - \frac{\vec{p}(\vec{p} \cdot \vec{\Sigma})}{2E_p(m + E_p)} + \frac{\vec{p}^2 \vec{\Sigma}}{2E_p(m + E_p)} - \frac{i\beta(\vec{\alpha} \times \vec{p})}{2E_p}$$

4.66.\* იპოვეთ  $\vec{x}$  და  $\vec{p}$  ოპერატორების ფოლდი-ვაუტხაუზენის გარდაქმნა. გამოთვალეთ კომუტატორი  $[\vec{x}_{FW}, \vec{p}_{FW}]$ .

4.67. გამოითვალეთ ფოლდი-ვაუტხაუზენის  $U$  უნიტარული ოპერატორი შემდეგი გარდაქმნისათვის:

$$H_{FW} = UH_D U^+ = \gamma^0 (\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}}$$

სადაც  $H_D = \gamma^0 (c \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc^2)$  წარმოადგენს თავისუფალ დირაკის ჰამილტონიანს. აჩვენეთ, რომ დირაკის ტალღური ფუნქციის დიდი და მცირე კომპონენტები ცალდებთან.

4.68. განიხილეთ წინა ამოცანა ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დირაკის ნაწილაკისათვის.

4.69.\* იპოვეთ გარკვეული იმპულსის მქონე დირაკის ნაწილაკის სპინის ვექტორის საშუალო (ჩათვალეთ, რომ სპინის მდგომარეობა ნებისმიერია). სიმარტივისათვის ჩათვალეთ, რომ იმპულსი მიმართულია  $Z$  ღერძის გასწვრივ.

4.70. განიხილეთ ბისპინორების უნიტარული გარდაქმნა, რომელიც მოიცემა 
$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
 უნიტარული მატრიცით. როგორი სახე აქვს ახალ წარმოდგენაში

ნაწილაკის სპინის ოპერატორს და დირაკის განტოლებას  $\Psi' = \hat{U}\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  ბისპინორისათვის?

4.71. წინა ამოცანაში მიღებულ განტოლებებში განიხილეთ უმასო  $m = 0$  ნაწილაკის შემთხვევა.

4.72. ცნობილია ნაწილაკის სპინური მდგომარეობა მისი უძრაობის სისტემაში. იპოვეთ  $u(\vec{p})$  ბისპინორი ნებისმიერ ათვლის სისტემაში, რომელშიც ნაწილაკს აქვს  $\vec{p}$  იმპულსი.

4.73. გამოიყენეთ წინა ამოცანაში მიღებული შედეგი და იპოვეთ უძრავ და მოძრავ სისტემებში ნაწილაკის სპინის ვექტორის საშუალოებს შორის კავშირი.

4.74.\* ჩაატარეთ მუხტური შეუღლების ოპერაცია და იპოვეთ ანტინაწილაკის ტალღური ფუნქცია  $\psi_c^+$ , რომელიც შეესაბამება დირაკის განტოლებას  $-\vec{p}$  იმპულსით და უარყოფითი  $E = -\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$  ენერგიით. შეადარეთ მიღებული ტალღური ფუნქცია ნაწილაკის ტალღურ ფუნქციას ( $E \geq mc^2$  და  $\vec{p}$  იმპულსით).

4.75. აჩვენეთ, რომ  $\tilde{\psi} = C\psi^*$  ტალღური ფუნქციაა, სადაც  $C = i\alpha_2\rho_3$ , ხოლო  $\psi^*$  კომპლექსურად შეუღლებული ტალღური ფუნქციაა (და არა ერმიტულად შეუღლებული, ანუ არ არის  $\psi^+$ ) უარყოფითი ენერგიის მქონე ელექტრონის, რომელიც აკმაყოფილებს დირაკის განტოლებას დადებითი ენერგიით და მუხტით, ანუ აღწერს პოზიტრონის მოძრაობას (მუხტური შეუღლების ოპერაცია).

**მითითება:** კომპლექსურად შეუღლებულ დირაკის განტოლებაში გააკეთეთ ჩასმა:

$$\tilde{\psi} = i\alpha_2\rho_3\psi^* .$$

4.76. აჩვენეთ, რომ დირაკის განტოლებისათვის  $m = 0$  მასით  $\gamma_5$  ოპერატორი (მატრიცა) კომუტირებს თავისუფალი ნაწილაკის ჰამილტონიანთან. იპოვეთ აღნიშნული ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები და გამოარკვიეთ მათი ფიზიკური აზრი.

4.77. აჩვენეთ, რომ  $\hat{P}_{\pm} = 1/2(1 \pm \gamma_5)$  ოპერატორები (მატრიცები) პროექციული ოპერატორებია.  $m = 0$  მასის მქონე დირაკის ნაწილაკისათვის ეს ოპერატორები

კომუტირებენ ჰამილტონიანთან. ნაწილაკის და ანტინაწილაკის რა მდგომარეობებზე აპროექცირებენ აღნიშნული  $\hat{P}_{\pm}$  ოპერატორები?

4.78. ახსენით, თუ რატომ აქვს ნაწილაკს და ანტინაწილაკს საპირისპირო ნიშნის სპირალობები.

4.79. ფოტონის კვანტურ-მექანიკური აღწერა შესაძლებელია  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  და  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  ვექტორების საშუალებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ იმავე განტოლებებს, რომლებსაც აკმაყოფილებენ კლასიკური ელექტროდინამიკის მაქსველის განტოლებები თავისუფალი ელექტრომაგნიტური ველისათვის (ანუ ელექტრომაგნიტური ტალღებისათვის ვაკუუმში). აჩვენეთ, რომ ეს განტოლებები შესაძლოა ჩაიწეროს დირაკის განტოლების მსგავსად ორკომპონენტიანი სპინორებისათვის (გაითვალისწინეთ, რომ ფოტონის მასა  $m = 0$ , ხოლო სპინი  $s = 1$ ).

4.80.\* იპოვეთ გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში მოთავსებული დირაკის ნაწილაკის მუხტის სიმკვრივისა და დენის გამოსახულებების არარელატივისტური ზღვარი ( $1/c$  რიგის ჩათვლით).

4.81.\* ელექტრომაგნიტურ ველში მოთავსებული  $s = 1/2$  სპინის მქონე ნაწილაკის  $H$  ჰამილტონიანს შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{H} = c\vec{\alpha}\hat{p} + mc^2\beta + \frac{i\lambda}{2}F_{\mu\nu}\beta\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}$$

სადაც  $\lambda$  ნაწილაკის მახასიათებელი პარამეტრია, ხოლო  $F_{\mu\nu}$  – ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი. განიხილეთ  $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$  ტალღური განტოლების არარელატივისტური ზღვარი ( $1/c$  რიგის ჩათვლით) და გამოარკვეეთ  $\lambda$  პარამეტრის ფიზიკური აზრი, ანუ დაადგინეთ მისი კავშირი ნაწილაკის ელექტრომაგნიტურ მახასიათებლებთან.

4.82.\* იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში დირაკის ნაწილაკის გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა  $Z\epsilon$  მუხტის მქონე ბირთვის ველში. ჩათვალეთ, რომ ბირთვი უსასრულოდ მძიმეა.

4.83.\* წინა ამოცანაში მიღებულ დიფერენციალური კვეთის ფორმულაში ჩაატარეთ დაცემული ნაკადის ნაწილაკების სპინური მდგომარეობებით გასაშუალოება (ჩათვალეთ, რომ დაცემული ნაკადი არ არის პოლარიზებული), ხოლო გაფანტული ნაწილაკების სპინური მდგომარეობების მიხედვით მოახდინეთ აჯამება.

4.84.\* იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში დამუხტული დირაკის ნაწილაკის  $A_0(\vec{r})$  გარეშე ელექტრულ ველში გაფანტვის  $\sigma(\mathcal{E})$  სრული კვეთის დამოკიდებულება დიდ  $\mathcal{E}$  ენერჯიებზე.

4.85.\* იპოვეთ  $\hat{G}_{E,\alpha\beta}^{\pm}(\vec{r}, \vec{r}')$  გრინის ფუნქცია დირაკის სტაციონარული განტოლებისათვის, რომელიც აღწერს  $E \geq mc^2$  ენერგიის მქონე თავისუფალ ნაწილაკს და აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$(\hat{H} - E)\hat{G}_E \equiv (-i\hbar c \vec{\alpha} \vec{\nabla} + mc^2 \beta - E)\hat{G}_E = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1)$$

გრინის ამ ფუნქციას უსასრულობაში შემდეგი ასიმპტოტიკა აქვს:

$$G_E^{\pm} \underset{r \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{r} e^{\pm ikr}; \quad k = \sqrt{\frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2}} \quad (2)$$

4.86. იპოვეთ  $\hat{f}_E^{\pm}$  გრინის ფუნქცია სიმეტრიული ფორმით ჩანერილი დირაკის შემდეგი განტოლებისათვის:

$$(i\hat{c}\hat{p} + mc^2)\psi_c = 0; \quad \hat{p} = -i\hbar \vec{\gamma} \vec{\nabla} + \frac{iE}{c} \gamma_4 \quad (3)$$

4.87.\* იპოვეთ ბორნის მიახლოებაში დირაკის ნაწილაკის გარეშე მუდმივ ელექტრომაგნიტურ ველში გაფანტვის ამპლიტუდა.

4.88. გამოიყენეთ წინა ამოცანაში მიღებული შედეგი  $A_0 = \frac{Ze}{r}$  ელექტროსტატიკური ველისათვის.

4.89. გამოიყენეთ შემდეგი განმარტებები:

$$u(\vec{p}, s) = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{2m(m + \omega_p)}} u(\vec{0}, s); \quad v(\vec{p}, s) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{2m(m + \omega_p)}} v(\vec{0}, s)$$

და აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}, s) = 0 = \bar{v}(\vec{p}, s)(\not{p} + m)$$

4.90.\* გამოიყენეთ 4.89 ამოცანის განმარტებები და აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, t) = \delta_{st}$$

4.91.\* გამოიყენეთ 4.89 ამოცანის განმარტებები და აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, t) = -\delta_{st}$$

4.92. გამოიყენეთ 4.89 ამოცანის განმარტებები და აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\bar{v}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, t) = 0$$



4.93. გამოიყენეთ 4.89 ამოცანის განმარტებები და აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$u^+(\vec{p}, s)v(-\vec{p}, t) = 0$$

4.94.\* გამოიყენეთ 4.89 ამოცანის განმარტებები და აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$u^+(\vec{p}, s)u(\vec{p}, t) = \frac{\omega_p}{m} \delta_{st} = v^+(\vec{p}, s)v(\vec{p}, t)$$

4.95. ჩანერეთ უწყვეტობის განტოლება  $\gamma$  მატრიცების საშუალებით.

4.96. ჩანერეთ დენის  $J_\mu$  ოთხვექტორი  $\bar{\psi}$  ფუნქციის საშუალებით.

4.97. რომელ განტოლებას აკმაყოფილებს  $\bar{\psi}$  ?

4.98. ელექტრომაგნიტური ველისათვის ჩანერეთ დირაკის განტოლება  $\gamma$  მატრიცებში.

4.99. ელექტრომაგნიტური ველისათვის რომელ განტოლებას აკმაყოფილებს  $\bar{\psi}$  ?

4.100. ჩანერეთ დირაკის განტოლება  $\bar{\psi}$  ფუნქციებში, როცა  $x_0 = ct$ .

4.101. რა თვისებები გააჩნია  $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$  ოპერატორს?

4.102. დანერეთ დირაკის განტოლება:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \lambda \psi = 0$$

უმასო ნაწილაკისათვის და გამოარკვეეთ, აკმაყოფილებს თუ არა ამ განტოლებას  $\Phi = \gamma_5 \psi$  და  $\varphi = (1 + \gamma_5) \psi$  ფუნქციები.

4.103. რომელ განტოლებას აკმაყოფილებს  $\Phi = \gamma_5 \psi$  ფუნქცია იმ შემთხვევაში, როცა მასა არ უდრის ნულს?

4.104. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\vec{n}$  არის იმპულსის პარალელური ერთეულოვანი ვექტორი, მაშინ  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})$  კომუტირებს  $H = c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \beta mc^2$  ჰამილტონიანთან. გამოარკვეეთ ამ გარემოების ფიზიკური შინაარსი.

4.105.\* აჩვენეთ, რომ დირაკის განტოლება ინვარიანტულია ნრფივი ორთოგონალური გარდაქმნის დროს:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

სადაც გარდაქმნის მატრიცა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$a_{\rho\mu} a_{\rho\nu} = \delta_{\mu\nu}; \quad a_{\mu\rho} a_{\nu\rho} = \delta_{\mu\nu} \quad (2)$$

4.106.\* იპოვეთ წინა ამოცანაში მიღებული  $\Omega$  მატრიცა  $x_1 0 x_2$  სიბრტყეში  $\varphi$  კუთხეზე მობრუნებისას.

4.107.\* იპოვეთ  $\Omega$  მატრიცა  $x_1 0 x_4$  სიბრტყეში მობრუნებისას, ანუ ლორენცის გარდაქმნებისას.

4.108. იპოვეთ ინვერსიის შესაბამისი  $\Omega$  მატრიცა.

4.109.\* აჩვენეთ, რომ 4.97 ამოცანაში განხილული წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნებისას ტალღური ფუნქცია ისე იცვლება, რომ მისი საშუალებით განმარტებულ ფიზიკურ სიდიდეებს ტრანსფორმაციის სწორი თვისებები გააჩნიათ.

4.110. შეისწავლეთ შემდეგი ბინრფივი გამოსახულებების ლორენც-ტრანსფორმაციული თვისებები:

ა)  $\bar{\psi}\psi$ ;   ბ)  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$

4.111. შეისწავლეთ შემდეგი ბინრფივი გამოსახულებების ლორენც-ტრანსფორმაციული თვისებები:

ა)  $i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$    ბ)  $i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$    გ)  $i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$

4.112. აჩვენეთ, რომ  $A_{klm} = i\bar{\psi}\gamma_k\gamma_l\gamma_m\psi$  აქსიალური ვექტორია.

4.113. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ ჩამოთვლილი სიდიდეები ნამდვილი სკალარებია (ინვარიანტებია):

1)  $(\bar{\psi}\psi)(\bar{\phi}\phi)$ ;   2)  $(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\phi}\gamma_5\phi)$ ;   3)  $(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\phi}\gamma_\mu\phi)$ ;  
 4)  $(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)(\bar{\phi}\gamma_5\gamma_\mu\phi)$ ;   5)  $(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi)(\bar{\phi}\gamma_\mu\gamma_\nu\phi)$

4.114. აჩვენეთ, რომ არარელატივისტურ ზღვარში სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების გამო ერთდროულად და ზუსტად იზომება  $\vec{j}^2, j_z, \vec{l}^2$  და  $\vec{s}^2$ , ანუ ნულია შემდეგი კომუტატორები (რელატივისტურ შემთხვევაში კი ერთდროულად ზუსტად იზომებოდა მხოლოდ  $\vec{j}^2$  და  $j_z$ ):

$$[(\vec{l}\vec{s}), \vec{j}^2] = [(\vec{l}\vec{s}), j_z] = [(\vec{l}\vec{s}), \vec{l}^2] = [(\vec{l}\vec{s}), \vec{s}^2] = 0$$

4.115. აჩვენეთ, რომ არარელატივისტურ ზღვარში სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედების გამო  $L_z$  და  $S_z$ -ს არ აქვთ გარკვეული მნიშვნელობა, ანუ არ არის ნული შემდეგი კომუტატორები:

$$[(\vec{l}\vec{s}), L_z] \neq 0; \quad [(\vec{l}\vec{s}), S_z] \neq 0$$

4.116. აჩვენეთ, რომ დირაკის ერთგანზომილებიან განტოლებაში ინახება როგორც ორბიტალური, ისე სპინური მომენტი.

4.117. იპოვეთ კულონური პოტენციალის ენერჯის ის შესწორება, რომელსაც

$$\text{იძლევა ნევრი } H' = -\frac{\hbar^2}{4m^2c^2} \frac{dV}{dr} \frac{d}{dr}.$$

4.118.\* რელატივისტური წყალბადის ატომისათვის სპინ-ორბიტალურ ურთიერთქმედებას შემდეგი სახე აქვს:

$$H_{LS} = \frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial A^0}{\partial r} \vec{S} \cdot \vec{L} \quad (1)$$

სადაც  $A^0 = -\frac{e}{r}$  კულონური პოტენციალია. აჩვენეთ, რომ წყალბადის ატომის

$\{n, j, l\}$  მდგომარეობის საშუალო შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\langle H_{LS} \rangle_{njl} = \frac{\alpha^4 mc^2}{2n^3} \frac{j-l}{\left(j + \frac{1}{2}\right) \left(l + \frac{1}{2}\right)} \quad (2)$$

სადაც  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  ფაქიზი სტრუქტურის მუდმივაა.

4.119.\* შემფოთების თეორიის პირველ რიგში გამოთვალეთ არარელატივისტური წყალბადის ატომის  $n, l, m, s$  მდგომარეობის ენერგეტიკული წანაცვლება, რაც გამოწვეულია ეინშტეინის შესწორებით რელატივისტური ენერჯის ფორმულაში. გამოთვალეთ წანაცვლება, რომელიც არის ეინშტეინის შესწორებისა და  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  სპინ-ორბიტალური ნევრის ჯამი. რატომ არის ეს ჯამი დამოკიდებული მხოლოდ  $n$  და  $j$ -ზე და არ არის დამოკიდებული ცალ-ცალკე  $l$  და  $s$ -ზე?

4.120.\* პოზიტრონიუმისათვის (ელექტრონ-პოზიტრონის ბმული სისტემა) განიხილეთ შრედინგერის განტოლების რელატივისტური შესწორებები. ერთმანეთს შეადარეთ შესწორებები პოზიტრონიუმისათვის და წყალბადის ატომისათვის. შეისწავლეთ ცვლილებები, რომლებიც დაკავშირებულია დაყვანილ მასასთან, ეინშტეინის ნევრთან, სპინ-ორბიტალურ ურთიერთქმედებასთან.

4.121. წინა ამოცანაში შეისწავლეთ ცვლილებები, რომლებიც დაკავშირებულია ზენაზ გახლეჩასთან.

4.122.\* ჰეიზენბერგის სურათში თავისუფალი დირაკის ნაწილაკის სიჩქარე მოიცემა ფორმულით:

$$\vec{v} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{x}]$$

აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი დროის მომენტისათვის  $v_j(t)$ -ს საკუთარი მნიშვნელობებია  $\pm c$ . როგორ შეიძლება ეს ფაქტი ავსხნათ ჰეიზენბერგის განუზღვრელობის თანაფარდობით?

4.123.\* დირაკის თავისუფალი ნაწილაკისათვის ამოხსენით ჰეიზენბერგის განტოლებები და აჩვენეთ, რომ ნაწილაკის რადიუსვექტორი დროში შემდეგნაირად იცვლება:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + c^2 \vec{p} t H^{-1} + \vec{\xi} \left( 1 - e^{-i \frac{2Ht}{\hbar}} \right)$$

იპოვეთ  $\vec{\xi}$ . რა წვლილი აქვს უარყოფითი ენერგიების მდგომარეობებს ამ ფორმულის მარჯვენა მხარის ბოლო წევრში? რას უდრის სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობა დროის დიდ ინტერვალში?

4.124.\* იპოვეთ დირაკის მატრიცების დროზე დამოკიდებულება; აჩვენეთ, რომ დროის ერთსა და იმავე მომენტში ძალაში რჩება დირაკის მატრიცების ანტიკომუტატორობის თვისება.

## პასუხები და ამოხსნები

### ნაწილი I. არარელატივისტური კვანტურ დაჯახებათა თეორია

#### თავი 1. ბორნის მიახლოება

$$1.1.ა) \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{4m^2V_0^2a^6}{\hbar^4} \frac{1}{[1+4k^2a^2\sin^2(\theta/2)]^2}; \quad \sigma(E) = \frac{4m^2V_0^2a^6}{\hbar^4} \frac{4\pi}{1+4k^2a^2}$$

როცა  $a \rightarrow \infty$ , იუკავას მოკლე ქმედების პოტენციალი გადადის კულონის შორს-მოქმედ პოტენციალში, რის გამოც სრული კვეთა უსასრულოა.

$$1.2. f = -\frac{2m\alpha R^2 \sin qR}{\hbar^2 qR}; \quad \sigma(E) = \frac{4\pi m\alpha^2 R^2}{\hbar^2 E} \int_0^{\sqrt{\frac{8mER^2}{\hbar^2}}} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \text{ საიდანაც ზღვრულ}$$

შემთხვევებში მიიღება:

$$\sigma(E) \underset{E \rightarrow 0}{\approx} \frac{16\pi(m\alpha R^2)^2}{\hbar^4}; \quad \sigma(E) \underset{E \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\pi m\alpha^2 R^2}{\hbar^2 E} \ln \frac{8mER^2}{\hbar^2}$$

$$1.3. f = -\frac{\pi m\alpha}{\hbar^2(1+q^2R^2)}; \quad \sigma(E) = \frac{8\pi mR^4U_0^2}{3\hbar^2 E} \left[ 1 - \frac{1}{(1+8mER^2/\hbar^2)^3} \right]$$

1.4.  $f = -\frac{\pi m\alpha}{\hbar^2 q} = -\frac{\pi m\alpha}{2\hbar^2 k \sin(\theta/2)}$ ; სრული კვეთა უსასრულოა, რაც იმასთან არის დაკავშირებული, რომ პოტენციალი საკმარისად ნელა ეცემა დიდ მანძილებზე.

$$1.5. f = -\frac{\sqrt{\pi}mU_0R^3}{2\hbar^2} e^{-\frac{q^2R^2}{4}}; \quad \sigma(E) = \frac{\pi^2 mU_0^2 R^4}{4\hbar^2 E} \left( 1 - e^{-\frac{4mER^2}{\hbar^2}} \right)$$

$$1.6. f = \frac{2mU_0R}{\hbar^2 q^2} \left( \cos qR - \frac{\sin qR}{qR} \right);$$

$$\sigma(E) = \frac{2\pi}{k^2} \left( \frac{mU_0R^2}{\hbar^2} \right)^2 \left[ 1 - \frac{1}{(2kR)^2} + \frac{\sin 4kR}{(2kR)^3} - \frac{\sin^2 2kR}{(2kR)^4} \right]$$

საიდანაც ზღვრულ შემთხვევებში მიიღება:

$$\sigma(E) \underset{E \rightarrow 0}{\approx} \frac{16\pi m^2 U_0^2 R^6}{9\hbar^4}; \quad \sigma(E) \underset{E \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\pi m U_0^2 R^4}{\hbar^2 E}$$

$$1.8. f(q) = \frac{2(8 + q^2 a_B^2)}{(4 + q^2 a_B^2)^2} a_B; \quad \sigma = \frac{7\pi a_B^2}{3(ka_B)^2}$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ ბორნის გამოყენების ამ თავის შესავალი ნაწილის (1.7) პირობა ამ ამოცანაში  $ka_B \gg 1$  სახეს ღებულობს.

$$1.9. \sigma = \pi C \frac{Z^{4/3}}{k^2}$$

1.10.

$$f^{(n)}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \left(-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^n \iiint \tilde{U}(\vec{k} - \vec{\tau}_{n-1}) \frac{\tilde{U}(\vec{\tau}_{n-1} - \vec{\tau}_{n-2}) d\vec{\tau}_{n-1}}{2\pi^2(\vec{\tau}_{n-1}^2 - \vec{k}_0^2 - i\varepsilon)} \cdots \frac{\tilde{U}(\vec{\tau}_1 - \vec{k}_0) d\vec{\tau}_1}{2\pi^2(\vec{\tau}_1^2 - \vec{k}_0^2 - i\varepsilon)}$$

1.11.  $\text{Im} f^{(2)}(E, \theta = 0) = \frac{k\sigma_B(E)}{4\pi}$ . ეს ფორმულა კი ოპტიკური თეორემაა შეშფოთების მეორე რიგში.

1.12.

$$f^{(2)}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{2m^2 \alpha^2 R^3}{\hbar^4} \left\{ \frac{2 \arctg(qR/2\sqrt{\Delta(k, q)})}{qR\sqrt{\Delta(k, q)}} + \frac{i}{qR\sqrt{\Delta(k, q)}} \ln \frac{\sqrt{\Delta(k, q)} + kqR^2}{\sqrt{\Delta(k, q)} - kqR^2} \right\}$$

სადაც  $\Delta(k, q) = 1 + k^2 R^2 (4 + q^2 R^2)$

$$1.13. f^{(2)} \approx -\frac{\sqrt{2\pi} m^2 U_0^2 R^3}{\hbar^4 q^2} \exp\left\{-\frac{1}{8} q^2 R^2\right\}$$

$$1.15. f^{(2)} = i \frac{\pi n^2 U_0^2 R^4}{8\hbar^4 k_0} e^{-\frac{q^2 R^2}{8}}$$

$$1.18. f(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{e}{4\pi\hbar c} (\vec{k} + \vec{k}_0) \tilde{A}(\vec{q})$$

სადაც  $\tilde{A}(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}) dV$  ვექტორული პოტენციალის ფურიე კომპონენტი.

$$1.20. F(k) = \left[ \frac{3}{R^3 k^2} \left( \frac{\sin kr}{k} - r \cos kr \right) \right]^2$$

$$1.21. F(k) = \left[ \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{r^2 k^2}{4}} \right]^2$$

$$1.22. \sigma = \frac{\pi^2}{n-2} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right]^2 \left( \frac{m\alpha}{k\hbar^2 a^{n-2}} \right)^2$$

$$1.23. f(\varphi) = -\frac{m}{\hbar^2 \sqrt{2\pi k}} \int U(\vec{\rho}) e^{-i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho, \text{ სადაც } \vec{\rho} = (x, z) \text{ ორგანზომილებიანი}$$

რადიუსვექტორია,  $d^2\rho = dx dz$ , ხოლო  $\varphi$  გაფანტვის კუთხეა  $xz$  სიბრტყეზე. ორგანზომილებიან შემთხვევაში გაფანტვის ამპლიტუდის განზომილებაა ფესვი სიგრძიდან, ხოლო  $d\sigma = |f|^2 d\varphi$  გაფანტვის კვეთას სიგრძის განზომილება გააჩნია.

$$1.24. \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 g^2}{4\pi^2 \hbar^4}; \quad \sigma = \frac{m^2 g^2}{\pi \hbar^4}$$

$$1.25. \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{A^2 m^2 e^2}{9\hbar^4}$$

$$1.26. R = \sqrt{\frac{10}{q_0^2 |f(0)|}} (|f(0)| - |f(q_0)|)$$

1.27. მცირე მანძილებზე  $V$  პოტენციალს  $r^{\frac{N}{2}-3}$ -ის მსგავსი სახე აქვს.

$$1.28. (\nabla^2 + k^2)\psi(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V e^{ikz}$$

1.29. გრინის ფუნქციაა:

$$G(x) = -\frac{1}{2\hbar} e^{i|k|x}$$

შრედინგერის განტოლება ინტეგრალური სახით ასე იწერება:

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x_0|} V(x_0) \psi(x_0) dx_0$$

სადაც  $\psi_0(x)$  შრედინგერის ერთგვაროვანი განტოლების:

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \psi_0(x) = 0$$

ამონახსნია.

1.31. ბორნის მიახლოებაში:

$$f(q) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-iqr} V(r) dV = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty \sin qr V(r) dr \quad (1)$$

და თუ  $\sigma(E) = \int |f(q)|^2 d\Omega$ , სრული კვეთის გამოსათვლელ ფორმულაში  $\theta, \varphi$  კუთხური ცვლადებიდან გადავალთ  $q^2 = 2k^2(1 - \cos\theta)$ ,  $\varphi$  ცვლადებზე, მივიღებთ:

$$E\sigma(E) = \frac{\pi\hbar^2}{2m} \int_0^{\frac{8mE}{\hbar^2}} |f(q)|^2 dq^2 \quad (2)$$

საიდანაც უკვე ჩანს დასამტკიცებელი ტოლობის სამართლიანობა.

$$1.32. \text{ ა) } \delta_0(k) = -\frac{2mRV_0 \sin^2 kR}{k\hbar^2} \quad (1)$$

$$\text{ბ) } \delta_0(k) = -\frac{4mR^3 U_0 k}{\hbar^2 (1 + 4k^2 R^2)} \quad (2)$$

ნელი ნაწილაკებისათვის, როცა სრულდება პირობა  $kR \ll 1$ , გაფანტვის სრული კვეთა გამოითვლება ფორმულით:

$$\sigma \approx 4\pi [\delta_0(k)/k]^2 \quad (3)$$

(3) ფორმულაში უნდა ჩაისვას (1) და (2) ფორმულები.

## თავი 2. გაფანტვის ფაზური თეორია

$$2.2. f^B = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left\{ -\frac{\pi m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty U(r) [J_{l+1/2}(kr)]^2 r dr \right\} P_l(\cos\theta)$$

$$2.3. \text{ ა) } \left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{1}{r^2} \left[ \frac{2\mu g}{\hbar^2} + l(l+1) \right] \right) \chi_{kl}(r) = 0.$$

ამ განტოლების რეგულარული ამონახსნია  $\chi_{kl}(r) = \sqrt{\frac{2k^2 r^2}{\pi}} j_{\tilde{l}}(kr)$ , სადაც  $j_{\tilde{l}}(kr)$

ბესელის სფერული ფუნქციაა, ხოლო  $\tilde{l}$  განისაზღვრება შემდეგი თანაფარდობიდან:  $\tilde{l}(\tilde{l}+1) = l(l+1) + \frac{2\mu g}{\hbar^2}$ .

$$2.4. \text{ ა) } \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{k^2} \propto \frac{1}{E} \Big|_{\theta=\text{const}} \quad \text{ბ) } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2 \mu^2 g^2}{4\hbar^4 k^2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$



$$2.5. \Psi_{k_0}^+(\vec{r}) = e^{ikr} + \frac{f(E)}{r} e^{ikr}$$

$$f(E) = -\frac{a_0}{1+ika_0}; \quad \sigma = 4\pi|f|^2 = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(E) = \frac{4\pi a_0^2}{1+k^2 a_0^2}, \text{ სადაც } a_0 \text{ არის გა-}$$

ფანტვის სიგრძე.

$$2.6. U(r) = -\frac{2\hbar^2}{\pi m r} \int_0^\infty \sin(2kr) \frac{d}{dk} [k\delta_0(k)] dk$$

$$2.7. \text{ა) } U(r) = \frac{\gamma}{r^2}; \quad \text{ბ) } U(r) = U_0 e^{-e/R}$$

$$2.8. \delta_l^B(k) = -(-1)^l \frac{\pi m}{\hbar^2} \int_0^\infty U(r) J_{l+1/2}^2(kr) r dr$$

$$2.12. f^{(2)}(\vec{k}_0, \vec{k}_0) = \frac{m^2}{8\pi^4 \hbar^4} \int \frac{|\tilde{U}(\tau - \vec{k}_0)|^2}{\tau^2 - k_0^2 - i\varepsilon} d^3\tau; \quad f^{(2)}(E, \theta = 0) = \frac{k\sigma_B(E)}{4\pi}.$$

ეს თანაფარდობა წარმოადგენს ოპტიკურ თეორემას შემფოთების მეორე რიგში.

$$2.13. f(\varphi) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi k}} \sum_{m=-\infty}^\infty (e^{2i\delta_m} - 1) e^{im\varphi}; \quad \sigma = \int_0^\infty |f|^2 d\varphi = \frac{4}{k^2} \sum_{m=-\infty}^\infty \sin^2 \delta_m$$

$$2.14. \operatorname{Im} f(0) = \sqrt{\frac{k}{8\pi}} \sigma$$

$$2.15. f = i \frac{\exp[i(m_0 - 1/2)\varphi]}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\sin \pi\lambda}{\sin(\varphi/2)}; \quad \lambda = \frac{e\Phi_0}{2\pi\hbar c}; \quad \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\sin^2(e\Phi_0/2\hbar c)}{2\pi k \sin^2(\varphi/2)}$$

სადაც  $m_0$ -ით აღნიშნულია  $m$  მაგნიტური რიცხვის ის მნიშვნელობა, რომელიც ჯერ კიდევ მეტია  $\lambda$ -ზე.

$$2.16. \text{ა) } \delta_l(k)_{k \rightarrow \infty} = -\frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty U(r) \sin^2\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) dr \approx -\frac{m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty U(r) dr \propto \frac{1}{k}$$

$$\text{ბ) } \delta_l(k)_{k \rightarrow \infty} = -\frac{\pi m \alpha}{\hbar^2} k^{\nu-2} \int_0^\infty \frac{J_{l+1/2}^2(x)}{x^{\nu-1}} \propto k^{\nu-2}$$

$$\text{გ) } \delta_l \propto -\frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \ln kR$$

$$2.19. \delta_0(k) = -kr_0; \quad f(k) = \frac{1}{k} e^{-ikr_0} \sin kr_0 \approx r_0 e^{-ikr_0};$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^{-2} \sin^2 kr_0 \approx r_0^2; \quad \sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 kr_0 \approx 4\pi r_0^2$$

$$2.20. \operatorname{tg} \delta_l(k) = \frac{\cos kr_0 - \frac{\sin kr_0}{kr_0}}{\frac{\cos kr_0}{kr_0} + \sin kr_0}$$

2.22.

	$\operatorname{tg} \delta_l$	$\delta_l$	$\sin \delta_l$
$l=0$	-1,56	-1,00	-0,84
$l=1$	-0,22	-0,22	-0,22
$l=2$	-0,02	-0,02	-0,02

$$2.23. \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{0,\pi} = a^2 \left| \sin^2 \delta_0 \pm 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1) + 9 \sin^2 \delta_1 \right|$$

ამ ფორმულაში ისარგებლეთ წინა ამოცანის ცხრილით.

სრული კვეთა მოიცემა ამ თავის შესავალი ნაწილის (II.3) ფორმულით, რომელიც

$l=0,1$ ;  $k=a^{-1}$ -თვის შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\sigma = 4\pi a^2 [\sin^2 \delta_0 + 3 \sin^2 \delta_1] \approx 0,854\pi a^2$$

$$2.25. \text{ ა) } \operatorname{tg} \delta_0 = -\frac{2ka}{\pi} \ll 1; \quad \text{ ბ) } \sigma_0 = \frac{64}{\pi} a^2$$

$$2.26. \text{ ა) } (\sigma_0)^{s=0} = \frac{64}{\pi} a^2; \quad \text{ ბ) } \sigma_0 = \frac{16}{\pi} a^2$$

$$2.27. e^{ikz} = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

$$2.28. \delta(\delta_l) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} \chi_l^2 \delta U dr$$

2.29. დისკრეტული სპექტრი განისაზღვრება განტოლებიდან:

$$J_{2ak_n}(2a\lambda) = 0; \quad E_n = -\frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \quad (1)$$

სადაც

$$\lambda^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2}; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2)$$

$\delta_0$  – გაფანტვის ფაზა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$e^{2i\delta_0} = \frac{J_{2aki}(2a\lambda) \Gamma(2aki+1)}{J_{-2aki}(2a\lambda) \Gamma(-2aki+1)} e^{-4aki \ln a\lambda} \quad (3)$$

ბმულ მდგომარეობას შეესაბამება წმინდად წარმოსახვითი  $k = ik_n$  მნიშვნელობა (ამ შემთხვევაში ენერგია უარყოფითია).

2.30.  $s$  ტალღის წვლილი გაფანტვის სრულ კვეთაში მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma = \frac{2\pi\hbar^2}{mE} \frac{1}{1 + \frac{2a^2 mE}{\hbar^2}}$$

**თავი 3. იოსტის ფუნქციები და რეჯეს პოლუსები. ლიპმან-შვინგერის განტოლება**

$$3.3. F_0(\pm k) = e^{\mp ikr_0} \left[ \cos Kr_0 \pm i \frac{k}{K} \sin Kr_0 \right];$$

$$S_0(k) = \frac{F_0(k)}{F_0(-k)} = \frac{K \cos Kr_0 + ik \sin Kr_0}{K \cos Kr_0 - ik \sin Kr_0} e^{-2ikr_0}$$

$$\text{სადაც } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}; \quad K^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$$

3.7. ბარგმანის ზოლი განისაზღვრება შემდეგი არით:

$$-\frac{1}{2r_0} < \text{Im}(k) < \frac{1}{2r_0}$$

$$3.10. R_{l,k}(a) = \frac{aj_l(ka)e^{i\delta_l(k)}}{1 - ka^2 U_0 j_l(ka) h_l^{(+)}(ka)}; \quad A_l(k) = \frac{agm[j_l(x)]^2}{1 - gx j_l(x) h_l^{(+)}(x)};$$

$$S_l(k) = 1 + \frac{2igx[j_l(x)]^2}{1 - gx j_l(x) h_l^{(+)}(x)}$$

$$3.11. U_0 = \frac{1}{a}(2l_0 + 1)$$

$$3.27. f(\vec{k}, \vec{k}_0) \equiv f(k) = -\frac{\lambda m}{2\pi\hbar^2} \frac{g^2(k)}{1 + K(k)}$$

$$\text{სადაც } K(k) = \frac{\lambda m}{4\pi^3 \hbar^2} \int \frac{|g(\zeta)|^2 d^3 \zeta}{\zeta^2 - k^2 - i\epsilon}$$

გაფანტვა იზოტროპულია და ამიტომ სრული კვეთაა  $\sigma(E) = 4\pi|f|^2$ .

**თავი 4. ნელი ნაწილაკების გაფანტვა. რეზონანსული მოვლენები გაფანტვისას**

$$4.1. \nu < 3\text{-თვის } f = \frac{C_\nu}{q^{3-\nu}}; \quad C_\nu = \frac{\pi m \alpha}{\hbar^2 \Gamma(\nu-1) \cos(\pi\nu/2)}; \quad q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

ამიტომ სრული კვეთა იქნება:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi f^2 \sin \theta d\theta \underset{E \rightarrow 0}{\approx} 2\pi C_\nu^2 \left( \frac{\hbar^2}{4mE} \right)^{3-\nu} \int_{-1}^1 \frac{dz}{(1-z)^{3-\nu}} \propto \frac{1}{E^{3-\nu}} \rightarrow \infty$$

$\nu = 3$ -თვის  $f \approx \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \ln qR$  და სრული კვეთა იქნება:

$$\sigma = \int f^2 d\Omega \approx \int \frac{4m^2 \alpha^2}{\hbar^4} \ln^2 kR d\Omega = \frac{16\pi m^2 \alpha^2}{\hbar^4} \ln^2 kR \rightarrow \infty$$

$$4.2. \quad \delta_l^B(k) \approx k^{2l+1} [A_l + B_l k^2 + \dots] \propto k^{2l+1} \quad (1)$$

სადაც

$$A_l = c_l \int_0^\infty U(r) r^{2l+2} dr; \quad B_l = -\frac{c_l}{2l+3} \int_0^\infty U(r) r^{2l+4} dr; \quad c_l = -\frac{\pi m}{2^{2l+1} \Gamma^2(l+3/2) \hbar^2} \quad (2)$$

4.3. ექსპონენციალურად დაცემადი პოტენციალებისათვის არ არის არავითარი შეზღუდვა  $l$ -ზე.

უსასრულობაში  $U \approx \frac{\alpha}{r^\nu}$  კანონით დაცემადი პოტენციალებისათვის გვაქვს სამი შემთხვევა:

ა)  $l < \frac{\nu-5}{2}$ -თვის წინა ამოცანის (2) ფორმულაში შემავალი ინტეგრალები კრება-

დია ინტეგრაციის ზედა საზღვრებზე და  $a_l$  გაფანტვის სიგრძისა და  $r_l$  ურთიერთქმედების ეფექტური რადიუსის შემოღება შეიძლება.

ბ)  $\frac{\nu-5}{2} \leq l < \frac{\nu-3}{2}$ -თვის მეორე ინტეგრალი წინა ამოცანის (2) ფორმულაში განშლადია, მაგრამ გაფანტვის სიგრძის შემოტანა მაინც შეგვიძლია, ანუ ნელი ნაწილაკებისათვის კვლავ შეიძლება დაინეროს:  $\delta_l \approx -a_l k^{2l+1}$ .

გ)  $l \geq \frac{\nu-3}{2}$ -თვის უკვე აღარ შეიძლება  $\delta_l \approx -a_l k^{2l+1}$  დანერა, ანუ  $a_l$  გაფანტვის სიგრძისა და  $r_l$  ურთიერთქმედების ეფექტური რადიუსის შემოღება შეუძლებელია.

4.4.  $l < \frac{\nu-3}{2}$ -თვის გვაქვს:  $\delta_l = A_l k^{2l+1}$ .

$l \geq \frac{\nu-3}{2}$ -თვის გვაქვს:

$$\delta_l \approx -\frac{\pi m \alpha}{\hbar^2} k^{\nu-2} \int_{kR}^{\infty} \frac{1}{x^{\nu-1}} J_{l+1/2}^2(x) dx \quad (1)$$

$l > \frac{\nu-3}{2}$ -თვის (1)-ში შეიძლება ინტეგრების ქვედა საზღვარი შეიცვალოს ნულით და მიიღება:

$$\delta_l \approx -\frac{\pi m \alpha}{\hbar^2} \frac{\Gamma(\nu-1) \Gamma\left(l + \frac{3-\nu}{2}\right)}{2^{\nu-1} \Gamma^2\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(l + \frac{\nu+1}{2}\right)} k^{\nu-2} \quad (2)$$

$l = \frac{\nu-3}{2}$ -თვის (1) ინტეგრალი განშლადია ქვედა საზღვარზე და ფაზურ წანაცვლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\delta_l \approx \frac{\pi m \alpha}{2^{2l+1} \Gamma^2(l+3/2)} k^{2l+1} \ln kR$$

4.5.  $\frac{\nu-5}{2} < l < \frac{\nu-3}{2}$ -თვის გვექნება:

$$\delta_l + a_l k^{2l+1} \approx -\frac{\pi m \alpha}{\hbar^2} k^{\nu-2} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\nu-1}} \left[ J_{l+1/2}^2 - \frac{x^{2l+1}}{2^{2l+1} \Gamma^2(l+3/2)} \right] dx \quad (1)$$

$l = \frac{\nu-5}{2}$ -თვის გვექნება:

$$\delta_l + a_l k^{2l+1} \approx -\frac{\pi m \alpha}{2^{2l+1} (2l+3) \Gamma^2(l+3/2)} k^{2l+3} \ln kR \quad (2)$$

კერძოდ, უსასრულობაში  $U \approx \alpha/r^4$  დაცემის მქონე პოტენციალებისათვის (ანუ  $\nu = 4$ ),  $l = 0$ -თვის, (1) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\delta_l + a_l k^{2l+1} \approx -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} k^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3} \left[ \frac{\sin^2 x}{x} - x \right] dx = \frac{2\pi m \alpha}{3\hbar^2} k^2$$

და ეფექტური რადიუსის გაშლის (IV.1) ფორმულის მოდიფიკაციას შემდეგი სახე აქვს:

$$kctg\delta_0(k) \approx -\frac{1}{a_0} + \frac{\pi m \alpha}{\hbar^2 a_0^2} k$$

$$4.6. \text{ ა) } a_0 = \left(1 - \frac{1}{\lambda} t g \lambda\right) R; \quad \text{ ბ) } a_0 = -\frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} R;$$

$$\text{ ვ) } a_0 = \frac{\pi R}{J_0(2\lambda)} \left[ \frac{2}{\pi} J_0(2\lambda) \ln \lambda - N_0(2\lambda) \right]$$

$$4.7. \text{ ა) } a_0 = \xi R c t g \left( \frac{1}{2} \pi \xi \right), \quad \text{ სადაც } \xi = \sqrt{1 + \lambda^2}; \quad \text{ ბ) } a_0 = \lambda R$$

$$4.8. \quad a_0 = 2\sqrt{c^2 - b^2} \left[ \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - b^2}}{c - \sqrt{c^2 - b^2}} \right]^{-1} \quad (1)$$

$c = b$ -თვის (1)-დან მივიღებთ  $a_0 = c$  და  $\sigma = 4\pi c^2$  ანუ ცნობილ შედეგს  $R = c$  რადიუსის მქონე აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე გაფანტვისას.

$c \gg b$ -თვის (1)-დან მიიღება:

$$a_0 \approx \frac{c}{\ln(2c/b)}; \quad \sigma(E=0) \approx \frac{4\pi c^2}{(\ln(2c/b))^2}$$

$$4.9. \quad a_0 = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\arccos \frac{c}{b}}$$

$$4.10. \quad a_0 = \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2}}$$

$$4.11. \quad a_0 = \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2}} \left( 1 + \frac{\hbar b}{\sqrt{32m\alpha}} \right)$$

$$4.12. \quad a_0 = \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2}} \left( 1 + \frac{\hbar b_1}{\sqrt{32m\alpha}} + \frac{\hbar^2}{64m\alpha} (8b_2 - 5b_1^2) \right)$$

$$4.13. \quad a_0 = \frac{\Gamma \left[ \frac{\nu - 3}{\nu - 2} \right]}{\Gamma \left[ \frac{\nu - 1}{\nu - 2} \right]} \left( \frac{2m\alpha}{(\nu - 2)\hbar} \right)^{-\frac{2}{\nu - 2}} + \frac{b}{\nu}$$

სადაც  $\Gamma(z)$  გამა ფუნქციაა.  $\nu \rightarrow 3$  ზღვარში  $a_0 \rightarrow \infty$ , რაც იმ ფაქტის გამოხატულებაა, რომ  $V = \alpha/r^3$  პოტენციალისათვის ნაწილაკების გაფანტვის კვეთა  $E \rightarrow 0$  ზღვარში უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის.

$$4.14. a_0 = R \left[ \ln \left( \frac{2mU_0 R^2}{\hbar^2} \right) + 2C \right]$$

სადაც  $C = 0,5772\dots$  ეილერის მუდმივაა.

$$4.15. a_0 \approx \frac{\Gamma[1-s] \sin(\tau + \pi s/2 + \pi/4)}{\Gamma[1+s] \sin(\tau - \pi s/2 + \pi/4)} \left( s \sqrt{\frac{2m\alpha}{\hbar^2}} \right)^{2s} \quad (1)$$

$$\text{სადაც } s = \frac{1}{\nu-2}; \quad \tau = \frac{1}{\hbar} \int_0^\infty \sqrt{-2mU(r)} dr + \gamma \quad \text{და} \quad \gamma = -\frac{\pi\beta}{4(2-\beta)}$$

გაფანტვის სიგრძე უსასრულო ხდება პოტენციალის პარამეტრების იმ მნიშვნელობებისათვის, როდესაც ორმოს სიღრმის მომატებისას, მასში ჩნდება დისკრეტული სპექტრის ახალი დონე.  $l=0$ -თვის ეს ხდება მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^\infty \sqrt{-2mU(r)} dr = \pi \left( N + \frac{\beta}{4(2-\beta)} + \frac{1}{2(\nu-2)} - \frac{1}{4} \right) \quad (2)$$

სადაც  $N = 1, 2, \dots$  გაჩენილი ახალი დონის რიგის ნომერია.

ამოცანის პირობაში მითითებული პოტენციალებისათვის  $\nu = 4, s = 1/2, \gamma = \beta = 0$  და (1) ფორმულიდან მიიღება:

$$a) a_0 = R \xi \operatorname{ctg} \xi; \quad b) a_0 = R \xi \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} \xi \right), \quad \text{სადაც } \xi = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{\hbar R}.$$

$$4.16. \Delta E_{n,l} = \frac{\hbar^2}{2m} [(2l+1)!!]^2 Q_{n,l}^2 a_l^{(s)}$$

სადაც  $Q_{n,l}$  კოეფიციენტი  $R_{n,l}$  რადიალური ფუნქციის სათავეში ყოფაქცევის ფორმულაში. კერძოდ,  $R_{n,l}(r) \approx Q_{n,l} r^l$ . ასე მაგალითად,  $l=0$  მდგომარეობებისათვის  $Q_{ns}^2 = 4\pi \Psi_{ns}^2(0)$ .

$$4.17. \quad \Delta\delta_l^{(s)} = -\frac{2m}{\hbar^2 k} Q_{kl}^2 \int_0^\infty r^{2l+2} U_s(r) dr \quad (1)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, (1) გამოსახულებაში ინტეგრალი გამოისახება გაფანტვის სიგრძის საშუალებით ბორნის მიახლოებაში (იხილეთ წინა ამოცანა). თუ მას შევცვლით ზუსტი გაფანტვის სიგრძით, მიიღება:

$$\Delta\delta_l^{(s)} = -[(2l+1)!!]^2 a_l^{(s)} \frac{Q_{kl}^2}{k} \quad (2)$$

4.18. მოცემულ პირობებში გაფანტვის ამპლიტუდას შემდეგი სახე აქვს:

$$f \approx f_{Coulomb} + f_S; \quad f_{Coulomb} = \pm \frac{Ze^2 m}{2\hbar^2 k^2 \sin^2(\theta/2)}, \quad f_S = -a_0^{(s)} \quad (1)$$

ამიტომ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Ze^2}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + (a_0^{(s)})^2 \mp \frac{Ze^2 a_0^{(s)}}{mv^2 \sin^2(\theta/2)} \quad (2)$$

ბოლო ნევრი (2) ფორმულაში შეესაბამება კულონური და მოკლე ქმედების პოტენციალის ინტერფერენციას და დამოკიდებულია  $a_0^{(s)}$  გაფანტვის სიგრძის ნიშანზე.

$$4.19. \text{ ა) } a_l = \frac{1}{(2l-1)!!(2l+1)!!} R^{2l+1} = A; \quad \text{ ბ) } a_l = \frac{\xi}{\xi - 2l - 1} A; \quad \xi = \frac{2m\alpha R}{\hbar^2}$$

$$4.20. \quad a_l = -\frac{J_{l+1/2}(\lambda)}{J_{l-1/2}(\lambda)} A; \quad \lambda = \sqrt{\frac{2mU_0 R^2}{\hbar^2}}$$

$$4.22. \text{ ა) } r_0 = \frac{4}{3}R; \quad \text{ ბ) } r_0 = R$$

$$4.24. \quad r_l = -\frac{4(2l-3)!!(2l+1)!!}{2l+3} R^{1-2l}, \quad l \gg 1$$

4.25. ა)  $\delta_0 = -kR$ ; ნელი ნაწილაკების სრული კვეთა, როცა  $kR \ll 1$  მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma \approx \sigma_{l=0}(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \approx 4\pi R^2 \left( 1 - \frac{1}{3} k^2 R^2 \right)$$

ბ) აქაც შეიძლება  $\delta_0(k)$  გვეპოვნა შრედინგერის განტოლების ზუსტი ამოხსნიდან, მაგრამ უმჯობესია ნელი ნაწილაკების გაბნევა განიხილოთ (IV.1) ეფექტური რადიუსის გაშლის ფორმულის გამოყენებით. მიიღება:



$$a_0 = \frac{\tilde{\alpha}R}{\tilde{\alpha}-1}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{2m\alpha R}{\hbar^2}, \quad \sigma \approx 4\pi a_0^2$$

$$4.26. \quad a_l = -\frac{1}{(2l-1)!!(2l+1)!!} \frac{\tilde{\alpha}}{2l+1-\tilde{\alpha}} R^{2l+1}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{2m\alpha R}{\hbar^2} \quad (1)$$

სანამ  $\tilde{\alpha}$  არ არის ახლოს  $2l+1$ -თან, გაფანტვას აქვს არარეზონანსული ხასიათი და ნელი ნაწილაკებისათვის:

$$\sigma_l \approx 4\pi(2l+1)a_l^2 k^{4l} \quad (2)$$

თუ  $\tilde{\alpha}$  ახლოსაა  $2l+1$ -თან, მაშინ გაფანტვას რეზონანსული ხასიათი აქვს და ეფექტური რადიუსი მოიცემა ფორმულით:

$$r_l \approx -4(2l-3)!!(2l+1)!! \frac{R^{1-2l}}{2l+3} \quad (3)$$

ენერგეტიკული სპექტრი განისაზღვრება  $f_l(E) = \frac{1}{k(ctg\delta_l - i)}$  პარციალური ამპ-

ლიტუდის პოლუსებით.  $E_l$  პოლუსში მიიღება  $ctg\delta_l(E) = i$  და ეფექტური გამზლის (IV.1) ფორმულის საშუალებით მიიღება განტოლება:

$$ik_R^{2l+1} = -\frac{1}{a_l} + \frac{1}{2}r_l k_R^2 \quad (4)$$

$l \gg 1$  შემთხვევაში (4) განტოლების მარცხენა მხარე მცირეა და შეგვიძლია იტერაციების ჩატარება. „ნულოვან“ მიახლოებაში (თუ უგულებელვყოფთ (4) განტოლების მარცხენა მხარეს), მიიღება:

$$E_R \approx \frac{\hbar^2}{mr_l a_l} \approx \frac{(2l-1)(2l+3)(2l+1-\tilde{\alpha})}{4(2l+1)} \frac{\hbar^2}{mR^2} \quad (5)$$

ამ შემთხვევაში, ნელი ნაწილაკების გაფანტვისას  $f_l \approx (kctg\delta_l)^{-1}$  და პარციალური სრული განიკვეთი იქნება:

$$\sigma_l(E) = 4\pi(2l+1)|f_l|^2 \approx 4\pi(2l+1) \frac{\hbar^4}{m^2 r_l^2} \frac{k^{4l}}{(E + |E_R|^2)} \quad (6)$$

$a_l < 0$ -თვის (ანუ, როცა  $\tilde{\alpha} < 2l+1, l \gg 1$ ) სიტუაცია იცვლება. ახლა, (5)-ის თანახმად,  $E_R > 0$  და (4) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოსახვითია. შემდგომი იტერაცია საშუალებას იძლევა მიიღოთ ამპლიტუდის პოლუსის წარმოსახვითი ნაწილი  $E_l = E_R - i\Gamma_R/2$ , რომელიც განსაზღვრავს კვაზიდისკრეტული მდგომარეობის სიგანეს:

$$\Gamma_R \approx \frac{2\hbar^2}{m|r_l|} k_R^{2l+1} \approx (k_R R)^{2l+1} \frac{\hbar^2}{mR^2}, \quad k_R = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_R} \quad (7)$$

ამ შემთხვევაში გაფანტვის პარციალური  $\sigma_l(E)$  კვეთა ენერგიებით, რომლებიც ახლოს არიან  $E_R$ -თან,  $\Gamma_R$  სიგანით, მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\sigma_l(E) \approx \frac{\pi(2l+1)}{k^2} \frac{\Gamma_R^2}{(E - E_R)^2 + \frac{\Gamma_R^2}{4}} \quad (8)$$

$$4.27. \frac{\hbar^2}{2[(2l-1)!!]^2 ma_l} = -\int_0^\infty \delta U \chi_l \chi_l^{(0)} dr \approx -\int_0^\infty \delta U (\chi_l^{(0)})^2 dr$$

სადაც  $\chi_l^{(0)}$  და  $\chi_l$  შრედინგერის განტოლების რეგულარული ამოხსნებია ნულოვანი ენერგიით  $U_0(r)$  და  $U_0(r) + \delta U(r)$  პოტენციალებისათვის.

$$4.28. \text{ ა) } tg \delta_0 \approx -\frac{\gamma_0 ka^2}{1 + \gamma_0 a}, \quad \text{სადაც } \gamma_0 = KctgKa - \frac{1}{a}$$

$$tg \delta_1 \approx -\frac{(ka)^3}{3} \frac{1 - \gamma_1 a}{2 + \gamma_1 a}, \quad \text{სადაც } \gamma_1 = \frac{K^2 a}{1 - KactgKa} - \frac{2}{a}$$

ბ) გაფანტვის სრული კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

და ამ ჯამში, ამოცანის პირობების გამო, ვინარჩუნებთ მხოლოდ  $\delta_0$ -იან წევრს. ამიტომ:

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi \gamma_0^2 a^4}{(1 + \gamma_0 a)^2} = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{tg(Ka)}{Ka}\right)^2$$

4.29. ა)  $s$  ტალღებისათვის რეზონანსული გაფანტვა ხდება, თუ სრულდება პირობა:

$$Ka = (2n+1)\frac{\pi}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$p$  ტალღებისათვის რეზონანსული გაფანტვა ხდება, თუ სრულდება პირობა:

$$Ka = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$4.30. \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{k^2 a^2 + \left[ \xi_0 - \frac{(ka^2)}{2} \right]^2}, \quad \text{სადაც } ka \ll 1 \text{ და } \xi_0 = k_0 actg(k_0 a)$$

$$4.31. \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{9k^4 a^6 \cos^2 \theta}{(ka)^6 + \left[ \xi_1 - \frac{(ka^2)}{2} \right]^2}$$

$$4.32. \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a \right) = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a \quad 4.34. \frac{B}{A} = \frac{2}{5} (kr_0)^2$$

$$4.35. \sigma = \frac{4}{9} \pi a^2 (\lambda a)^4, \text{ სადაც } \lambda = \frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}.$$

$$4.36. \sigma = 4\pi a^2$$

$$4.37. f = \frac{\pi m \beta}{\hbar^2} \frac{q^{n-3}}{\Gamma(n-1) \cos \frac{\pi n}{2}}; \quad 2 < n < 3$$

$$f = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} \ln \frac{\text{const}}{q}; \quad n = 3$$

სადაც  $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$  გადაცემული იმპულსია, რომლის სიდიდეა  $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ .

$$4.38. f = -\left( \frac{\gamma}{n-2} \right)^{n-2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{n-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{n-2}\right)}$$

$$4.39. f = \frac{a\pi}{J_0(2\lambda a)} \left[ N_0(2\lambda a) - \frac{2}{\pi} \ln(\lambda a \gamma) J_0(2\lambda a) \right]$$

ამ ფორმულაში  $J_0$  და  $N_0$  ბესელის პირველი და მეორე გვარის ბესელის ფუნქციებია, ხოლო  $\gamma = e^C = 1,78\dots$ , სადაც  $C$  ეილერის მუდმივაა.

$$4.40. f = -\frac{2m}{\hbar^2} \int U r^2 dr + \frac{8m^2}{\hbar^4} \iint_{r' > r} U(r) U(r') r^2 dr r' dr'$$

$$4.41. f = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \frac{1}{\ln \left( i \frac{2}{\gamma k r_0} \right)}; \quad \sigma = 2\pi |f|^2 = \frac{\pi^2}{k} \frac{1}{\ln^2 \frac{2}{\gamma k r_0} + \frac{\pi^2}{4}}$$

4.42.  $r_0 = 2 \int_0^\infty (1 - \chi_0^2) dr$ , სადაც  $\chi_0$  ტალღური ფუნქციაა  $r \propto a$  არეში და, ამასთან,  $\chi_0 \rightarrow 1$ , როცა  $r \rightarrow \infty$ .

$$4.43. \delta(\delta_l) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty \chi_l^2 \delta U dr$$

$$4.44. a = \frac{1}{\lambda_0}, \text{ სადაც } \lambda_0 = \frac{\sqrt{2m|E_1|}}{\hbar}, \text{ ხოლო } E_1 \text{ ორმოში დონის ენერგიაა.}$$

$$r_0 = a$$

$$4.45. \int_0^a \chi^2 dr = 2 \left( a + \frac{d\delta_0}{dk} \right) - \frac{1}{k} \sin 2(ka + \delta_0) > 0$$

ამ ფორმულის მარცხენა მხარე დადებითი სიდიდეა და ამიტომ მარჯვენა მხარეც დადებითი სიდიდე უნდა იყოს, რაც, თავის მხრივ, შეზღუდვას ადებს  $\delta_0$  გაფანტვის ამპლიტუდას.

$$4.48. \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{\alpha^2} \left( \frac{\sin \delta_0}{2q} \right)^2 \quad (1)$$

$$\text{სადაც } \frac{k}{2\alpha} = q \quad (2)$$

$$\delta_0 = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{2m-1} \arctan \frac{2q}{n}, \quad \text{თუ } \lambda = 2m \quad (3)$$

$$\delta_0 = -\sum_{n=1}^{2m} \arctan \frac{2q}{n}, \quad \text{თუ } \lambda = 2m+1 \quad (4)$$

$$4.49. \delta_0 = -\frac{2\mu ak}{\hbar^2} \ln \frac{\beta \hbar^2}{\mu ak}; \quad \sigma_0 = \frac{16\pi \mu^2 a^2}{\hbar^4} \left( \ln \frac{\hbar^2}{\mu ak} \right)^2$$

$l \gg 1$ -თვის:

$$\sigma_l = \frac{4\pi \mu^2 a^2 (2l+1)}{\hbar^4 l^2 (l+1)^2}$$

4.50.  $k \ll 1$  პირობებში განიხილება მხოლოდ  $S$  ტალღები, რომელთათვის გაფანტვის ფაზური წანაცვლებაა:

$$\delta_0 = ka \left[ -\ln 2 + \psi(1) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1-s}{2}\right) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1+s}{2}\right) \right]^2 \quad (1)$$

სადაც

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu V_0 a^3}{\hbar^2} + 1} - \frac{1}{2}, \quad k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar}} \quad (2)$$

ხოლო  $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$ ,  $\Gamma(x)$  ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებულა.

სრული კვეთაა:

$$\sigma = 4\pi a^2 \left[ -\ln 2 + \psi(1) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1-s}{2}\right) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1+s}{2}\right) \right]^2 \quad (3)$$

4.51. ფაზური ნანაცვლება:

$$\delta_0 = ka \left[ -\ln 2 + \psi(1) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1-s}{2}\right) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1+s}{2}\right) \right]^2 \quad (1)$$

სადაც

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8\mu V_0 a^3}{\hbar^2}} - \frac{1}{2}, \quad k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar}} \quad (2)$$

ხოლო  $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$ ,  $\Gamma(x)$  ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებულა.

სრული კვეთაა:

$$\sigma = 4\pi a^2 \left[ -\ln 2 + \psi(1) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1-s}{2}\right) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1+s}{2}\right) \right]^2 \quad (3)$$

**თავი 5. სწრაფი ნაწილაკების გაფანტვა. ეიკონალის და კვაზიკლასიკური მიახლოებები**

$$5.2. \sigma(E) = 4\pi \int_0^R \left[ 1 - \cos \left( \xi \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \right) \right] \rho d\rho = 2\pi R^2 \left[ 1 - \frac{2}{\xi^2} (\xi \sin \xi + \cos \xi - 1) \right] \quad (1)$$

სადაც

$$\xi = \frac{2mU_0 R}{\hbar^2} \quad (2)$$

$\xi \ll 1$ -თვის შემთხვევაში (1)-დან მიიღება ბორნის მიახლოების შედეგი:

$$\sigma(E) \approx \pi R^2 \left( \frac{mU_0^2 R^2}{\hbar^2 E} \right) \ll \pi R^2 \quad (3)$$

ხოლო  $\xi \gg 1$ -თვის მიიღება:

$$\sigma(E) \approx 2\pi R^2 \quad (4)$$

$$5.3. \delta_0 = \frac{m a V_0}{\hbar^2 k}; \quad k = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$5.5. \quad \sigma(E) = 2\pi\Gamma(\lambda) \sin \frac{\pi\lambda}{2} \left[ \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\hbar\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right]^\mu \propto E^{-\frac{1}{\nu-1}} \quad (1)$$

სადაც:

$$\lambda = \frac{\nu-3}{\nu-1}; \quad \mu = \frac{2}{\nu-1} \quad (2)$$

$$5.7. \quad f(E, q) \approx -i \frac{2m|\alpha|}{\hbar^2 q^2} \exp\{iS(\rho_0, \varphi_0)\} \quad (1)$$

სადაც:

$$S = \frac{2\alpha}{\hbar\nu} \ln \frac{\rho}{2R} - qR \cos \varphi \quad (2)$$

ხოლო  $\rho_0 = \frac{2|\alpha|}{\hbar\nu q}$  და  $\varphi_0 = 0$ , როცა  $\alpha > 0$ ;  $\varphi_0 = \pi$ , როცა  $\alpha < 0$

5.8.

$$f(k, \vec{q}_\perp) = f_1(k, \vec{q}_\perp) \exp\left\{-\frac{i}{2} \vec{q}_\perp \vec{a}_\perp\right\} + f_2(k, \vec{q}_\perp) \exp\left\{\frac{i}{2} \vec{q}_\perp \vec{a}_\perp\right\} + \\ + \frac{i}{2\pi k} \int f_1\left(\vec{k}, \vec{\tau}_\perp + \frac{\vec{q}_\perp}{2}\right) f_2\left(\vec{k}, -\vec{\tau}_\perp + \frac{\vec{q}_\perp}{2}\right) \exp\{-i\vec{\tau}_\perp \vec{a}_\perp\} d^2\tau_\perp$$

სადაც  $\vec{a}_\perp, \vec{\tau}_\perp$  ვექტორების მდგენელებია, რომლებიც მართობია დაცემული ნაწილაკების  $\vec{n}_0$  იმპულსის, ხოლო  $f_1$  და  $f_2$  ცალკეულ ცენტრებზე გაფანტვის ამპლიტუდებია.

$$5.9. \quad \sigma_{tot} = \sigma_1 + \sigma_2 + \frac{2}{k^2} \operatorname{Re} \int F(2\tau_\perp) f_1(k, \tau_\perp) f_2(k, -\tau_\perp) d^2\tau_\perp$$

სადაც  $\sigma_1, \sigma_2$  სამიზნეს თავისუფალ ნაწილაკებზე გაფანტვის კვეთებია, ხოლო:

$$F(\vec{q}) = \int |\Psi_0(\vec{r})|^2 \exp\left\{-\frac{i}{2} \vec{q} \vec{r}\right\} d\vec{r}$$

შედგენილი სისტემის ფორმფაქტორია.

$$5.11. \quad f(k, \theta) = -ik \int_0^\infty (\cos 2\delta(\rho) - 1) J_0(k\rho\theta) \rho d\rho, \quad \delta(\rho) = -\frac{1}{2\hbar\nu} \int_{-\infty}^\infty U(\vec{\rho}, z) dz$$

გაცვლითი და ჩვეულებრივი პოტენციალების გაფანტვის სრული კვეთები ერთმანეთს ემთხვევა.

$$5.12. f \approx iR \frac{J_1(kR\theta)}{\theta}; \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{4}(kR)^2 R^2$$

$$5.13. f = -\frac{i}{2}R \exp\left\{-2ikR \sin \frac{\theta}{2}\right\}; \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

$$5.14. \sigma = 2\pi a^2 \left[1 + \frac{1}{2\nu^2} - \frac{\sin 2\nu}{\nu} - \frac{\cos 2\nu}{2\nu^2}\right] \quad (1)$$

სადაც:  $\nu = \frac{U_0 a}{\hbar v}$

$$5.15. \sigma = 2\pi a^2 \int_0^{\nu\sqrt{\pi}} (1 - \cos u) \frac{du}{u} \quad (1)$$

სადაც:  $\nu = \frac{U_0 a}{\hbar v}$  (2)

$\nu \ll 1$  მნიშვნელობებისათვის (1)-დან მიიღება:

$$\sigma = \frac{\pi a^2 \nu^2}{2} \quad (3)$$

$\nu \gg 1$  მნიშვნელობებისათვის (1)-დან მიიღება:

$$\sigma = 2\pi a^2 \ln(\nu\sqrt{\pi}e^C) \quad (4)$$

სადაც  $C$  ეილერის მუდმივაა.

5.16. გაფანტვის ამპლიტუდა მოიცემა ფორმულით:

$$f = \frac{i}{q} \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \sin \frac{e\Phi}{2\hbar c} \quad (1)$$

სადაც  $\Phi$  მაგნიტური ველის ნაკადია. ამიტომ დიფერენციალური კვეთა იქნება:

$$d\sigma = |f|^2 d\theta = \frac{2}{\pi k} \sin^2 \frac{e\Phi}{2\hbar c} \frac{d\theta}{\theta^2} \quad (2)$$

როგორც (2)-დან ჩანს, დიფერენციალური კვეთა მაგნიტური ველის პერიოდული ფუნქციაა და გაფანტვის სრული კვეთა უსასრულობაა ( $\theta \rightarrow 0$ -ის გამო), მიუხედავად იმისა, რომ ველი მოქცეულია სივრცის სასრულო არეში. ორივე ეს ეფექტი ნმინდა კვანტური ეფექტია.

$$5.17. \delta_l = -\frac{m\alpha k^{n-2}}{2\hbar^2 l^{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

სადაც  $\Gamma$  გამა ფუნქციაა.

$$5.18. \sigma = 2\pi^{\frac{n}{n-1}} \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{n-3}{n-1} \right) \right] \Gamma \left( \frac{n-3}{n-1} \right) \left[ \frac{\Gamma \left( \frac{n-1}{2} \right)^{\frac{2}{n-1}}}{\Gamma \left( \frac{n}{2} \right)} \right] \left( \frac{\alpha}{\hbar v} \right)^{\frac{2}{n-1}}$$

სადაც  $\Gamma$  გამა ფუნქციაა.

$n = 3$ -თვის უსასრულობების რეგულარიზაციით მიიღება:

$$\sigma = \frac{2\pi^2 \alpha}{\hbar v}$$

5.19.  $\theta(l)$  ფუნქციის  $l = l_0$  ექსტრემუმის ნერტილის მახლობლად  $\delta_l$  ფაზას შემდეგი სახე აქვს:

$$\delta_l \approx \delta_0 + \frac{\theta_0 l'}{2} + \frac{\alpha l'^3}{6} \quad (1)$$

სადაც  $\theta_0 = \theta(l_0)$ ,  $l' = l - l_0$ . გაფანტვის ამპლიტუდა მოიცემა ფორმულით:

$$|f(\theta)| = \frac{1}{k} \left( \frac{l_0}{2\pi \sin \theta_0} \right)^{1/2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left( -l' \theta' + \frac{\alpha}{3} l'^3 \right) \right\} dl' \right| \quad (2)$$

სადაც  $\theta' = \theta - \theta_0$ . (2) ინტეგრალი გამოისახება  $\Phi(x)$  ეირის ფუნქციებით და საბოლოოდ გაფანტვის დიფერენციალური კვეთისათვის მიიღება შემდეგი ფორმულა:

$$d\sigma = \frac{4\pi l_0}{\alpha^{2/3} k^2} \Phi^2 \left( -\frac{\theta'}{\alpha^{1/3}} \right) d\theta' \quad (3)$$

$$5.20. d\sigma = \frac{\pi l_0^2}{\beta k^2} J_0^2(l_0 \theta) d\theta$$

$$5.22. \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{J_{l+1/2}^2(ka)}{J_{l+1/2}^2(ka) + J_{-l-1/2}^2(ka)} \approx 2\pi a^2$$

**თავი 6. სპინის მქონე ნაწილაკების გაფანტვა**

$$6.1. \sigma = \frac{m^2}{4\pi \hbar^4 k^2} \int_0^{4k^2} \left\{ |U_0(q)|^2 + \left( k^2 - \frac{q^2}{4} \right) \left| \frac{\partial \tilde{U}_1(q)}{\partial q} \right|^2 \right\} dq^2,$$

სადაც  $\tilde{U}_{0,1}(q) = \int U_{0,1} \exp\{-i\vec{q}\vec{r}\} dV$



$$6.2. \hat{f} = \frac{2mZe^2}{\hbar^2 q^2} \left\{ 1 - i \frac{\hbar^2 k^2}{4m^2 c^2} \sin \theta \cdot (\vec{v} \hat{\sigma}) \right\}, \text{ სადაც } \vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} \vec{k}_0 \vec{k} \\ \vec{k}_0 \vec{k} \end{bmatrix}}$$

$$6.3. \hat{f} = i \frac{\beta Ze^2}{2Mc^2} \text{ctg} \frac{\theta}{2} (\hat{\sigma} \vec{v}), \text{ სადაც } \vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} \vec{k}_0 \vec{k} \\ \vec{k}_0 \vec{k} \end{bmatrix}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\beta Ze^2}{2Mc^2} \right)^2 \text{ctg}^2 \frac{\theta}{2}$$

6.4.  $\hat{U} = U_0(r) + U_1(r) \vec{l} \hat{\sigma}$  ურთიერთქმედების ოპერატორის ერმიტულობიდან გამომდინარეობს  $U_{0,1}(r)$  ფუნქციის ნამდვილობა, რის გამოც ნამდვილია  $\bar{U}_{0,1}(q)$ , მათი ფურიე კომპონენტები და, შესაბამისად, ნამდვილია ბორნის მიახლოებაში  $A$  და  $B$  ინვარიანტული ფუნქციები გაფანტვის ამპლიტუდის გამოსახულებაში:

$$\hat{f} = A(k, \theta) + iB(k, \theta) \nu \hat{\sigma}$$

ამ თავის შესავალი ნაწილის პოლარიზებული ნაწილაკების გაფანტვის ზოგადი (VI.3) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ დაჯახების შემდეგ პოლარიზაციის ვექტორი  $\vec{P} = 0$ , თუ საწყისი ნაწილაკები არ იყვნენ პოლარიზებული, ანუ  $\vec{P}_0 = 0$ .

$$6.6. \vec{P} = 2 \frac{Ze^2}{\hbar c} \frac{\nu \sin^3(\theta/2)}{c \cos(\theta/2)} \ln \left( \sin \frac{\theta}{2} \right) \nu, \text{ სადაც } \vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} \vec{k}_0 \vec{k} \\ \vec{k}_0 \vec{k} \end{bmatrix}}$$

პოზიტრონების გაბნევისას პოლარიზაციის ვექტორს საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს.

$$6.7. \delta_l^\pm \approx -\frac{m}{2\hbar\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U_0(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \pm k\rho U_1(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \right\} dz, \quad l = \rho k \gg 1.$$

$$6.8. \delta(\vec{k}_0, \vec{\rho}) = -\frac{m}{2\hbar\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U_0(\vec{\rho}, z) + U_1(\vec{\rho}, z) [\vec{\rho} \vec{k}_0] \hat{\sigma} \right\} dz$$

6.9.  $f = \sum_n \{ A_n(q) + iB_n(q) \vec{\sigma}_n \vec{v} \} \exp\{-i\vec{q} \vec{a}_n\}$ , სადაც  $\vec{a}_n$ ,  $n$ -ური ცენტრის რადიუსვექტორია.

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = A_0^2(q) \left| \sum_n e^{-i\vec{q} \vec{a}_n} \right|^2 + 2A_0(q)B_0(q) \sum_{k \neq n} \vec{P}_n \vec{v} \sin(\vec{q}(\vec{a}_n - \vec{a}_k)) + NB_0^2(q) + B_0^2(q) \sum_{k \neq n} \langle (\vec{\sigma}_n \vec{v})(\vec{\sigma}_n \vec{v}) \rangle \cos(\vec{q}(\vec{a}_n - \vec{a}_k))$$

ამ ფორმულაში გასაშუალოება ხდება სანყის ცენტრების სპინური მდგომარეობების მიხედვით.

6.10.  $S$  მატრიცის უნიტარობის პირობიდან მიიღება ოპტიკური თეორემა:

$$\text{Im}\langle \vec{p}, \alpha | \hat{f} | \vec{p}, \alpha \rangle = \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot}(\vec{p}, \alpha)$$

სადაც  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  დაჯახებული ნაწილაკების ფარდობითი იმპულსია, ხოლო  $\alpha$  ახასიათებს მათ სპინურ მდგომარეობას.

6.11. ა)  $[1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2] |\sin glet\rangle = (3 - 3) |\sin glet\rangle = 0$

$$[1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2] |triplet\rangle = (3 + 1) |triplet\rangle = 4 |triplet\rangle$$

ბ)  $tg \delta_0 = 0$ ;  $(\sigma)^{s=0} = 0$

6.12. ა) გაფანტვის ამპლიტუდა მოიცემა ფორმულით:

$$f(\theta) = \frac{3}{k} e^{i\delta_1} \sin \delta_1 P_1(\cos \theta) \quad (1)$$

ანტისიმეტრიზაციით მიიღება:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{s=1} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 = |2f(\theta)|^2 = \frac{36}{k^2} \sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta \quad (2)$$

ბ) სრული კვეთა არაპოლარიზებული ნაკადისათვის მოიცემა ფორმულით:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{s=0} + \frac{3}{4} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{s=1} = \frac{3}{4} R^2 (kR)^4$$

6.13. 
$$\vec{P}' = \frac{(|A|^2 - |B|^2) \vec{P} + 2|B|^2 \vec{v}(\vec{v}\vec{P}) + 2 \text{Im}(AB^*) [\vec{v}\vec{P}] + 2\vec{v} \text{Re}(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2 + 2 \text{Re}(AB^*) \vec{v}\vec{P}}$$

ამ ფორმულაში  $A$ ,  $B$  და  $\vec{v}$  სიდიდეები განმარტებულია ამ თავის შესავალი ნაწილის (VI.1) ფორმულაში.

6.14.  $\delta_0 \approx k_1 a \left[ \frac{tg(k_0 a)}{k_0 a} - 1 \right]$ , სადაც  $k_0^2 = 6mV_0 / \hbar^2$  (1)

იგივეური ნაწილაკების გაფანტვის სრული კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma(\theta) = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 = \frac{1}{k_1^2} \left| \sum_{l=0,2,4,\dots}^{\infty} 2(2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2 \quad (2)$$

$s$  ტალღისათვის პარციალური კვეთა იქნება:

$$\sigma_0(\theta) = \frac{4}{k_1^2} \sin^2 \delta_0 \approx \frac{4}{k_1^2} \delta_0^2 \quad (3)$$

სრული კვეთა კი იქნება ამ მიახლოებაში:

$$\sigma_{tot} = 4\pi\sigma_0 = 16\pi a^2 \left[ \frac{\operatorname{tg}(k_0 a)}{k_0 a} - 1 \right]^2 \quad (4)$$

რადგანაც ნეიტრონები არაპოლარიზებულია, იმის ალბათობა, რომ მათ ექნებათ საწინააღმდეგო სპინები (ანუ სრული სპინი,  $S = 0$ ), არის  $\frac{1}{4}$ . ამიტომ:

$$\sigma_{tot} = 4\pi a^2 \left[ \frac{\operatorname{tg}(k_0 a)}{k_0 a} - 1 \right]^2 \quad (5)$$

6.15. ლუნი ჯამური სპინისათვის:

$$F_0(\theta) = \frac{1}{ik} \sum_{l=0,2,4}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) [e^{2i\delta_l} - 1] \quad (1)$$

კენტი ჯამური სპინისათვის:

$$F_1(\theta) = \frac{1}{ik} \sum_{l=1,3,5}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) [e^{2i\delta_l} - 1] \quad (2)$$

ნელი ნაწილაკებისათვის გაფანტვაში მთავარ წვლილს იძლევიან მცირე  $l$ -ები. ლუნი ჯამური სპინისათვის კვეთა სფერულად სიმეტრიულია (ეს თვისება გააჩნდა და სხვადასხვა ნაწილაკის გაფანტვასაც) და არ მიდის ნულისაკენ, როცა  $k \rightarrow 0$ .

თუ ჯამური სპინი კენტია, მაშინ გაფანტვაში მთავარი წვლილი შეაქვს  $l=1$  მდგომარეობას. რადგანაც  $\delta_l \approx k^{2l+1}$  მცირე  $k$ -ებისათვის, კვეთა ნულისაკენ მიისწრაფვის, როგორც  $E^2$  ( $E \rightarrow 0$ -თვის) და კუთხეზე  $\cos^2 \theta$  კანონით არის დამოკიდებული.

6.16. ლუნი ჯამური სპინისათვის დიფერენციალური კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$d\sigma_0 = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 d\Omega = \frac{1}{k^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos\left(\frac{2}{k} \operatorname{Intg} \frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\} d\Omega \quad (1)$$

(1) ფორმულა იძლევა  $\alpha$  ნაწილაკების (რომელთა სპინი ნულია) გაფანტვის კვეთას. ელექტრონებისათვის, როდესაც ჯამური სპინი ერთია, დიფერენციალური კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$d\sigma_0 = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 d\Omega = \frac{1}{4k^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{2 \cos\left(\frac{2}{k} \operatorname{Intg} \frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\} d\Omega \quad (2)$$

არაპოლარიზებული ელექტრონების გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$d\sigma_0 = \frac{1}{4}d\sigma_0 + \frac{3}{4}d\sigma_1 = \frac{1}{4k^4} \left\{ \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{\cos\left(\frac{2}{k} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right\} d\Omega \quad (3)$$

6.17. სინგლეთურ მდგომარეობაში:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 = \frac{4m^2 V_0^2}{\hbar^4} \left[ \frac{1}{\mu^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\mu^2 + 4k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 = \\ &= \frac{16m^2 V_0^2 (\mu^2 + 2k^2)^2}{\hbar^4 \left( \mu^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 \left( \mu^2 + 4k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

რადგანაც ნეიტრონები არაპოლარიზებულია, გაფანტვის კვეთა შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4}\sigma_s + \frac{3}{4}\sigma_t = \frac{1}{4}\sigma_s = \frac{4m^2 V_0^2 (\mu^2 + 2k^2)^2}{\hbar^4 \left( \mu^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 \left( \mu^2 + 4k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^2}$$

**თავი 7. გაფანტვის ამპლიტუდის ანალიზური თვისებები. შედგენილი ნაწილაკების გაფანტვა. არადრეკადი გაფანტვები**

$$7.1. \quad \tilde{f}(E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E'} dE'}{(E' - E)(|E_0| + E')} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{|E_0| - i\sqrt{E}}} \quad (1)$$

სადაც

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \quad (2)$$

ხოლო  $a_0$  ნულოვანი რადიუსის პოტენციალის გაფანტვის სიგრძეა.

როცა  $a_0 < 0$  (არ არსებობს ბმული მდგომარეობები) (1) ემთხვევა გაფანტვის ამპლიტუდას:

$$f(E) = \frac{1}{-1/a_0 - i/\hbar\sqrt{2mE}} \quad (3)$$

როცა  $a_0 > 0$  (ბმული მდგომარეობების არსებობისას) (1) დადის შემდეგ ფორმულაზე:

$$f(E) = -\frac{\hbar^2}{ma_0(E-E_0)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} f(E') dE'}{E' - E} \quad (4)$$

7.2. ოპტიკური თეორემის თანახმად:

$$\text{Im} f(E, 0) = k\sigma(E)/4\pi \quad (1)$$

მაშინ ამ თავის შესავალი ნაწილის (VII.2) დისპერსიული თანაფარდობიდან  $E = 0$  ენერჯიისათვის მიიღება:

$$f(E=0) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(r) dV + \frac{\sqrt{2m}}{4\pi^2\hbar} \int_0^\infty \frac{\sigma(E) dE}{\sqrt{E}} \quad (2)$$

ამ თანაფარდობაში გათვალისწინებულია, რომ განმზიდავი პოტენციალისათვის  $U(r) \geq 0$  არ არსებობს ბმული მდგომარეობები. (2)-დან ასევე ჩანს, რომ ასეთი პოტენციალებისათვის:

$$f(E=0) < 0 \quad (3)$$

ამიტომ (2) და (3) ფორმულებიდან მიიღება ამოცანის პირობაში მოცემული უტოლობა.

$$7.4. f(k, \theta) \leq \frac{4}{3} \left( \frac{2}{\pi \sin \theta} \right)^{1/2} R(kR)^{1/2}$$

$$7.5. \sigma_{el} \geq \frac{1}{4\pi R^2} \sigma_{tot}^2$$

$$7.6. |\text{Re} f(E, 0)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\sigma_{tot}} kR \left( 1 - \frac{\sigma_{tot}}{4\pi R^2} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\sigma_{tot}} kR$$

$$|f(E, 0)| \leq Ck \sqrt{\sigma_{tot}(E)} \ln \frac{E}{E_0}$$

$$7.10. f(\bar{p}_2, \bar{p}_1) = -\frac{32}{p^2} \left\{ \frac{1}{(4+q^2)^2} - \frac{1}{2(1+p^2)^2} \right\}; \quad \bar{q} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 \quad (1)$$

საიდანაც ჩანს, რომ გაფანტვაში ნამყვანი წვლილი აქვს  $q \leq 1$  მნიშვნელობებს ანუ  $\theta \leq 1/p$  კუთხეებს. ამიტომ (1) ფორმულაში მეორე შესაკრები შეიძლება უგულვებლყოფილ იქნეს და გაფანტვის დიფერენციალური და სრული კვეთები შემდეგი ფორმულებით მოიცემა:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{p^4 (1 + p^2 \theta^2 / 4)^4}; \quad \sigma = \frac{16\pi}{3p^6}$$

$$7.11. \sigma(1s \rightarrow nl) = 64\pi a_B^2 \frac{2^l (2l+1)(l!)^2 \tilde{R}^2(0)}{(l+5)(3-2\sqrt{2})^{l+5}} \frac{1}{V^{|2+2l|}} \quad (1)$$

სადაც  $V = p_1 a_B / \hbar$  დაჯახებული პოზიტრონისა და წყალბადის ატომის ფარდობითი სიჩქარეა, ხოლო:

$$\tilde{R}(0) = \frac{2^{l+1}}{(2l+1)! n^{l+2}} \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} \quad (2)$$

რადიალური ტალღური ფუნქციის მნიშვნელობა კოორდინატა სათავეში.

$$7.12. F_{1s \rightarrow 1s} = \frac{8q^2 + q^4}{(4 + q^2)^2} \quad (1)$$

$$F_{1s \rightarrow 2s} = -\frac{4\sqrt{2}q^2}{\left(\frac{9}{4} + q^2\right)^3} \quad (2)$$

$2p$  მდგომარეობებისათვის ხელსაყრელია, ტალღური ფუნქციის კუთხური ნაწილი  $\sqrt{3/4\pi}(\mathcal{E}(m)\bar{n})$  სახით ჩაინეროს, სადაც  $|\mathcal{E}(m)|^2 = 1$  და მიიღება:

$$F_{1s \rightarrow 2pm} = 6\sqrt{2}i \frac{\mathcal{E}^*(m)q}{(9/4 + q^2)^3} \quad (3)$$

$$7.13. \sigma(1s \rightarrow 1s) = \frac{4\pi}{V^2} \int_0^\infty F_{1s \rightarrow 1s}^2(q) dq^2 = \frac{33\pi}{35V^2} \quad (1)$$

$$\sigma(1s \rightarrow 2s) = \frac{4\pi Z^2}{V^2} \int_0^\infty F_{1s \rightarrow 2s}^2(q) dq^2 = 0,444 \frac{\pi Z^2}{V^2} \quad (2)$$

$$\sigma(1s \rightarrow 2p) = \frac{2^{17} \pi Z^2}{3^{10} V^2} \left[ \ln(16V^2) - \frac{137}{60} \right] \quad (3)$$

სადაც  $V = p/\mu$  დაჯახებული ნაწილაკების ფარდობითი სიჩქარეა, ხოლო  $Ze$  იმ ნაწილაკის მუხტია, რომელიც წყალბადის ატომს ეჯახება. (2)-ის და (3)-ის ჯამი გვაძლევს:

$$\sigma(1s \rightarrow n=2) = 4,44 \frac{\pi Z^2}{3^{10} V^2} \left[ \ln 4V - \frac{25}{24} \right] \quad (4)$$

რომელიც – (4) წარმოადგენს დამუხტული ნაწილაკის მიერ წყალბადის ატომის აღზნებული მდგომარეობის სრულ კვეთას  $n=2$  მთავარი კვანტური რიცხვით.

$$7.14. F_{1 \rightarrow 2} \propto q^{-(2+n+l_1+l_2)}$$

$$7.15. f_{nH}(E, q) \approx f_{np}(E, q)a(q) \quad (1)$$

სადაც:

$$a(q) = \int |\Psi_0(r)|^2 \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} m_e \vec{V} \vec{r}\right\} d^3 r = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{q m_e a_B}{2 m_p}\right)^2\right]^2}; \quad \vec{V} = \frac{\hbar \vec{q}}{m_p} \quad (2)$$

და  $|a(q)|^2$  წარმოადგენს ატომის ძირითად მდგომარეობაში დარჩენის ალბათობას.

რადგანაც  $a(0) = 1$ , ოპტიკური თეორემის და (1) ფორმულის გამოყენებით, ვასკვნიტ, რომ ნეიტრონის პროტონზე და წყალბადის ატომზე გაფანტვის სრული

კვეთები ერთმანეთს ემთხვევა. (1) და (2) ფორმულებიდან ჩანს, რომ  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$

დიფერენციალური კვეთები განსხვავებას იძლევიან მხოლოდ  $q a_B \geq \frac{m_p}{m_e}$ -თვის,

რაც შეესაბამება ნეიტრონების ენერგიას, რომელიც გაცილებით მეტია ატომურ ენერგიაზე, რადგანაც  $\hbar q \leq 2p$ .

$$7.16. \sigma = \pi \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{\pi \beta Z^2 e^2}{4 \hbar v}\right)^{2/3}$$

7.17. გაფანტვის სრული კვეთაა:

$$\sigma_{tot} = 2\pi R^2 \quad (1)$$

არადრეკადი გაფანტვის კვეთაა (ნანილაკების შთანთქმის კვეთა):

$$\sigma_{inel} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - |S_l|^2) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) \approx \pi R^2 \quad (2)$$

სოლო დრეკადი გაფანტვის კვეთაა:

$$\sigma_{el} = \sigma_{tot} - \sigma_{inel} \approx \pi R^2 \quad (3)$$

$$7.18. \Gamma_{ns} = \hbar |\Psi_{ns}^{(0)}(0)|^2 \frac{1}{\tilde{Q}_{k0}^2} (v \sigma_{anil}(v)) \quad (1)$$

სადაც:

$$\tilde{Q}_{k0}^2 = \frac{\pi}{k a_B (1 - \exp\{-\pi / k a_B\})}; \quad |\Psi_{ns}^{(0)}(0)|^2 = \frac{1}{8\pi a_B^3 n^3} \quad (2)$$

ხოლო  $v = \frac{\hbar k}{m} = \frac{2\hbar k}{m_e}$  ელექტრონულ-პოზიტრონული წყვილის ფარდობითი სიჩქარეა.

$$7.19. d\sigma(\theta, \varphi) = |A(\theta, \varphi) + A(\pi - \theta, \varphi + \pi)|^2 d\Omega$$

7.20.  $p-p$  გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა ტრიპლეტურ და სინგლეტურ მდგომარეობებში მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$d\sigma_t(\theta) = |A_t(\theta) - A_t(\pi - \theta)|^2 d\Omega \quad (1)$$

$$d\sigma_s(\theta) = |A_s(\theta) + A_s(\pi - \theta)|^2 d\Omega \quad (2)$$

ხოლო არაპოლარიზებული პროტონების გაფანტვისას, დიფერენციალურ კვეთას შემდეგი სახე აქვს:

$$d\sigma(\theta) = \frac{3}{4}d\sigma_t(\theta) + \frac{1}{4}d\sigma_s(\theta) = \left\{ \frac{3}{4}|A_t(\theta) - A_t(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4}|A_s(\theta) + A_s(\pi - \theta)|^2 \right\} \quad (3)$$

შევნიშნოთ, რომ ნაწილაკებს შორის მოქმედი ძალები სპინზე დამოუკიდებელია, მაშინ:

$$A_s(\theta) = A_t(\theta) = A(\theta) \quad (4)$$

და დიფერენციალური კვეთა მოიცემა ფორმულით:

$$d\sigma(\theta) = \left\{ |A(\theta)|^2 + |A(\pi - \theta)|^2 - \frac{1}{2}[A^*(\theta)A(\pi - \theta) + A(\theta)A^*(\pi - \theta)] \right\} d\Omega \quad (5)$$

7.23. სრული დრეკადი გაფანტვის ქვედა ზღვარი მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma_{elastic, \min}^{(l)} = \frac{(1 + \eta_l)^2}{1 - \eta_l^2} \sigma_{inelastic}^{(l)}$$

სრული დრეკადი გაფანტვის ზედა ზღვარი მოიცემა ფორმულით:

$$\sigma_{elastic, \min}^{(l)} = \frac{(1 - \eta_l)^2}{1 - \eta_l^2} \sigma_{inelastic}^{(l)}$$

$$7.24. \sigma_{tot} = 2\pi a^2$$

7.25. ამ ამოცანის შრედინგერის განტოლებას პარაბოლურ კოორდინატებში შემდეგი სახე ექნება:

$$\left\{ \frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) - \frac{\mu z z' e^2}{\hbar^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right\} u(r) = 0 \quad (1)$$

ამონახსნის აზიმუტალური სიმეტრიის გამო,  $u = u(\xi, \eta)$ .  $r \rightarrow \infty$  ზღვარში ცენტრიდან მიმავალი ტალღაა  $r^{-1} e^{ikr}$ . ამიტომ:

$$u(\xi, \eta) = e^{ikz} v(r - z, r + z)_{r \rightarrow \infty} \rightarrow e^{ikz} v(r - z) = e^{ikz} v(\xi) \quad (2)$$



საიდანაც:

$$u(\xi, \eta) = e^{ikz} v(\xi, \eta) = e^{ik\eta/2} e^{-ik\xi/2} v(\xi) \quad (3)$$

7.26. ა)  $v(\xi) = AF(-in, 1; ik\xi)$  (1)

$$u_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{Ae^{\frac{n\pi}{2}}}{\Gamma(1+in)} \left[ e^{i(kz+n \ln k(r-z))} + f_c(\theta) \frac{1}{r} e^{i(kr-n \ln 2kr)} \right] \quad (2)$$

სადაც:

$$f_c(\theta) = \frac{\Gamma(1+in)}{i\Gamma(-in)} \frac{e^{in \ln \sin^2 \theta/2}}{2k \sin^2(\theta/2)} \quad (3)$$

ბ)  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{n}{4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$

რაც ემთხვევა რეზერფორდის ფორმულას.

7.27. ა) გაფანტვის ამპლიტუდა მოიცემა ფორმულით:

$$f_c(\theta) = \frac{n}{2k \sin^2(\theta/2)} e^{-in \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + i\pi + 2i\eta_0} \quad (1)$$

სადაც  $\eta_0 = \arg \Gamma(1+in)$ ,  $n = \mu Z' Z \frac{e^2}{\hbar^2 k}$ , ხოლო  $\mu = m_{He}/2$  დაყვანილი მასაა,

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}} \text{ და } Z = Z' = 1.$$

ბ) ბირთვის სპინი ნულია. ამიტომ იონები იგივეური ფერმიონებია. თუ სრული სპინი ნულია, სისტემა იმყოფება ანტისიმეტრიულ სპინურ მდგომარეობაში და ამიტომ ორბიტალური ტალღური ფუნქცია სიმეტრიული უნდა იყოს:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{S=0} = |f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2 = \frac{n^2}{4k^2} \left[ \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} + \frac{2\cos[n \ln \tan^2(\theta/2)]}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} \right] \quad (2)$$

7.28. ა)

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{S=1} = |f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2 = \frac{n^2}{4k^2} \left[ \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} - \frac{2\cos[n \ln \tan^2(\theta/2)]}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} \right] \quad (1)$$

ბ) არაპოლარიზებული ნაკადისათვის იმის ალბათობა, რომ სრული სპინი ნულია, არის  $1/4$ , ხოლო, ალბათობა იმისა, რომ სრული სპინი ერთია,  $3/4$ -ია. ამიტომ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{S=0} + \frac{3}{4} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{S=1} = \frac{n^2}{4k^2} \left[ \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} - \frac{\cos[n \ln \tan^2(\theta/2)]}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} \right] \quad (2)$$

$$7.29. \sigma_{tot} = 2\pi a^2$$

$$7.30. d\sigma_r = \frac{4}{v^4 \theta^4} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{v^2 \theta^2}{4} \right)^{-4} \right] d\theta$$

$$7.31. d\sigma_n = \frac{2^{11} \pi}{v^2} n^7 \left[ \frac{n^2 - 1}{3} + (qn)^2 \right] \frac{[(n-1)^2 + (qn)^2]^{n-3}}{[(n+1)^2 + (qn)^2]^{n+3}} \frac{dq}{q}$$

7.32. უნდა აინტეგრიროთ შემდეგი გამოსახულება:

$$d\sigma_2 = \frac{2^8 \pi}{v^2} \frac{dq}{q(q^2 + 9/4)^5} \quad (1)$$

შემდეგ საზღვრებში -  $q_{\min} = \frac{E_2 - E_1}{v^2} = \frac{3}{8}v$  და  $q_{\max} = 2v$  - და ინტეგრირებისას

შენარჩუნებულ უნდა იქნეს მხოლოდ  $v$ -ს უდიდესი ხარისხის მქონე წევრები. ინტეგრირება იძლევა შემდეგ კვეთას:

$$\sigma_2 = \frac{2^{18} \pi}{3^{10} v^2} \left( \ln 4v - \frac{25}{24} \right) = \frac{4\pi}{v^2} \cdot 0,555 \ln \frac{v^2}{0,5} \quad (2)$$

7.33.

$$d\sigma = \frac{2^8 k' \tau [q^2 + 2q\tau \cos \gamma + (\tau^2 + 1) \cos^2 \gamma]}{\pi k q^2 [q^2 + 2q\tau \cos \gamma + 1 + \tau^2]^4 [(q + \tau)^2 + 1] \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{\tau}} \right)} \times \\ \times \exp \left( -\frac{2}{\tau} \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{q^2 - \tau^2 + 1} \right) d\theta d\tau \quad (1)$$

(1) გამოსახულების ინტეგრირება მეორადი ელექტრონის გამოტყორცნის ყველა კუთხით შემდეგ შედეგს იძლევა:

$$d\sigma = \frac{2^{10} k' \tau}{k q^2} \frac{\left[ q^2 + \frac{1}{3}(1 + \tau^2) \right]}{[(q + \tau)^2 + 1]^\beta [(q - \tau)^2 + 1]^\beta \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{\tau}} \right)} \exp \left( -\frac{2}{\tau} \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{q^2 - \tau^2 + 1} \right) d\theta d\tau \quad (2)$$

$$7.34. \tau = \frac{4\pi}{v^2} \ln \left( \frac{v^2}{2I} \sqrt{\frac{e}{2}} \right) = \frac{4\pi}{v^2} \ln \frac{v^2}{1,3}$$

$$7.35. d\sigma_n = \frac{\sigma_0}{\pi n!} \sqrt{\frac{E'}{E}} \left( \frac{q^2}{2\alpha^2} \right)^n \exp\left(-\frac{q^2}{2\alpha^2}\right) d\omega \quad (1)$$

დრეკადი გაბნევისათვის (როცა  $n=0$ ,  $E=E'$ ), (1) ფორმულიდან მიიღება გაფანტვის დიფერენციალური:

$$d\sigma_e = \frac{\sigma_0}{\pi} \exp\left(-\frac{q^2}{2\alpha^2}\right) d\omega \quad (2)$$

და ინტეგრალური კვეთები:

$$\sigma_e = \sigma_0 \frac{\hbar\omega}{E} \left( 1 - \exp\left(-\frac{4E}{\hbar\omega}\right) \right) \quad (3)$$

$\frac{E}{\hbar\omega} \rightarrow 0$  ზღვარში, როგორც (3)-დან ჩანს,  $\sigma_e \rightarrow 4\sigma_0$ .

7.36.

$$f^{(d)}(\vec{q}) = f^{(n)}(\vec{q})F(\vec{q}) + f^{(p)}(\vec{q})F(-\vec{q}) - \frac{1}{2\pi k} \int F(2\vec{q}') f^{(n)}\left(\frac{\vec{q}}{2} + \vec{q}'\right) f^{(p)}\left(\frac{\vec{q}}{2} - \vec{q}'\right) d^2 q' \quad (1)$$

სადაც:

$$F(\vec{q}) = \int |\psi_d(\vec{R})|^2 e^{-\frac{i\vec{q}\vec{R}}{2}} d^3 R \quad (2)$$

დეიტრონის ფორმფაქტორია.

თუ (2)-ში აიღებთ  $\vec{q} = 0$ , მაშინ ოპტიკური თეორემის გამოყენებით მიიღება დეიტრონზე გაფანტვის სრული კვეთა:

$$\sigma_t^{(d)} = \sigma_t^{(n)} + \sigma_t^{(p)} + \frac{2}{k^2} \operatorname{Re} \int F(2\vec{q}) f^{(n)}(\vec{q}) f^{(p)}(-\vec{q}) d^2 q \quad (3)$$

$$7.37. \sigma = \frac{\pi}{3\tau} R_0 \left( \ln 2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$7.40. \text{ ა) } \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/v_1'} \quad (1)$$

$$\text{ ბ) } \left( \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \right)^{\text{Lab}} = \frac{(1 + 2\gamma \cos \theta + \gamma^2)^{3/2}}{|1 + \gamma \cos \theta|} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{\text{CNM}} \quad (2)$$

სადაც:

$$\gamma = V/v_1' \quad (3)$$

## ნაწილი II. რელატივისტური კვანტური მექანიკა

### თავი 1. ლორენცისა და პუნკარეს სიმეტრიები

1.1. ოთხვექტორის სიგრძის კვადრატი მოიცემა ფორმულით:

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1)$$

ლორენცის  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\rho x^\rho$  გარდაქმნის ჩასმით ოთხვექტორის სიგრძის ინვარიანტობის გამომსახველ  $x'^2 = x^2$  ტოლობაში მიიღება ამოცანის დასამტკიცებელი ტოლობა.

1.3. ჩანერეთ 1.1. ამოცანაში მიღებული  $\Lambda^T g \Lambda = g$  თანაფარდობა ინფინიტიზუ-  
ბული სახით:

$$(\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho) g_{\mu\nu} (\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma) + o(\omega^2) = g_{\rho\sigma} \quad (1)$$

ანუ:

$$g_{\rho\sigma} + \omega^\mu_\rho g_{\mu\nu} \delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma g_{\mu\nu} \delta^\mu_\rho + o(\omega^2) = g_{\rho\sigma} \quad (2)$$

საიდანაც:

$$\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho} \quad (3)$$

რადგანაც  $\omega_{\mu\nu}$  ლორენცის ჯგუფის პარამეტრები ანტისიმეტრიული სიდიდეებია, ამიტომ მხოლოდ 6 მათგანია დამოუკიდებელი, რის გამოც ლორენცის ჯგუფი ექ-  
ვსპარამეტრიანი ჯგუფია.

1.4. დასამტკიცებელი თანაფარდობა თანხმობაშია  $\mathcal{E}$  სიმბოლოს და დეტერმინან-  
ტის განმარტებებთან.

$$1.6. \text{ ა) } \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{E}_{\mu\nu\gamma\delta} = -\delta^\nu_\beta \delta^\rho_\gamma \delta^\sigma_\delta + \delta^\nu_\gamma \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\delta + \delta^\nu_\beta \delta^\rho_\delta \delta^\sigma_\gamma - \delta^\nu_\gamma \delta^\rho_\delta \delta^\sigma_\beta - \delta^\nu_\delta \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\gamma + \delta^\nu_\delta \delta^\rho_\gamma \delta^\sigma_\beta$$

$$\text{ბ) } \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{E}_{\mu\nu\gamma\delta} = -2(\delta^\rho_\gamma \delta^\sigma_\delta - \delta^\rho_\delta \delta^\sigma_\gamma)$$

$$1.7. \text{ ა) } \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{E}_{\mu\beta\rho\delta} = -6\delta^\sigma_\delta$$

$$\text{ბ) } \mathcal{E}^{\mu\nu\rho\sigma} \mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

1.8.  $X$  მატრიცას შემდეგი სახე აქვს:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ცხადია, რომ:

$$\det X = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 = x^2 \quad (2)$$

ასევე ცხადია, რომ ტრანსფორმაციული გარდაქმნის კანონიდან:

$$X' = SXS^+ \quad (3)$$

გამომდინარეობს.

$$\det X' = \det S \det X \det S^+ = \det X \quad (4)$$

რაც ნიშნავს, რომ  $x'^2 = x^2$

1.9. გაამრავლეთ

$$X = x_\mu \sigma^\mu \quad (1)$$

გამოსახულება მარცხნიდან  $\bar{\sigma}^\nu$ -ზე და აიღეთ შპური.

1.10. შემდეგი გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობებიდან:

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu X') = \frac{1}{2} x^\nu \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu S \sigma_\nu S^+) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

1.12. გვაქვს სამი დამოუკიდებელი ბრუნვა და სამი დამოუკიდებელი ბუსტი.  $Z$  ლერძის გასწვრივ  $\theta_3$  კუთხეზე მობრუნება ხასითდება შემდეგი მატრიცით:

$$\Lambda(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & 0 \\ 0 & -\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

საიდანაც:

$$M_{12} = i \frac{d\Lambda(\theta_3)}{d\omega^{12}} \Big|_{\omega_{12}=0} = -i \frac{d\Lambda(\theta_3)}{d\theta_3} \Big|_{\theta_3=0} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ანალოგიურად მიიღება:

$$M_{13} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{23} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$x$  ლერძის გასწვრივ ბუსტის მატრიცას ასეთი სახე აქვს:

$$\Lambda(\varphi_1) = \begin{pmatrix} ch\varphi_1 & -sh\varphi_1 & 0 & 0 \\ -sh\varphi_1 & sh\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx I + \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_1 & 0 & 0 \\ -\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

სადაც  $\omega^0_1 = -\varphi_1 = -\operatorname{arctanh} v_1$ . შესაბამისი გენერატორია:

$$M_{01} = i \frac{d\Lambda(\varphi_1)}{d\omega^{01}} \Big|_{\varphi_1=0} = i \frac{d\Lambda(\varphi_1)}{d\varphi_1} \Big|_{\varphi_1=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$M_{03} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{02} = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

1.15. გამრავლების წესი შემდეგნაირად არის განმარტებული:

$$(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)$$

ერთეულოვანი ელემენტია  $(I, 0)$ , ხოლო შებრუნებული ელემენტია

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a).$$

$$1.18. [M_{\rho\sigma}, P_\mu] = i(g_{\mu\sigma} P_\rho - g_{\mu\rho} P_\sigma)$$

$$1.20. [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\sigma\mu} M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu} M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu} M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu} M_{\mu\rho})$$

1.21. მოცემულ წარმოდგენაში  $Z$  ლერძის ირგვლივ ბრუნვის გერენატორი ასე ჩაიწერება:

$$M_{12} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

დროის ტრანსლაციის ოპერატორს ასეთი სახე აქვს:

$$T_0 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

სხვა გენერატორებს ანალოგიური სტრუქტურა გააჩნიათ და ადვილად შეიძლება დაითვალოს.

$$1.22. M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu); P_\mu = i\partial_\mu$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0; [M_{\rho\sigma}, P_\mu] = i(g_{\mu\sigma} P_\rho - g_{\mu\rho} P_\sigma)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\sigma\mu} M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu} M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu} M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu} M_{\mu\rho})$$

1.23.  $W_\mu P^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma P^\mu = 0$ , რადგანაც  $P^\sigma P^\mu$  სიმეტრიული ტენზორია

$\sigma$  და  $\mu$  ინდექსების მიმართ. იმავე არგუმენტების გამოყენებით ვაჩვენებთ, რომ  $[W_\mu, P_\nu] = 0$

1.27.

$$\begin{aligned} W^2 |\vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle &= -m^2 \left( \frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} - M_{0i} M^{0i} \right) |\vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle = - \\ & - \frac{1}{2} M_{ij} M^{ij} m^2 |\vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle = -m^2 \left[ (M_{12})^2 + (M_{13})^2 + (M_{23})^2 \right] |\vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle = \\ & = -m^2 \vec{J}^2 |\vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle = -m^2 s(s+1) |\vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle \end{aligned}$$

რადგანაც  $J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$  კუთხური მომენტის ტენზორის კომპონენტებია.

$$1.30. \text{ ა) } [W_\mu, M^2] = -2i(W^\alpha M_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} W^\alpha)$$

ბ)  $[M_{\mu\nu}, W^\mu W^\nu] = 0$  შედეგის მიღებისას გათვალისწინებულია, რომ  $\delta_\mu^\mu = 4$

$$1.31. \text{ ა) } [M^2, P_\mu] = 2i(P^\alpha M_{\alpha\mu} + M_{\alpha\mu} P^\alpha)$$

$$\text{ ბ) } [\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}, M_{\alpha\beta}] = 0$$

1.32. მასიური ნაწილაკებისათვის ( $m^2 > 0$ ). იმის გამო, რომ  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta_\nu^\mu + \omega^\mu{}_\nu$  ლორენცის გარდაქმნები  $p^\mu$ -ს ტოვებს ინვარიანტულს (ანუ  $\Lambda^\mu{}_\nu p^\nu = p^\mu$ ), სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03} = 0, \omega_{ij} \neq 0 \quad (2)$$

შესაბამისი გენერატორებია  $M^{12}, M^{13}$  და  $M^{23}$ . ისინი სივრცული ბრუნვის გენერატორებია, რის გამოც მასიური ნაწილაკებისათვის  $SO(3)$  არის მცირე ჯგუფი. კვანტურ-მექანიკური  $SL(2, C)$  ლორენც ჯგუფისათვის მცირე ჯგუფს წარმოადგენს  $SO(3) = SU(2)$ .

1.33. უმასო ნაწილაკებისათვის გვაქვს:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\omega_{03} = 0, \omega_{01} = \omega_{13}, \omega_{02} = \omega_{23} \quad (2)$$

ხოლო  $\omega_{12}$  პარამეტრი ნებისმიერი სიდიდეა. ეს შეესაბამება ბრუნვას  $z$  ღერძის გარშემო. ამ გარდაქმნის გენერატორია  $M_{12}$ . ზემოთ მოყვანილი მსჯელობებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ორი დამოუკიდებელი გენერატორი  $M^{01} + M^{13}$  და  $-(M^{02} + M^{23})$ . შევნიშნოთ, რომ:  $W_1 = (M^{02} + M^{23})k$ ,  $W_2 = -(M^{01} + M^{13})k$ ,  $W_0 = -M^{12}k$ . თუ გამოიყენებთ 1.28 ამოცანის შედეგს, მიიღებთ:

$$[W_1, W_2] = 0, [W_0/k, W_1] = -iW_2, [W_0/k, W_2] = iW_1 \quad (3)$$

ეს კომუტაციური თანაფარდობანი კი  $E(2)$  ალგებრას განსაზღვრავს. ამრიგად, უმასო ნაწილაკებისათვის მცირე ჯგუფს წარმოადგენს  $E(2)$  ევკლიდეს ჯგუფი.

1.35.  $[M_{\mu\nu}, K_\rho] = i(g_{\nu\rho}K_\mu - g_{\mu\rho}K_\nu)$ ;  $[M_{\mu\nu}, D] = 0$ ;  $[D, K^\mu] = -iK^\mu$   
 $[P_\mu, D] = -iP_\mu$ ;  $[D, D] = 0$ ;  $[K_\mu, K_\nu] = 0$ ;  $[P_\mu, K_\nu] = 2i(g_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu})$

**თავი 2. კლეინ-გორდონის განტოლება**

2.1.  $\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_k}} [a(\vec{k})e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})} + b^+(\vec{k})e^{i(\omega_k t + \vec{k}\vec{x})}] \quad (1)$

სადაც  $k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$ . თუ  $\phi(x)$  ნამდვილი ველია, მაშინ  $a(\vec{k}) = b(\vec{k})$ .

2.3. თუ გამოვიყენებთ წინა ამოცანის (1) ფორმულას, მივიღებთ:

$$Q = \frac{q}{2} \int d^3\vec{k} (a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^+(\vec{k}) - b^+(\vec{k})b(\vec{k}) - b(\vec{k})b^+(\vec{k}))$$

2.4.  $H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \omega_k (a^+(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^+(\vec{k}))$



$$2.5. \bar{P} = \int d^3 \bar{k} \bar{k} a^\dagger(\bar{k}) a(\bar{k})$$

2.8. წარმოადგინეთ ნაწილაკის სრული ენერგია შემდეგი სახით:

$$E = mc^2 + \mathcal{E} \quad (1)$$

სადაც  $mc^2$  უძრაობის ენერგიაა, ხოლო  $\mathcal{E}$  ბმის ენერგიაა. არარელატივიზმი ნიშნავს, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$V \ll mc^2, \mathcal{E} \ll mc^2 \quad (2)$$

ამიტომ (II.8) კლეინ-გორდონის განტოლებიდან (2) უტოლობების გათვალისწინებით მიიღება შრედინგერის განტოლება:

$$u'' + \left[ 2m(\mathcal{E} - V) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0 \quad (3)$$

2.9. კლეინ-გორდონის განტოლებისათვის სიმკვრივე შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (1)$$

შევიტანოთ (1)-ში:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2)$$

გვექნება იმის გათვალისწინებით, რომ ენერგია ნამდვილი სიდიდეა.

$$\psi^* i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi^* E \psi \quad (3)$$

$$\psi \left( -i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \psi E^* \psi = \psi E \psi \quad (4)$$

ამიტომ, (3) და (4)-ის გათვალისწინებით (1) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\rho = \frac{1}{2mc^2} \{ \psi^* E \psi + \psi E \psi^* \} = \frac{E}{mc^2} \psi^* \psi \quad (5)$$

არარელატივისტურ ზღვარში, როგორც წინა ამოცანის (1) და (2) ფორმულებიდან ჩანს,  $E \approx mc^2$ . ამიტომ (5)-დან მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა:

$$\rho = \psi^* \psi \quad (6)$$

2.10. ამ პოტენციალისათვის  $r < r_0$  არეში კლეინ-გორდონის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$u'' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0; \quad k^2 = E^2 - m^2 \quad (1)$$

ხოლო, რადგანაც  $r > r_0$  არეში უსასრულოდ განმზიდავი პოტენციალი გვაქვს, ტალღურ ფუნქციას შემდეგი შეზღუდვა დაედება:

$$u(r_0) = 0 \quad (2)$$

(1) განტოლებაში ჩავსვით:

$$u(r) = \sqrt{z}\varphi(z); \quad z = kr \quad (3)$$

მაშინ  $\varphi(z)$  ფუნქციისათვის მიიღება ბესელის სფერული ფუნქციების განტოლება:

$$\varphi'' + \frac{1}{z}\varphi' + \left[1 - \frac{(l+1/2)^2}{z^2}\right]\varphi = 0 \quad (4)$$

რომლის ზოგადი ამონახსნია, (3) ჩასმის გათვალისწინებით:

$$u(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}kr [C_1 J_{l+1/2}(kr) + C_2 J_{-(l+1/2)}(kr)] \quad (5)$$

სადაც ბესელის  $j_l(z)$  სფერული ფუნქცია შემდეგნაირად არის დაკავშირებული ბესელის  $J_{l+1/2}(z)$  ფუნქციასთან:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) \quad (6)$$

ცნობილია, რომ  $j_l(z)$  სფერულ ფუნქციას სათავეში შემდეგი ყოფაქცევა აქვს:

$$\lim_{z \rightarrow 0} j_l(z) = \frac{z^l}{(2l+1)!!} \quad (7)$$

ამიტომ (5) გამოსახულებაში, სათავეში განშლადობის თავიდან ასაცილებლად, უნდა ავიღოთ  $C_2 = 0$ . (2) მოთხოვნის გათვალისწინებით მიიღება საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება:

$$j_l(kr_0) = 0 \quad (8)$$

რომლის ამონახსნია:

$$kr_0 = t_{nl} \quad (9)$$

სადაც  $t_l$  ბესელის სფერული ფუნქციების ნულებია. (1) და (9)-დან ენერგიისათვის შემდეგი ფორმულა მიიღება:

$$E_{nl} = \sqrt{m^2 + \frac{t_{nl}^2}{r_0^2}} \quad (10)$$

$l = 0$ -თვის  $j_0(z) = \frac{\sin z}{z}$ . ამიტომ (8)-დან მიიღება:

$$\sin kr_0 = 0 \quad (11)$$

ანუ ამ შემთხვევაში:

$$t_{n0} = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

და ენერგია მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$E_{n0} = \sqrt{m^2 + \frac{\pi^2 n^2}{r_0^2}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

2.11. ელექტრომაგნიტურ ველში სკალარული ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$\left[ (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu) + m^2 \right] \phi(x) = 0 \quad (1)$$

$r < a$  არეში (1) განტოლებაა:

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - iV \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - iV \right) - \Delta + m^2 \right] \phi(x) = 0 \quad (2)$$

$\phi(x) = e^{-iEt} F(\vec{r})$  სტაციონარული მდგომარეობებისათვის (2)-დან მიიღება:

$$\left[ -(E+V)^2 - \Delta + m^2 \right] F(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

თუ (3) განტოლების ამონახსნს წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:

$$F(\vec{r}) = \frac{f(r)}{r} Q(\theta, \varphi) \quad (4)$$

მაშინ (3) განტოლებიდან მიიღება შემდეგი ორი განტოლება:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left[ (E+V)^2 - m^2 \right] f = \frac{l(l+1)}{r^2} f \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = -l(l+1)Q \quad (6)$$

(6) განტოლების ამონახსნებია  $Y_{lm}$  სფერული ფუნქციები.  $l=0$ -თვის (5)-ის ამონახსნია

$$f = A \sin(qr) + B \cos(qr) \quad (7)$$

სადაც:

$$q^2 = \left[ (E+V)^2 - m^2 \right] > 0 \quad (8)$$

ამასთან  $B=0$ , რადგანაც  $f(r)/r$  სათავეში არ უნდა იყოს სინგულარული.  $r > a$  ( $A^0=0$ ) არეში ამონახსნს ასეთი სახე აქვს:

$$f = Ce^{-kr} + De^{kr} \quad (9)$$

სადაც  $k^2 = m^2 - E^2$ , მაგრამ  $D=0$ , რადგანაც ტალღური ფუნქცია უსასრულობაში სასრულო უნდა იყოს. ამრიგად, ტალღური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\phi_{<} = A \frac{\sin qr}{r}, \quad r < a \quad (10)$$

$$\phi_{>} = C \frac{e^{-kr}}{r}, \quad r > a \quad (11)$$

$r = a$  წერტილში „შეკერვის“ პირობიდან მიიღება:

$$A \sin(qa) - C e^{-ka} = 0 \quad (12)$$

$$A q \cos(qa) + C k e^{-ka} = 0 \quad (13)$$

(12)-(13) განტოლებათა სისტემას არატრივიალური ამონახსნი გააჩნია მხოლოდ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მისი დეტერმინანტი ნულია, საიდანაც მიიღება საკუთარი მნიშვნელობების შემდეგი განტოლება (დისპერსიული თანაფარდობა):

$$\frac{\operatorname{tg}(qa)}{q} = -\frac{1}{k} \quad (14)$$

(14)-დან ჩანს, რომ  $V < 2m$  შემთხვევაში გვაქვს ერთადერთი დონე, თუ სრულდება პირობა:

$$\frac{\pi}{2a} < \sqrt{V(V+2m)} \leq \frac{3\pi}{2a} \quad (15)$$

2.12. ტალღური განტოლება:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial}{\partial x} + iqBy \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 \right] \phi(x) = 0 \quad (1)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ  $\hat{p}_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$  და  $\hat{p}_z = -i \frac{\partial}{\partial z}$  კომუტირებენ ჰამილტონიანთან, რის გამოც (1) განტოლების ამონახსნი შეიძლება ეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\phi = e^{-i(Et - k_x x - k_z z)} \varphi(y) \quad (2)$$

(1) და (2)-დან მიიღება:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - (k_x + qBy)^2 + E^2 - k_z^2 - m^2 \right) \varphi(y) = 0 \quad (3)$$

თუ შემოიტანთ  $\xi = k_x + qBy$  ახალ ცვლადს, მაშინ (3) განტოლება დაიყვანება შრედინგერის განტოლებაზე ოსცილატორის პოტენციალით:

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{(qB)^2} \xi^2 + \frac{E^2 - k_z^2 - m^2}{(qB)^2} \right) \varphi(\xi) = 0 \quad (4)$$

და ენერჯიის დონეები მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$E_n = \sqrt{m^2 + k_z^2 + (2n+1)qB}, \quad n = 0, 1, 2 \quad (5)$$

ხოლო ტალღური ფუნქცია იქნება:

$$\phi_n(x) = (q\pi B)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-iE_n t + ik_x x + ik_z z} e^{-(k_x + qBy)^2 / 2qB} H_n \left( \frac{k_x + qBy}{\sqrt{qB}} \right) \quad (6)$$

სადაც  $H_n$  ერმიტის პოლინომებია.

2.13. თუ  $z > 0$ -თვის კლეინ-გორდონის განტოლებაში ჩავსვამთ  $\phi_{II} = Ce^{-iEt+ikz}$ -ს, მივიღებთ:

$$k = \pm K = \pm \sqrt{(E - qU_0)^2 - m^2} \quad (1)$$

ანუ:

$$E = \pm \sqrt{k^2 + m^2} + qU_0 \quad (2)$$

$z < 0$ -თვის ნაწილაკი თავისუფალია და ამონახსნს შემდეგი სახე აქვს:

$$\phi_I = Ae^{-iEt+ipz} + Be^{-iEt-ipz} \quad (3)$$

სადაც  $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ . (3)-ში პირველი წევრი დაცემული ტალღაა, ხოლო მეორე – არეკლილი.  $z = 0$  წერტილში შეკერვით მიიღება:

$$A = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k}{p} \right) C, \quad B = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k}{p} \right) C \quad (4)$$

განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1.  $E > m + qU_0$

ენერჯის ამ მნიშვნელობისათვის (1) და (2) გამოსახულებებში ფესვის წინ უნდა ავიღოთ პლუს ნიშანი. თუ გამოვიყენებთ (2.6) ამოცანაში განმარტებულ დენის სიმკვრივის ფორმულას, არეკვლის კოეფიციენტისათვის მივიღებთ:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left| \frac{p - K}{p + K} \right|^2 \quad (5)$$

ხოლო გაჟონვის კოეფიციენტია  $T = 1 - R$ .

2.  $E < -m + qU_0$

ამ შემთხვევაში იმპულსი უარყოფითია  $k = -K$  და არეკვლის კოეფიციენტია:

$$R = \left| \frac{p + K}{p - K} \right|^2 \quad (6)$$

როგორც (6)-დან ჩანს, არეკვლის კოეფიციენტი ერთზე მეტი სიდიდეა  $R > 1$ , რაც ფიზიკურად იმით აიხსნება, რომ პოტენციალი საკმარისად ძლიერია იმისათვის, რომ შეიქმნას ნაწილაკ-ანტინაწილაკის წყვილი. შესაბამისად, გაჟონვის კოეფიციენტი  $T = 1 - R < 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ ანტინაწილაკები მოძრაობენ

მარჯვნივ და ქმნიან უარყოფითი მუხტის დენს და ამიტომ ვლებულობთ უარყოფით გაუონვის კოეფიციენტს. ამ მოვლენას ეწოდება *კლეინის პარადოქსი*.

$$3. \quad |E - qU_0| < m$$

ამ შემთხვევაში  $R = 1$  და, შესაბამისად,  $T = 0$

2.14.  $z < 0, 0 \leq z \leq a, z > 0$  არეებში კლეინ-გორდონის განტოლების ამონახსნებია:

$$\phi_I = Ae^{-iEt+ipz} + Be^{-iEt-ipz} \quad z < 0 \quad (1)$$

$$\phi_{II} = Ce^{-iEt+ikz} + De^{-iEt-ikz} \quad 0 \leq z \leq a \quad (2)$$

$$\phi_{III} = Fe^{-iEt+ipz} \quad z > 0 \quad (3)$$

სადაც  $k = \sqrt{(E - qU_0)^2 - m^2}$  და  $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ . 0 და  $a$  ნერტილებში „შეკერვის“ პირობებიდან კი მიიღება“

$$A + B = C + D \quad (4)$$

$$A - B = \frac{k}{p}(C - D) \quad (5)$$

$$Ce^{ika} + De^{-ika} = Fe^{ipa} \quad (6)$$

$$Ce^{ika} - De^{-ika} = \frac{p}{k}Fe^{ipa} \quad (7)$$

და ამიტომ:

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{16}{\left| 2 + \frac{p}{k} + \frac{k}{p} + \left( 2 - \frac{p}{k} - \frac{k}{p} \right) e^{2ika} \right|^2} \quad (8)$$

თუ სრულდება პირობა  $(E - qU_0)^2 - m^2 < 0$ , მაშინ  $k$  იმპულსი კომპლექსური გამოდის, ანუ:

$$k = i\sqrt{m^2 - (E - qU_0)^2} \quad (9)$$

და გაუონვის კოეფიციენტი  $T = 1$ , თუ  $E_0 = \frac{E}{2}$ .

2.15.  $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$  პოტენციალისათვის კლეინ-გორდონის დაყვანილი რადიალური განტოლება ასე გამოიყურება:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1) - Z^2\alpha^2}{r^2} + \frac{2Z\alpha E}{\hbar cr} - \frac{M^2c^4 - E^2}{\hbar^2c^2} \right] u_l(r) = 0 \quad (1)$$

სადაც:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (2)$$

ნაზი სტრუქტურის მუდმივაა.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\beta^2 = \frac{4(M^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2} \quad (3)$$

და ახალი ცვლადი:

$$\rho = \beta r \quad (4)$$

მაშინ (1) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{l(l+1) - Z^2 \alpha^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \right] u_l(\rho) = 0 \quad (5)$$

სადაც:

$$\lambda = \frac{2Z\alpha E}{\hbar c \beta} > 0 \quad (6)$$

(5) განტოლებაში ჩავსვათ:

$$u_l(\rho) = \rho^{s+1} e^{-\frac{1}{2}\rho} W(\rho) \quad (7)$$

სადაც  $s$  განიმარტება შემდეგი განტოლებიდან:

$$s(s+1) = l(l+1) - Z^2 \alpha^2 \quad (8)$$

მაშინ  $W(\rho)$  ფუნქციისათვის მიიღება გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლება:

$$\rho \frac{d^2 W}{d\rho^2} + (2s+2-\rho) \frac{dW}{d\rho} + (\lambda-s-1)W = 0 \quad (9)$$

რომლის სათავეში სასრულო ამონახსნია:

$$W(\rho) = F(-\lambda+s+1, 2s+2; \rho) \quad (10)$$

სადაც  $F$  გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა. იმისათვის, რომ  $u_l$  ფუნქცია  $\rho \rightarrow \infty$  ზღვარში დაცემადი იყოს, აუცილებელია, (10) ფუნქციით მოცემული ხარისხობრივი მწკრივი სასრულო რანგის პოლინომი იყოს, რაც მაშინ სრულდება, როდესაც:

$$\lambda - s - 1 = n_r; \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

თუ ამოვხსნით (8) განტოლებას  $s$ -ის მიმართ და ავირჩევთ ფესვს:

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 \alpha^2} \quad (12)$$

(რაც  $\lambda$ -ს დადებითობას უზრუნველყოფს, როგორც ეს (6)-დან ჩანს), მაშინ (11)-დან მივიღებთ:

$$\lambda = n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - Z^2 \alpha^2} \quad (13)$$

და, საბოლოოდ, (3) და (6)-დან  $\beta$ -ს გამორიცხვით, ენერგიისათვის შემდეგ ფორმულას მივიღებთ:

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + Z^2 \alpha^2 \lambda^{-2}}} \quad (14)$$

ნაზი სტრუქტურის მუდმივას მცირე სიდიდის გამო ( $\alpha \sim 1/137$ ),  $Z\alpha$  პარამეტრი ყველა ატომისათვის ერთზე ნაკლებია (გარდა ძალზე მძიმე ატომებისა). (13)-ის ჩასმით (14)-ში და  $Z\alpha$ -ს ხარისხებად გაშლით, მიიღება:

$$E = Mc^2 \left\{ 1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} - \frac{Z^4 \alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right\} \quad (15)$$

სადაც  $n = n_r + l + 1$  მთავარი კვანტური რიცხვია.

(15)-ის (3)-ში შეტანით  $Z\alpha \ll 1$ -თვის მიიღება:

$$\beta = \frac{2ZMe^2}{n\hbar^2} \quad (16)$$

(15)-ში პირველი მამრავლი შეესაბამება ნაწილაკის უძრაობის ენერგიას. მეორე მამრავლი:

$$-\frac{Mc^2 Z^2 \alpha^2}{2n^2} = -\frac{MZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2} = E_n^0 \quad (17)$$

ემთხვევა  $M$  მასის ნაწილაკის კულონურ ველში მოძრაობის ენერგიას არარელატივისტურ მიახლოებაში. მესამე წევრი:

$$\Delta E_{nl} = -\frac{E_n^0 Z^2 \alpha^2}{n} \left[ \frac{3}{4n} - \frac{1}{l+1/2} \right] \quad (18)$$

წარმოადგენს რელატივისტურ შესწორებას ენერგიისათვის. როგორც (18)-დან ჩანს, ეს შესწორება დამოკიდებულია  $l$  კვანტურ რიცხვზე, რაც იმას განაპირობებს, რომ იხსნება არარელატივისტური თეორიის გადაგვარება.  $ns$  და  $np$  დონეების გახლეჩის ფარდობითი სიდიდე გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{E_{np} - E_{ns}}{E_n^0} = \frac{4Z^2 \alpha^2}{3n} \quad (19)$$

საიდანაც ჩანს, რომ გახლეჩა მატულობს  $Z$ -ის ზრდასთან ერთად და მცირდება  $n$ -ის ზრდისას. შევნიშნოთ, რომ  $\pi^-$  მეზონის ბმის ენერგია  $\pi$  მეზოატომში



$\frac{M_\pi}{m_e}$  -ჯერ მეტია, ვიდრე ჩვეულებრივ ატომში ( $m_e$  ელექტრონის მასაა). შესაბამისად,  $\pi$  მეზოატომში  $1s$  მდგომარეობაში  $a_\pi = \frac{m_e}{m} \left( \frac{a}{Z} \right)$ , სადაც  $a$  ნეალბადის

ატომის ბორის რადიუსია. ამრიგად,  $\pi$  მეზოატომში  $\pi^-$  მეზონი ბირთვთან გაცილებით უფრო ახლოსაა, ვიდრე ელექტრონი ჩვეულებრივ ატომებში.

2.16.  $U(r)$  სკალარული პოტენციალის შემოტანა ნიშნავს შემდეგ შეცვლას:

$$m^2 \rightarrow m^2 + U(r) \quad (1)$$

რის გამოც კლეინ-გორდონის განტოლებას სკალარული პოტენციალისათვის ასეთი სახე ექნება:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{U^2(r)}{\hbar^2 c^2} \right) u(r) = 0 \quad (2)$$

შემოიტანეთ უგანზომილებო ცვლადი:

$$r' = r \frac{mc^2}{\hbar c} \quad (3)$$

მაშინ (2) ასე ჩაინერება  $r'$  ცვლადებში:

$$\left( \frac{d^2}{dr'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} + \frac{E^2}{m^2 c^4} - 1 - \frac{U^2(r')}{m^2 c^4} \right) u(r') = 0 \quad (4)$$

შემოიტანეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{U^2(r')}{m^2 c^4} = V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}; \quad b^2 = 1 - \frac{E^2}{m^2 c^4} \quad (5)$$

მიიღება:

$$\left( \frac{d^2}{dr'^2} - \frac{l(l+1)}{r'^2} - b^2 + \frac{Z\alpha}{r'} \right) u(r') = 0 \quad (6)$$

შეცვალეთ კიდევ ერთი ცვლადი:

$$\rho = 2br' \quad (7)$$

მაშინ (6)-დან მიიღება:

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{1}{4} + \frac{\rho}{c} \right) u(\rho) = 0 \quad (8)$$

სადაც:

$$c = \frac{Z\alpha}{2b} \quad (9)$$

შეისწავლეთ (8) განტოლების ასიმპტოტური ყოფაქცევა  $\rho \rightarrow \infty$  და  $\rho \rightarrow 0$ -თვის.  $\rho \rightarrow \infty$ -თვის (8) განტოლება შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{4}\right)u(\rho) = 0 \quad (10)$$

რომლის ფიზიკურად მისაღები ამონახსნია:

$$u(\rho) \approx e^{-\frac{\rho}{2}} \quad (11)$$

ხოლო  $\rho \rightarrow 0$ -თვის (8) განტოლება იქნება:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)u(\rho) = 0 \quad (12)$$

რომლის სათავეში არასინგულარული ამონახსნია:

$$u(\rho) \approx \rho^{l+1} \quad (13)$$

ამიტომ (8) განტოლებაში მოახდინეთ შემდეგი ჩასმა:

$$u(\rho) = N\rho^{l+1} e^{-\frac{\rho}{2}} F(\rho) \quad (14)$$

შედეგად მიიღება  $F(\rho)$  ფუნქციისათვის გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლება:

$$\rho F'' + [(2l+2) - \rho]F' - [c - (l+1)]F = 0 \quad (15)$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციები ნორმალიზებადია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ამ ფუნქციების პირველი არგუმენტი მთელი უარყოფითი რიცხვია. ამიტომ ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობები განისაზღვრება შემდეგი პირობიდან:

$$l+1-c = -n_r; \quad n_r = 0,1,2,\dots \quad (16)$$

საიდანაც ენერგიისათვის მიიღება ფორმულა:

$$E = \pm mc^2 \sqrt{1 - \frac{(Z\alpha)^2}{4n^2}} \quad (17)$$

სადაც:

$$n = n_r + l + 1 \quad (18)$$

მთავარი კვანტური რიცხვია. როგორც მოსალოდნელი იყო,  $E$  სიმეტრიულია ნაწილაკების და ანტინაწილაკების მიმართ. ცხადია, რომ:

$$Z_{cr} = \frac{2n}{\alpha} \quad (19)$$

მნიშვნელობა  $Z$ -ის კრიტიკული მნიშვნელობაა.

საბოლოოდ, რადიალური ფუნქცია ასეთ სახეს ღებულობს:

$$u(\rho) = N\rho^{l+1} e^{-\frac{\rho}{2}} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!} (2l+1)! L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) \quad (20)$$

სადაც  $L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$  ლაგერის განზოგადებული პოლინომია, ხოლო  $N$  ნორმირების მუდმივა მოიცემა ფორმულით:

$$N = \sqrt{\frac{(n+l)!}{2|E|n(n-l-1)! (2l+1)!}} (2\rho)^{\frac{3}{2}} \quad (21)$$

2.17. კლეინ-გორდონის განტოლება  $p_0 = 0$ -თვის ასეთია:

$$(\Delta - m^2)\phi(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

ეს განტოლება  $m = 0$ -თვის წყაროს გარეშე ლაპლასის განტოლების ანალოგიურია სკალარული ელექტროსტატიკური ველისათვის.  $g$  მუხტის მქონე წერტილოვანი წყაროს შემთხვევაში კლეინ-გორდონის განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$(\Delta - m^2)\phi(\vec{r}) = -g\delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (2)$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარეს არ არის  $4\pi$  მამრავლი, რაც შეესაბამება ნევისაიდის ერთეულთა სისტემას, რომელიც რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში გამოიყენება. ამ ერთეულთა სისტემაში წერტილოვანი  $e$  მუხტის კულონური

პოტენციალია  $U(r) = \frac{e^2}{4\pi r}$ ; ამასთან,  $e$  მუხტი ჩვეულებრივ  $e_0$  მუხტის განმარ-

ტებასთან შემდეგი თანაფარდობით არის დაკავშირებული  $e^2 = 4\pi e_0^2$ . (2) განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ სამგანზომილებიანი ფურიე ინტეგრალი:

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (3)$$

ამ გამოსახულების (2) განტოლებაში შეტანით და დელტა-ფუნქციის

$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}}$  ფურიე წარმოდგენის საშუალებით, მივიღებთ:

$$\phi(\vec{k}) = \frac{g}{k^2 + m^2} \quad (4)$$

(4) შევიტანოთ (3)-ში და იმის გათვალისწინებით, რომ სფერულ კოორდინატებში  $d^3k = k^2 dk d(\cos\theta) d\phi$ , მივიღებთ:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}} k^2 dk}{k^2 + m^2} d(\cos\theta) d\phi \quad (5)$$

კუთხეების ინტეგრაციით ჩატარების შემდეგ კი მიიღება:

$$\varphi(r) = \frac{g}{(2\pi)^2 ir} \int_0^\infty k \frac{(e^{ikr} - e^{-ikr})}{k^2 + m^2} dk \quad (6)$$

ინტეგრაცია  $k$ -თი შესაძლოა ჩავატაროთ  $-\infty$ -დან  $\infty$ -მდე, თუ მეორე შესაკრებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციაში  $k \rightarrow -k$  შეცვლას მოვახდენთ, გვექნება:

$$\varphi(r) = \frac{g}{(2\pi)^2 ir} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikr} k dk}{k^2 + m^2} = \frac{g}{(2\pi)^2 ir} \oint_C \frac{e^{ikr} k dk}{k^2 + m^2} \quad (7)$$

ეს ინტეგრალი ითვლება ნაშთთა თეორიის გამოყენებით და მიიღება:

$$\varphi(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-mr} \quad (8)$$

ეფექტურ არეს, სადაც პიონების ტალღური ფუნქცია (პიონური ველის პოტენციალი) მნიშვნელოვნად განსხვავდება ნულისაგან,  $r_{eff} \approx \frac{1}{m}$  რადიუსი გააჩნია და ის

ემთხვევა ბირთვული ძალების მოქმედების რადიუსს  $r \approx 1,4 \cdot 10^{-13}$  სმ.

2.18. ამ შემთხვევისათვის კლეინ-გორდონის განტოლება ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) u(r) = 0 \quad (1)$$

სადაც:

$$k^2 = \frac{[(E - V(r))]^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \quad (2)$$

განცალკებისათვის ჩასვით:

$$u(r) = e^{\frac{r}{2a}} \omega(t) \quad (3)$$

სადაც:

$$t = 2iZ\alpha \frac{a}{\hbar c} e^{-\frac{r}{a}} \quad (4)$$

და (2) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} + \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{iEa}{\hbar c t} + \frac{1/4 - p^2 a^2}{t^2} \right\} \omega = 0 \quad (5)$$

სადაც:

$$p^2 = \frac{m^2 c^4 - E^2}{\hbar c^2} \quad (6)$$

(5) განტოლება კი წარმოადგენს უიტიკერის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის რეგულარული ამონახსნია  $r \rightarrow \infty$  -თვის (ანუ  $t = 0$ )

$$\omega(t) = NW_{\lambda, \mu}(t) = Ne^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{1}{2} + \mu} F\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda, 1 + 2\mu; t\right) \quad (7)$$

სადაც:

$$\lambda = -\frac{iEa}{\hbar c}; \quad \mu = pa \quad (8)$$

$N$  ნორმალიზაციის მუდმივაა,  $F$  კი – გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია.

ამრიგად, საბოლოოდ,  $l = 0$  მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია იქნება:

$$u(r) = Ne^{\frac{r}{2a}} W_{\lambda, \mu}\left(2iZ\alpha \frac{a}{\hbar c} e^{-\frac{r}{a}}\right) \quad (9)$$

ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობების საპოვნელად უნდა მოვითხოვოთ, რომ  $u(0) = 0$ , რაც (9)-ის გათვალისწინებით, ენერგიისათვის შემდეგ ტრანსცენდენტურ განტოლებას იძლევა:

$$F\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda, 1 + 2\mu; 2iZ\alpha \frac{a}{\hbar c}\right) = 0 \quad (10)$$

რომლის ამოხსნა მხოლოდ რიცხობრივი მეთოდებითაა შესაძლებელი.

2.19. კლეინ-გორდონის განტოლება შრედინგერის ფორმით ასეთი სახით ჩაინერება:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1)$$

სადაც ჰამილტონიანს შემდეგი სახე აქვს:

$$H = \left[ -\frac{\Delta}{2m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad (2)$$

2.20. იმპულსურ წარმოდგენაში  $H\phi = E\phi$  საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება ასე გამოიყურება:

$$\begin{pmatrix} \frac{\vec{p}^2}{2m} + m & \frac{\vec{p}^2}{2m} \\ -\frac{\vec{p}^2}{2m} & -\frac{\vec{p}^2}{2m} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ჰამილტონიანის საკუთარი მნიშვნელობები ადვილად შეიძლება იპოვოს; ისინი შემდეგი ფორმულებით მოიცემა:

$$E = \pm \omega_p = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (2)$$

არარელატივისტური ზღვრის საპოვნელად დავუშვათ, რომ ამონახსნს ასეთი სახე აქვს:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{-i(m+T)t} \quad (3)$$

სადაც  $T$  არის ნაწილაკის კინეტიკური ენერჯია. წინა (2.15) ამოცანის (1) და ამ ამოცანის (1) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2m} + m & -\frac{\Delta}{2m} \\ \frac{\Delta}{2m} & \frac{\Delta}{2m} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} = (m+T) \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ანუ გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\Delta}{2m} + m\right)\theta_0 - \frac{\Delta}{2m}\chi_0 &= (m+T)\theta_0 \\ \frac{\Delta}{2m}\theta_0 + \left(\frac{\Delta}{2m} - m\right)\chi_0 &= (m+T)\chi_0 \end{aligned} \quad (5)$$

(5) სისტემის მეორე განტოლებიდან არარელატივისტურ ზღვარში მიიღება:

$$\chi_0 \approx \frac{\Delta}{4m^2} \theta_0 \quad (6)$$

ხოლო (6) განტოლებიდან და (5) სისტემის პირველი განტოლებიდან კი მიიღება:

$$T\theta_0 = \left(-\frac{\Delta}{2m} - \frac{\Delta^2}{8m^3}\right)\theta_0 \quad (7)$$

ასევე (6)-დან ჩანს, რომ  $\chi_0 \ll \theta_0$  და  $\chi$ -ს ეწოდება მცირე კომპონენტი. (7) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ არარელატივისტური ჰამილტონიანის პირველი რელატივისტური შესწორებაა  $-\frac{\Delta^2}{8m^3}$ .

2.21. სიჩქარის ოპერატორი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\hat{v} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{\hat{p}}{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

სიჩქარის ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

2.22. ა) აჩვენეთ, რომ  $\langle \psi, H\chi \rangle = \langle H\psi, \chi \rangle$

$$\text{ბ) } \langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{p}}{m}$$

2.23. ჩანერეთ ტალღური ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{imc^2 t}{\hbar^2}} \psi(\vec{r}) \quad (1)$$

ტალღურ ფუნქციაში ექსპონენციალური ფაქტორის გამოყოფა შეესაბამება ფაქტს, რომ ნაწილაკის  $E$  სრულ ენერგიაში შეგვიძლია გამოვყოთ უძრაობის ენერგია:

$$E = mc^2 + \mathcal{E} \quad (2)$$

სადაც  $\mathcal{E}$  ბმის ენერგიაა. არარელატივიზმზე გადასვლა ნიშნავს შემდეგი პირობის შესრულებას:

$$\mathcal{E} \ll mc^2 \quad (3)$$

მაშინ  $\psi(\vec{r})$  ფუნქციისათვის მიიღება განტოლება:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4)$$

სტაციონარული მდგომარეობებისათვის გვექნება:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\mathcal{E}}{\partial t} = \mathcal{E} \psi_\mathcal{E} \quad (5)$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ:

$$\frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2 \psi_\mathcal{E}}{\partial t^2} = -\frac{\mathcal{E}^2}{2mc^2} \psi_\mathcal{E} \quad (6)$$

ამიტომ, (3) პირობის გათვალისწინებით (4)-ში შეგვიძლია უგულებელვყოთ მარჯვენა მხარეს მეორე წევრი და „ნულოვან“ მიახლოებაში (4)-დან მივიღებთ შრედინგერის განტოლებას თავისუფალი ნაწილაკისათვის:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} \psi_0 = i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \quad (7)$$

(7) განტოლების პირველი რიგის რელატივისტური შესწორების დასადგენად, (4) განტოლების ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (8)$$

სადაც  $|\psi_1| \ll |\psi_0|$  და (4) განტოლება ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} (\psi_0 + \psi_1) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi_0 + \psi_1) = -\frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi_0 + \psi_1) \quad (9)$$

მოცემული სიზუსტით გარდაკმნათ (9) განტოლების მარჯვენა მხარე, გვექნება:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi_0 + \psi_1) \approx \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_0 = -\frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} \right) \psi_0 \approx -\frac{1}{4m^2\hbar^2} \vec{p}^4 (\psi_0 + \psi_1) \quad (10)$$

ამიტომ (9) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} \right) \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (11)$$

(11) განტოლებას აქვს შრედინგერის განტოლების სახე შემდეგი ჰამილტონიანით:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} \quad (12)$$

რაც, თავის მხრივ, ბუნებრივი კვანტურ-მექანიკური განზოგადებაა კლასიკური თეორიის შემდეგი ფორმულისა:

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} \quad (13)$$

2.24. ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკის კლეინ-გორდონის სტაციონარულ განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$\left\{ c^2 \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2c^4 \right\} \psi = (E - e\phi)^2 \psi \quad (1)$$

არარელატივისტურ შემთხვევაში, როცა სრულდება შემდეგი პირობები:

$$|e\phi| \ll mc^2; \quad |\mathcal{E}| \ll mc^2 \quad (2)$$

სადაც ნაწილაკის  $E$  სრულ ენერგიაში გამოყოფილია უძრაობის ენერგია ანუ

$$E = mc^2 + \mathcal{E} \quad (3)$$

$\mathcal{E}$  ბმის ენერგიაა. (2) და (3)-ის გათვალისწინებით (1) განტოლება ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi - \mathcal{E} \right\} \psi = \frac{(\mathcal{E} - e\phi)^2}{2mc^2} \psi \quad (4)$$

ამასთან, (4) განტოლებაში მარჯვენა მხარე გაცილებით მცირეა მარცხენა მხარესთან შედარებით და მარჯვენა მხარის უგულვებელყოფისას „ნულოვან“ მიახლოებაში მიიღება არარელატივისტური შრედინგერის განტოლება შემდეგი ჰამილტონიანით:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\pi}^2}{2m} + e\phi \quad (5)$$



სადაც:

$$\hat{\pi} = \hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \quad (6)$$

2.25. ვიპოვოთ  $\frac{1}{c^2}$  შესწორება. ამ მიზნით განვიხილოთ წინა ამოცანის (4) განტოლება. იმის გათვალისწინებით, რომ ამ განტოლების მარჯვენა მხარეს უკვე არის  $\frac{1}{c^2}$  მამრავლი, ამიტომ  $(\varepsilon - e\varphi)^2 \psi$  შეგვიძლია შევცვალოთ მისი „ნულოვანი“ მიახლოებით. რადგანაც ამ მიახლოებაში:

$$(\varepsilon - e\varphi)\psi \approx (\hat{H}_0 - e\varphi)\psi = \frac{1}{2m} \hat{\pi}^2 \psi \quad (1)$$

(სადაც  $\hat{\pi}$  განმარტებულია წინა ამოცანის (6) ფორმულით), ამიტომ წინა ამოცანის (4) ფორმულის მარჯვენა მხარეს შეიძლება ჩატარდეს შემდეგი გარდაქმნები:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - e\varphi)^2 \psi &\approx (\varepsilon - e\varphi) \frac{\hat{\pi}^2}{2m} \psi = \\ &= \left\{ -\frac{1}{2m} [e\varphi, \hat{\pi}^2] + \frac{1}{2m} \hat{\pi}^2 (\varepsilon - e\varphi) \right\} \psi \approx \left\{ -\frac{1}{2m} [e\varphi, \hat{\pi}^2] + \frac{1}{4m^2} \hat{\pi}^4 \right\} \psi \end{aligned} \quad (2)$$

(2)-ის გათვალისწინებით  $\frac{1}{c^2}$  რიგში მივიღებთ:

$$\left\{ \frac{\hat{\pi}^2}{2m} + e\varphi - \frac{1}{8m^3 c^2} \hat{\pi}^4 + \frac{1}{4m^2 c^2} [e\varphi, \hat{\pi}^2] \right\} \psi = \varepsilon \psi \quad (3)$$

(3) განტოლება გარეგნულად ჰგავს შრედინგერის განტოლებას, მაგრამ ფრჩხილებში მოქცეული ოპერატორი არ არის ერმიტული და ამიტომ ის არ შეიძლება ჩაითვალოს ჰამილტონიანად. ამ ნაკლის გამოსასწორებლად კიდევ საჭიროა ტალღური ფუნქციის შემდეგი გარდაქმნა:

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{S} \psi_1 = \left[ \frac{E - e\varphi}{mc^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \psi_1 = \left[ 1 + \frac{\varepsilon - e\varphi}{mc^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \psi_1 = \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{2mc^2} (\varepsilon - e\varphi) + \frac{3}{8m^2 c^4} (\varepsilon - e\varphi)^2 + \dots \right] \psi_1 \end{aligned} \quad (4)$$

ეს არაუნიტარული გარდაქმნა უზრუნველყოფს ტალღური ფუნქციის ნორმის შენახვას:

$$\int \psi^* \frac{1}{mc^2} (E - e\varphi) \psi dV = \int |\psi_1|^2 dV \quad (5)$$

(4)-ის ჩასმით (3)-ში, იმის გათვალისწინებით, რომ  $\frac{1}{c^2}$  რიგში შეიძლება ვისარგებლოთ (1) ფორმულით, მივიღებთ შრედინგერის განტოლებას პირველი რელატივისტური შესწორებით:

$$\left\{ \frac{\hat{\pi}^2}{2m} - \frac{1}{8m^3 c^2} \hat{\pi}^4 + e\varphi \right\} \psi_1 = \varepsilon \psi_1 \quad (6)$$

როგორც ვხედავთ, ჰამილტონიანის  $-\frac{1}{8m^3 c^2} \hat{\pi}^4$  შესწორება ისეთივეა, როგორც თავისუფალი ნაწილაკისათვის და წარმოადგენს კლასიკური თეორიის შესაბამისი რელატივისტური შესწორების ბუნებრივ კვანტურ-მექანიკურ განზოგადებას. აუცილებელია აღინიშნოს, რომ ეს „ბუნებრიობა“ უკვე აღარ გვაქვს  $\frac{1}{c^4}$  რიგში, როგორც ეს ნაჩვენებია შემდეგ ამოცანაში.

2.26.  $\frac{1}{c^4}$  რიგში შესწორების გამოსათვლელად ხელსაყრელია (2.24) ამოცანის (4) განტოლებაში (2.25) ამოცანის (4) ფორმულით განმარტებულ  $\psi_1$  ფუნქციაზე გადავიდეთ. გვექნება:

$$\frac{\hat{\pi}^2}{2m} \left( 1 - \frac{\varepsilon - e\varphi}{2mc^2} + \frac{3(\varepsilon - e\varphi)^2}{8m^2 c^4} \right) \psi_1 = (\varepsilon - e\varphi) \left( 1 + \frac{(\varepsilon - e\varphi)^2}{8m^2 c^4} \right) \psi_1 \quad (7)$$

როგორც ზემოთ, იმ წევრებში, რომლებიც შეიცავენ  $\frac{1}{c^4}$  მამრავლს,  $(\varepsilon - e\varphi)\psi_1$  გამოსახულებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ „ნულოვანი“ მიახლოება და შევცვალოთ ეს გამოსახულება  $\frac{\hat{\pi}^2}{2m}\psi_1$ -ით, ხოლო იმ წევრებში, რომლებიც შეიცავენ  $\frac{1}{c^2}$  მამრავლს, უნდა გავითვალისწინოთ პირველი რიგის წევრები, ანუ  $(\varepsilon - e\varphi)\psi_1$  გამოსახულება შევცვალოთ  $\left( \frac{1}{2m} \hat{\pi}^2 - \frac{1}{8m^3 c^2} \hat{\pi}^4 \right) \psi_1$ -ით. ამ გარდაქმნების შემდეგ, (7) განტოლება შრედინგერის განტოლებაზე დადის შემდეგი ჰამილტონიანით:

$$\hat{H}' = \hat{H} + \frac{1}{16m^3 c^4} \left[ \left( \frac{1}{2m} \hat{\pi}^2 + e\varphi \right), \left[ \hat{\pi}^2, e\varphi \right] \right] \quad (8)$$

სადაც:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{\pi}^2 + e\varphi - \frac{1}{8m^3 c^2} \hat{\pi}^4 + \frac{1}{32m^5 c^4} \hat{\pi}^6 + \frac{1}{32m^4 c^4} \left[ \hat{\pi}^2, \left[ \hat{\pi}^2, e\varphi \right] \right] \quad (9)$$

(9) ჰამილტონიანი უნიტარული გარდაქმნების საშუალებით შესაძლებელია გამარტივდეს. ამ მიზნით შევნიშნოთ, რომ  $\frac{1}{c^4}$  სიზუსტით, (8) თანაფარდობის მარჯვენა

მხარის მეორე წევრში  $\frac{1}{2m} \hat{\pi}^2 + e\phi$  გამოსახულება შეიძლება შევცვალოთ  $\hat{H}$ -ით.

მაშინ იმავე სიზუსტით  $\hat{H}'$  შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\hat{H}' \approx \hat{H} + \frac{1}{16m^3 c^4} [\hat{H}, [\hat{\pi}^2, e\phi]] \approx \exp\left\{-\frac{1}{16m^3 c^4} [\hat{\pi}^2, e\phi]\right\} \hat{H} \exp\left\{\frac{1}{16m^3 c^4} [\hat{\pi}^2, e\phi]\right\} \quad (10)$$

რადგანაც  $\hat{F} = i[\hat{\pi}^2, e\phi]$  ერმიტული ოპერატორია, ხოლო  $\hat{U} = \exp[i\hat{F}]$  უნიტარული ოპერატორი, ამიტომ, (10)-ის თანახმად,  $\hat{H}$  და  $\hat{H}'$  უნიტარული გარდაქმნით არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული და ორივე შეიძლება განხილულ იქნეს ნაწილაკის ჰამილტონიანად. რადგანაც  $\hat{H}$  უფრო მარტივი სახისაა, ვიდრე  $\hat{H}'$ , ამიტომ უფრო ხელსაყრელია  $\hat{H}$ -ით სარგებლობა. როგორც ვხედავთ, კლეინ-გორდონის განტოლებიდან გამომდინარე, რელატივისტური შესწორებები უკვე  $\frac{1}{c^4}$  რიგში განსხვავდება  $\hat{H}_{rel} = \sqrt{\hat{\pi}^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$  ჰამილტონიანის გაშლისაგან.

2.27. თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკის ენერგია ახლოსაა უძრაობის ენერგიასთან და ჩავწეროთ:

$$E = mc^2 + \varepsilon \quad (1)$$

სადაც  $\varepsilon$  ბმის ენერგია აკმაყოფილებს პირობას:

$$|\varepsilon| \ll mc^2 \quad (2)$$

ელექტროსტატიკურ ველში მოძრავი ნაწილაკის სტაციონარული კლეინ-გორდონის განტოლება ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$\{-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4\} \psi = (\varepsilon - e\phi)^2 \psi \quad (3)$$

(1) შევიტანოთ (3)-ში, გვექნება:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + e\phi - \frac{(e\phi)^2}{2mc^2} + \frac{\varepsilon}{mc^2} e\phi - \frac{\varepsilon^2}{2mc^2}\right\} \psi = \varepsilon \psi \quad (4)$$

აშკარაა, რომ (4) ანალოგიურია შრედინგერის განტოლებისა შემდეგი ეფექტური პოტენციალით:

$$U_{eff} = e\phi + \frac{\varepsilon}{mc^2} e\phi - \frac{(e\phi)^2}{2mc^2} - \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} \quad (5)$$

ცხადია, რომ (2) პირობის გათვალისწინებით, (5) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$U_{eff} \approx e\phi - \frac{(e\phi)^2}{2mc^2} = e\phi \left( 1 - \frac{e\phi}{2mc^2} \right) \quad (6)$$

საიდანაც ჩანს, რომ  $|e\phi| > 2mc^2$  შემთხვევაში  $U_{eff} < 0$ , ანუ დამუხტული უსპინო ნაწილაკი მუხტის ნიშნისგან დამოუკიდებლად განიცდის მიზიდვას. ამასთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ რელატივისტურ შემთხვევაში ერთსა და იმავე ძლიერ ელექტროსტატიკურ ველში შეიძლება არსებობდეს ბმული მდგომარეობები როგორც უსპინო ნაწილაკის, ასევე მისი ანტინაწილაკის.

2.28. კლეინ-გორდონის სტაციონარული განტოლება:

$$e\phi = \frac{Zee_1}{r}; \quad \vec{A} = 0 \quad (1)$$

პოტენციალით, შემდეგნაირად შეიძლება ჩაინეროს:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{Zee_1 E}{mc^2} \frac{1}{r} - \frac{(Zee_1)^2}{2mc^2} \frac{1}{r^2} \right\} \psi_{\vec{p}_0}^+ = \frac{p_0^2}{2m} \psi_{\vec{p}_0}^+ \quad (2)$$

სადაც  $E = \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4}$ . ცხადია, რომ (2) განტოლება ეკვივალენტურია შრედინგერის განტოლების,  $E$  ენერგიაზე დამოკიდებული შემდეგი ეფექტური პოტენციალით:

$$U_{eff} = \frac{Zee_1 E}{mc^2} \frac{1}{r} - \frac{(Zee_1)^2}{2mc^2} \frac{1}{r^2} \quad (3)$$

რელატივისტურ კვანტურ თეორიაში გაფანტვის ამოცანა ისევე ისმება, როგორც არარელატივისტურ შემთხვევაში. კერძოდ,  $\psi_{\vec{p}_0}^+$  ტალღურ ფუნქციას დიდ მანძილებზე ისევ ბრტყელ ტალღას+განშლადი ტალღის სახე აქვს:

$$\psi_{\vec{p}_0}^+(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} e^{i\frac{\vec{p}_0 \vec{r}}{\hbar}} + \frac{f}{r} e^{ikr} \quad (4)$$

ამიტომ, არარელატივისტური გაფანტვის ბევრი შედეგი პირდაპირ გადმოიტანება (ან ადვილად ზოგადდება) რელატივისტურ შემთხვევაში. ასე მაგალითად, ბორნის ამპლიტუდა მოიცემა ამ კრებულის პირველი ნაწილის პირველი თავის შესავალი ნაწილის (1.6) ფორმულით:

$$f_B = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U_{eff} e^{-i\vec{q}\vec{r}} dV; \quad \hbar\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}_0 \quad (5)$$

რელატივისტურ შემთხვევაში ბორნის მიახლოების გამოყენების პირობები ასეთია:

$$|U_{eff}| \ll \frac{\hbar p}{ma}; \quad |U_{eff}| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (6)$$

ეფექტური პოტენციალის (2) გამოსახულების პირველ წევრში (4)-ის პირველი პირობის გამოყენება შემდეგ უტოლობას იძლევა:

$$\left| \frac{Zee_1 E}{mc^2 r} \right| \ll \frac{\hbar p}{mr} \quad (7)$$

ანუ უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობა:

$$\frac{Ze^2}{\hbar c} \ll \frac{v}{c} < 1; \quad (vE = pc^2, |e_1| \approx e) \quad (8)$$

ისევე როგორც არარელატივისტურ თეორიაში, შეშფოთების თეორიის გამოყენების აუცილებელ პირობას წარმოადგენს  $Z \ll 137$  უტოლობა. შეშფოთების თეორიის გამოყენებადობა ეფექტური პოტენციალის (3) გამოსახულების მეორე წევრში (6) პირობების მეორე უტოლობით განისაზღვრება. გვექნება:

$$\frac{(Zee_1)^2}{2mc^2} \frac{1}{r^2} \ll \frac{\hbar^2}{mr^2} \quad (9)$$

ანუ უნდა სრულდებოდეს შემდეგი უტოლობა:

$$\left( \frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^2 \ll 1 \quad (10)$$

როგორც ვხედავთ, (10) უფრო სუსტი მოთხოვნაა, ვიდრე (8) მოთხოვნა.

შევნიშნოთ, რომ (3) და (5) ფორმულების საშუალებით გაფანტვის ამპლიტუდის გამოთვლისას, მეორე წევრი (3) გამოსახულებაში უნდა უგულებელვყოთ, რაც იმით არის გამოწვეული, რომ ის,  $Z\alpha$  პარამეტრის მიხედვით, მეორე რიგის მცირე სიდიდეა. ამ მოსაზრების და შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$\int \frac{1}{r} e^{-iqr} dV = \frac{4\pi}{q^2} \quad (11)$$

მიიღება უსპინო ნაწილაკის ელექტრულ კულონურ ველში ბორნის მიახლოებაში გაფანტვის ამპლიტუდა და გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა:

$$f_B = -\frac{2Zee_1 E}{\hbar^2 c^2 q^2}; \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \approx \left( \frac{Zee_1}{2v_0 p_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (12)$$

ეს ფორმულები შეიძლება შედარდეს არარელატივისტური თეორიის რეზერფორდის ფორმულას.

2.29. უსპინო დამუხტული ნაწილაკის  $\phi(r)$  პოტენციალის მქონე ელექტროსტატიკურ ველში გაფანტვის ამპლიტუდა, ბორნის მიახლოებაში შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$f_B = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U_{eff} e^{-i\vec{q}\vec{r}} dV \quad (1)$$

სადაც ეფექტურ პოტენციალს ვღებულობთ ფორმულით:

$$U_{eff} = \frac{eE}{mc^2} \phi(r) - \frac{1}{2mc^2} (e\phi(r))^2 \quad (2)$$

ულტრარელატივისტურ შემთხვევაში, როცა  $E \approx pc \rightarrow \infty$ , მეორე წევრი (2) გამოსახულებაში შეგვიძლია უგულებელვყოთ და გაფანტვის ამპლიტუდა იქნება:

$$f_B \approx -\frac{ep}{2\pi\hbar^2 c} \int \phi(r) e^{-iqr} dV = -\frac{ep}{2\pi\hbar^2 c} \tilde{\phi}(q) \quad (3)$$

შესაბამისად, გაფანტვის სრული კვეთა მიიღებს სახეს:

$$\sigma = \int |f|^2 d\Omega = \frac{e^2}{4\pi\hbar^2 c^2} \int_0^{\frac{4p^2}{\hbar^2}} |\tilde{\phi}|^2 dq^2 \quad (4)$$

$p \rightarrow \infty$  ზღვარში (4) გამოსახულების ინტეგრალის ზედა ზღვრად უსასრულობა შეიძლება ავიღოთ და მაშინ გაფანტვის სრული კვეთა  $\sigma(E)$ , ენერგიის  $E \rightarrow \infty$  უსასრულოდ ზრდისას მუდმივი სიდიდეა. არარელატივისტურ შემთხვევაში  $\sigma \approx E^{-1}$ , როცა  $E \rightarrow \infty$ . ეს ფაქტი კი იმასთან არის დაკავშირებული, რომ, როგორც ეს ჩანს (2) ეფექტური პოტენციალის გამოსახულებიდან, ენერგიის ზრდასთან ერთად იზრდება ნაწილაკის ურთიერთქმედება ელექტროსტატიკურ ველთან.

ბორნის მიახლოების გამოყენებადობა ამ ამოცანაში განისაზღვრება წინა ამოცანის (6) უტოლობების პირველი უტოლობით და იძლევა შემდეგ პირობას:

$$|e\phi_0| \ll \frac{\hbar c}{a} \quad (5)$$

სადაც  $\phi_0$  და  $a$ , შესაბამისად, პოტენციალის მახასიათებელი მნიშვნელობა და მისი მოქმედების რადიუსია. ძლიერ ელექტროსტატიკურ ველებში (5) პირობის დარღვევის შემთხვევაში აღარ შეიძლება ბორნის მიახლოების გამოყენება. მაგრამ გაფანტვის სრული კვეთა მუდმივია  $E \rightarrow \infty$ -თვის ამ შემთხვევაშიც და შეიძლება გამოითვალოს კვაზიკლასიკური ფორმულით:

$$\sigma_{E \rightarrow \infty} \approx 4\pi \int_0^\infty \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{e}{\hbar c} \int_{-\infty}^\infty \phi(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz \right] \right\} \rho d\rho \quad (6)$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ მიღებული შედეგების სამართლიანობისათვის აუცილებელია, პოტენციალი უსასრულობაში  $\frac{1}{r^2}$ -ზე სწრაფად ეცემოდეს, რადგანაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, გაფანტვის სრული კვეთა უსასრულო ხდება (ისევე როგორც არარელატივისტურ თეორიაში) (4) ინტეგრალის ქვედა საზღვარზე (მცირე კუთხეებზე) განშლადობის გამო.

2.30. სტაციონარულ ტალღურ განტოლებას რელატივისტური უსპინო ნაწილაკისათვის, მუდმივ გარეშე სკალარულ ველში ასეთი სახე აქვს:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \right\} \psi = \frac{p_0^2}{2m} \psi; \quad (c^2 p_0^2 = E^2 - m^2 c^4) \quad (1)$$

რომელიც ფორმით ემთხვევა შრედინგერის არარელატივისტურ განტოლებას, ამიტომ პირდაპირ შეგვიძლია გამოვიყენოთ არარელატივისტური გაფანტვის თეორიის ფორმულები. კერძოდ, ბორნის მიახლოებაში გვექნება:

$$f_B(q) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(r) e^{-iqr} dV = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{U}(q) \quad (2)$$

შესაბამისად, გაფანტვის სრული კვეთა მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\sigma(E) = \frac{m^2}{4\pi\hbar^2 p_0^2} \int_0^{\frac{4p_0^2}{\hbar^2}} |\tilde{U}(q)|^2 dq^2 \quad (3)$$

$p_0 \approx \frac{E}{c}$  ულტრარელატივისტურ ზღვარში გვექნება:

$$\sigma(E) \approx \frac{m^2 c^2}{4\pi\hbar^2 E^2} \int_0^\infty |\tilde{U}(q)|^2 dq^2 \propto \frac{1}{E^2} \quad (4)$$

ბორნის მიახლოების გამოყენების პირობა კი ასე გამოიყურება:

$$U_0 \ll \frac{\hbar p_0}{ma} \quad (5)$$

სადაც  $U_0$  და  $a$ , შესაბამისად, პოტენციალის მახასიათებელი მნიშვნელობა და მისი მოქმედების რადიუსია.

### თავი 3. $\gamma$ დირაკის მატრიცები

3.1.  $\gamma$  მატრიცების დირაკის წარმოდგენაში გვაქვს:

$$(\gamma^0)^+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 \quad (1)$$

$$(\gamma^i)^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}^+ = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \quad (2)$$

სადაც გამოყენებულია ფაქტი, რომ  $(\gamma_0)^2 = 1$ ,  $\gamma^0$  და  $\gamma^i$  ანტიკომუტირებენ და პაულის მატრიცები ერმიტულია. ეს თანაფარდობები სამართლიანია  $\gamma$  მატრიცების ნებისმიერ წარმოდგენაში, რომლებიც მიიღება დირაკის წარმოდგენიდან უნიტარული გარდაქმნებით.

3.2. წინა ამოცანის შედეგების გამოყენებით მიიღება:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}^+ &= -\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)^+ = -\frac{i}{2}(\gamma_\nu^+\gamma_\mu^+ - \gamma_\mu^+\gamma_\nu^+) = \\ &= -\frac{i}{2}\gamma_0(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)\gamma_0 = \gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_0\end{aligned}$$

3.4.  $\gamma_5^+ = i\gamma_3^+\gamma_2^+\gamma_1^+\gamma_0^+ = i\gamma_0\gamma_3\gamma_0\gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_0\gamma_0\gamma_0 = i\gamma_0\gamma_3\gamma_2\gamma_1 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5$   
 $\gamma_5^{-1} = \gamma_5$  თვისება შეიძლება გამოვიყვანოთ  $\gamma_0^{-1} = \gamma_0$  და  $\gamma_i^{-1} = -\gamma_i = \gamma^i$  თვისებებიდან, რომლებიც, თავის მხრივ, გამომდინარეობენ  $\gamma_\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma_\mu = 2\delta_\mu^\nu$  ანტიკომუტაციური თანაფარდობიდან.

3.5.  $\mathcal{E}$  სიმბოლოს განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\begin{aligned}-\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma &= \frac{i}{4!}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 - \gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2 + \dots + \gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0) = \\ &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5\end{aligned}$$

3.6. ა) შედეგი პირდაპირ გამომდინარეობს 3.4 ამოცანიდან.

$$\text{ბ) } (\gamma_5\gamma_\mu)^+ = \gamma_\mu^+\gamma_5^+ = \gamma_0\gamma_\mu\gamma^0\gamma_5 = \gamma^0\gamma_5\gamma_\mu\gamma^0$$

3.7.  $\mu = 0$ -თვის გვაქვს:

$$\{\gamma_5, \gamma^0\} = \gamma_5\gamma^0 + \gamma^0\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 - i\gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0$$

ანალოგიურად გამოითვლება დანარჩენი შემთხვევებიც.

3.8 პირდაპირი დათვლით მიიღება:

$$\begin{aligned}[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_5] &= \frac{i}{2}[\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu, \gamma_5] = \\ &= \frac{i}{2}(\gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_5\} - \{\gamma_\mu, \gamma_5\}\gamma_\nu - \gamma_\nu\{\gamma_\mu, \gamma_5\} + \{\gamma_\nu, \gamma_5\}\gamma_\mu) = 0\end{aligned}$$

სადაც გამოყენებულია ფაქტი, რომ  $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ .

$$3.9. \not{a}\not{a} = a^\mu a^\nu \gamma_\mu\gamma_\nu = \frac{1}{2}a^\mu a^\nu (\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = g^{\mu\nu}a_\mu a_\nu = a^2$$

3.10. ა)  $\{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2\gamma_\mu\gamma^\mu = 2\delta_\mu^\mu = 8$ , საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

$$\text{ბ) } \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu = (2g_{\mu\nu} - \gamma_\alpha\gamma_\mu)\gamma^\mu = 2\gamma_\nu - 4\gamma_\nu = -2\gamma_\nu$$

$$3.11. \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu = (2g_{\mu\alpha} - \gamma_\alpha\gamma_\mu)\gamma^\beta\gamma^\mu = 2\gamma^\beta\gamma_\alpha + 2\gamma_\alpha\gamma^\beta = 4\delta_\alpha^\beta$$



$$3.12. \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\mu = (2\delta_\mu^\alpha - \gamma^\alpha \gamma_\mu) \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^\beta \gamma^\nu - 4\gamma^\alpha g^{\beta\gamma} = \\ = -2(2g^{\beta\gamma} - \gamma^\beta \gamma^\gamma) \gamma^\alpha = -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha$$

3.13.  $\sigma_{\mu\nu}$  მატრიცების განმარტებიდან მიიღება:

$$\sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu)$$

საიდანაც (3.10) ამოცანის შედეგების გამოყენებით მიიღება  $\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 12$

3.14. გამოიყენეთ 3.8-3.10 ამოცანების შედეგები.

3.15. პირდაპირი გამოთვლით მიიღება:

$$\sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} (4\delta_\alpha^\beta \gamma_\beta - 4\gamma_\mu - 4\gamma_\mu + 4g_{\mu\beta} \gamma^\beta) = 0$$

3.16.

$$\sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta} = -\frac{i}{8} (-8\gamma^\nu \gamma^\mu - 16g^{\mu\nu} + 8\gamma^\mu \gamma^\nu + 16g^{\mu\nu} - 16g^{\mu\nu} - 8\gamma^\nu \gamma^\mu + 16g^{\mu\nu} 8\gamma^\mu \gamma^\nu) = \\ = -2i(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = -4\sigma^{\mu\nu}$$

3.17. გამოიყენეთ 3.15 ამოცანის შედეგი.

$$3.18. \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 12\gamma_5$$

3.19.  $\gamma$  მატრიცების ერმიტულობა გამომდინარეობს დირაკის  $\vec{\alpha}$  მატრიცების ერმიტულობიდან:

$$\gamma_4^+ = \alpha_4^+ = \alpha_4; \quad \gamma_j^+ = -i^+ \alpha_j^+ \alpha_4^+ = i\alpha_j \alpha_4 = -i\alpha_4 \alpha_j = \gamma_j$$

3.20. გვაქვს:

$$\gamma_4^2 = \alpha_4^2 = 1; \quad \gamma_j^2 = (-i\alpha_4 \alpha_j)(-i\alpha_4 \alpha_j) = 1 \quad (1)$$

ასევე, თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $\alpha_4$  და  $\alpha_j$  მატრიცები ერთმანეთთან ანტიკომუტირებენ, მივიღებთ:

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = (-i\alpha_4 \alpha_i)(-i\alpha_4 \alpha_k) + (-i\alpha_4 \alpha_k)(-i\alpha_4 \alpha_i) = -\alpha_4 \alpha_j \alpha_4 \alpha_k - \alpha_4 \alpha_k \alpha_4 \alpha_j = \\ = \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} \quad (2)$$

ასევე:

$$\gamma_4 \gamma_j + \gamma_j \gamma_4 = -i\alpha_4^2 \alpha_j - i\alpha_4 \alpha_j \alpha_4 = -i\alpha_j + i\alpha_j = 0 \quad (3)$$

ამგვარად დამტკიცებულია, რომ:

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

3.21.  $\beta = \gamma_4; \quad \alpha_j = i\alpha_4 \gamma_j = i\gamma_4 \gamma_j$

$$3.22. \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -i\vec{\sigma}^0 \\ i\vec{\sigma}^0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.28.  $\sigma_3$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები შემდეგი განტოლებიდან განისაზღვრებიან:

$$\sigma_3 w^\lambda = \lambda w^\lambda \quad (1)$$

სადაც  $\lambda = \pm 1$ , ხოლო  $w^\lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ -ორკომპონენტიანი სპინორია. (1) განტოლების

ამონახსნია ( $w^{\lambda+} w^{\lambda-} = 1$  ნორმირების პირობის გათვალისწინებით):

$$w^{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad w^{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

პირდაპირი გამოთვლით მიიღება, რომ:

$$\sigma_+ w^{\lambda=1} = 0; \quad \sigma_+ w^{\lambda=-1} = 2w^{\lambda=1}; \quad \sigma_- w^{\lambda=1} = 2w^{\lambda=-1}; \quad \sigma_- w^{\lambda=-1} = 0 \quad (3)$$

გაიხსენეთ, რომ მატრიცული ოპერატორი  $\vec{\sigma} = 2\vec{s}$ , სადაც  $\vec{s}$  ნაწილაკის სპინის ოპერატორია, რომელიც შეესაბამება  $s = \frac{1}{2}$  სპინურ კვანტურ რიცხვს. ამიტომ

სპინის პროექციები შემდეგ მნიშვნელობებს დებულობენ:  $s_3 = \frac{\lambda}{2} = \pm \frac{1}{2}$

3.29  $\sigma_i \sigma_k \sigma_l = (\delta_{ik} + i\epsilon_{ikm} \sigma_m) \sigma_l = \delta_{ik} \sigma_l + i\epsilon_{ikl} - \epsilon_{ikm} \epsilon_{mlj} \sigma_j$ . ადვილი საჩვენებელია, რომ ორი ანტისიმეტრიული ტენზორის ნამრავლი შემდეგი დეტერმინანტის ტოლია:

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{mlj} = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{il} & \delta_{ij} \\ \delta_{kn} & \delta_{kl} & \delta_{kj} \\ \delta_{mn} & \delta_{ml} & \delta_{mj} \end{vmatrix}$$

თუ ამ გამოსახულებაში ავიღებთ  $m = n$ , მოვახდენთ აჯამვას განმეორებადი ინდექსებით და გამოვიყენებთ  $\epsilon_{mlj}$  ტენზორში ვექტორული ინდექსების ციკლური გადასმის  $\epsilon_{mlj} = \epsilon_{ljm}$  თვისებას, მივიღებთ:

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{mlj} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{ij} \\ \delta_{kl} & \delta_{kj} \end{vmatrix} = \delta_{il} \delta_{kj} - \delta_{ij} \delta_{kl}$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$\sigma_i \sigma_k \sigma_l = \delta_{ik} \sigma_l + \delta_{kl} \sigma_i - \delta_{il} \sigma_k + i\epsilon_{ikl}$$

3.30. ა) გაითვალისწინეთ გამამატრიცების ცხადი სახე

$$ბ) \hat{p}^2 = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) p_\mu p_\nu = g_{\mu\nu} p_\mu p_\nu$$

3.31. ა)  $2(AB)$

$$ბ) 2A_\mu$$

3.35. ა)  $16(BC)(AD)$

$$ბ) 4C^2 A^2 \hat{B}$$

3.36. ა) 0

$$ბ) 8(AB)(1 + \gamma_5)$$

3.37. ორი ანტისიმეტრიული ტენზორის ნამრავლი შეიძლება გამოისახოს მეტრიკული ტენზორებისაგან შედგენილი შემდეგი დეტერმინანტით:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\sigma} \mathcal{E}_{\alpha\beta\rho\tau} = \begin{vmatrix} g_{\mu\alpha} & g_{\mu\beta} & g_{\mu\rho} & g_{\mu\tau} \\ g_{\nu\alpha} & g_{\nu\beta} & g_{\nu\rho} & g_{\nu\tau} \\ g_{\lambda\alpha} & g_{\lambda\beta} & g_{\lambda\rho} & g_{\lambda\tau} \\ g_{\sigma\alpha} & g_{\sigma\beta} & g_{\sigma\rho} & g_{\sigma\tau} \end{vmatrix} \quad (1)$$

თუ (1) ტოლობაში აიღებთ  $\alpha = \mu$ ,  $\beta = \nu$  და ჩაატარებთ განმეორებადი ინდექსებით აჯამვას, მიიღებთ:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\sigma} \mathcal{E}_{\alpha\beta\rho\tau} = 2g_{\lambda\tau} g_{\sigma\rho} - 2g_{\lambda\rho} g_{\sigma\tau} \quad (2)$$

3.38. წინა, 3.37 ამოცანის შედეგის გამოყენებით მიიღება:

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\sigma} \mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\rho} = -6g_{\sigma\rho}$$

3.39. თუ დაუშვებთ, რომ ყველა ინდექსი დასამტკიცებელ ტოლობაში სხვადასხვაა, მაშინ მიიღება:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = id \mathcal{E}_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \quad (\mu \neq \nu \neq \sigma) \quad (2)$$

განიხილეთ შემთხვევა  $\mu = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $\lambda = 3$ , მაშინ აუცილებლად  $\sigma = 0$  და (1) ტოლობა შემდეგ სახეს მიიღებს:  $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -id \gamma_0 \gamma_5$  და თუ ვისარგებლებთ  $\gamma_5$ -ის განსაზღვრებით, მიიღება, რომ  $d = -1$ . გაამრავლეთ (1) ტოლობა თანმიმდევრობით  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\lambda}$  და  $g_{\nu\lambda}$  სიდიდეებზე. შედეგად,  $a$ ,  $b$  და  $c$  კოეფიციენტებისათვის მიიღება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} 4 &= 4a + b + c \\ -2 &= a + 4b + c \\ 4 &= a + b + 4c \end{aligned} \quad (2)$$

საიდანაც:

$$a = c = -b = 1 \quad (3)$$

საბოლოოდ ვღებულობთ ტოლობას:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = g_{\mu\nu} \gamma_\lambda - g_{\mu\lambda} \gamma_\nu + g_{\nu\lambda} \gamma_\mu - i \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma_\sigma \gamma_5 \quad (4)$$

3.40. ამოცანა ამოიხსნება 3.39 ამოცანის ანალოგიურად, რა დროსაც:

$$A = C = -B = 2, D = 0$$

3.41. დასამტკიცებლად გამოიყენეთ 3.39 ამოცანის ფორმულა და გამამატრიცების თვისებები.

3.42. ცხადია, რომ:

$$Sp \sigma_i = Sp \alpha_i = Sp \gamma_i = 0; Sp \sigma_i^0 = 0. \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

აგრეთვე აშკარაა, რომ ერთეულოვანი მატრიცის შპური მატრიცის რანგის ტოლია. ამიტომ, მეორე რანგის ერთეულოვანი მატრიცის შპური 2-ს უდრის, მეოთხე რანგის კი -4-ს, ანუ:

$$Sp(\sigma_i^0)^2 = 2; \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$$Sp \sigma_i^2 = Sp \alpha_i^2 = Sp \gamma_i^2 = 4; \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

ამიტომ:

$$Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0 = Sp(\delta_{ik} + i \epsilon_{jkl} \sigma_l^0) = \delta_{jk} Sp 1 + i \epsilon_{jkl} Sp \sigma_l = \delta_{jk} Sp 1 \quad (4)$$

მაშასადამე:

$$Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0 = 2 \delta_{jk} \quad (5)$$

3.43.

$$Sp(\vec{\sigma}^0 \vec{A})(\vec{\sigma}^0 \vec{B}) = Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0 A_j B_k = Sp(\sigma_j^0 \sigma_k^0) A_j B_k = 2 \delta_{jk} A_j B_k = 2(\vec{A} \vec{B}) \quad (1)$$

ანუ:

$$Sp(\vec{\sigma}^0 \vec{A})(\vec{\sigma}^0 \vec{B}) = 2(\vec{A} \vec{B}) \quad (2)$$

3.44.

$$Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0 \sigma_l^0 = Sp(\delta_{jk} + i \epsilon_{jkn} \sigma_n^0) \sigma_l^0 = \delta_{jk} Sp \sigma_l^0 + i \epsilon_{jkn} Sp \sigma_n^0 \sigma_l^0 = i \epsilon_{jkn} 2 \delta_{nl} = 2i \epsilon_{jkl} \quad (1)$$

ანუ:

$$Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0 \sigma_l^0 = 2i \epsilon_{jkl} \quad (2)$$

$$3.45. Sp(\vec{\sigma}^0 \vec{A})(\vec{\sigma}^0 \vec{B})(\vec{\sigma}^0 \vec{C}) = A_j B_k C_l Sp \sigma_j^0 \sigma_k^0 \sigma_l^0 = 2i \epsilon_{jkl} A_j B_k C_l = 2i A_j [\vec{B} \times \vec{C}]_j \quad (1)$$

საიდანაც:

$$Sp(\vec{\sigma}^0 \vec{A})(\vec{\sigma}^0 \vec{B})(\vec{\sigma}^0 \vec{C}) = 2i(\vec{A} [\vec{B} \times \vec{C}]) \quad (2)$$

3.46.

$$\begin{aligned} Sp\sigma_j^0\sigma_k^0\sigma_l^0\sigma_m^0 &= Sp(\delta_{jk} + i\varepsilon_{jkn}\sigma_n^0)(\delta_{lm} + i\varepsilon_{lmn}\sigma_n^0) = 2\delta_{jk}\delta_{lm} - \varepsilon_{jkn}\varepsilon_{lmn}Sp(\sigma_n^0\sigma_n^0) = \\ &= 2\delta_{jk}\delta_{lm} - \varepsilon_{jkn}\varepsilon_{lmn}2\delta_{nm} = 2\delta_{jk}\delta_{lm} + 2\delta_{jm}\delta_{kl} - 2\delta_{jl}\delta_{km} \end{aligned} \quad (1)$$

სადაც გამოყენებულია ფორმულა:

$$\varepsilon_{jkn}\varepsilon_{lmn} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (2)$$

ანუ, საბოლოოდ:

$$Sp\sigma_j^0\sigma_k^0\sigma_l^0\sigma_m^0 = 2\delta_{jk}\delta_{lm} + 2\delta_{jm}\delta_{kl} - 2\delta_{jl}\delta_{km} \quad (3)$$

$$3.47. Sp\vec{\sigma}^0(\vec{\sigma}^0\vec{A})(\vec{\sigma}^0\vec{B})(\vec{\sigma}^0\vec{C}) = 2\vec{A}(\vec{B}\vec{C}) + 2\vec{C}(\vec{A}\vec{B}) - 2\vec{B}(\vec{A}\vec{C})$$

3.50. განვიხილოთ  $Sp(\alpha_j\alpha_k\alpha_l)$ . ამ სიდიდის გამოხატვა  $\varepsilon_{jkl}$  ტენზორით აღარ შეიძლება. რადგან სამი პოლარული ვექტორის ნამრავლი პოლარული ტენზორია, ამიტომ  $\varepsilon_{jkl}$  აქსიალურია. 3.48 ამოცანაში მიღებული  $\alpha_j\alpha_k = \delta_{jk} + i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$  ფორმულის საშუალებით კი ადვილად დავინახავთ, რომ:

$$Sp(\alpha_j\alpha_k\alpha_l) = 0$$

$$3.51. Sp(\alpha_j\alpha_k\alpha_l\alpha_m) = 4\delta_{jk}\delta_{lm} + 4\delta_{jm}\delta_{kl} - 4\delta_{jl}\delta_{km}$$

$$3.52. Sp\{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{A})(\vec{\alpha}\vec{B})(\vec{\alpha}\vec{C})\} = 4\vec{A}(\vec{B}\vec{C}) - 4\vec{B}(\vec{A}\vec{C}) + 4\vec{C}(\vec{A}\vec{B})$$

$$3.53. Sp(\alpha_j\alpha_k\sigma_l) = 4i\varepsilon_{jkl}$$

$$3.54. Sp\vec{\sigma}(\vec{\alpha}\vec{A})(\vec{\alpha}\vec{B}) = 4i[\vec{A}\times\vec{B}]$$

$$3.55. Sp(\vec{\alpha}\vec{A})(\vec{\alpha}\vec{B})(\vec{\sigma}\vec{C}) = 4i[\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}]$$

$$3.57. Sp(\alpha_j\alpha_k\sigma_l\sigma_m) = 4\delta_{jk}\delta_{lm} + 4\delta_{jm}\delta_{kl} - 4\delta_{jl}\delta_{km}$$

3.58. გამოიყენეთ  $\gamma$  მატრიცების შპურის შიგნით ციკლური გადანაცვლების თვისება და  $\gamma_5^2 = 1$ . მივიღებთ, რომ:

$$\begin{aligned} Sp\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{2n+1}} &= Sp\gamma_5\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{2n+1}} = Sp\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{2n+1}}\gamma_5 = \\ &= -Sp\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{2n+1}}\gamma_5\gamma_5 = -Sp\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_{2n+1}} = 0 \end{aligned}$$

და  $\gamma_5$  ანტიკომუტირებს ყველა  $\gamma_{\mu}$ -თან.

3.59. დამტკიცებისათვის გამოიყენეთ  $\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}$  თანაფარდობა; გადაადგილეთ  $\gamma_{\mu_1}$  მატრიცა მარჯვნივ და შემდეგ გამოიყენეთ  $\gamma$  მატრიცების შპურის შიგნით ციკლური გადანაცვლების თვისება.

$$3.60. tr(\gamma_{\mu}) = tr(\gamma_{\mu}\gamma_5\gamma_5) = tr(\gamma_5\gamma_{\mu}\gamma_5) = -tr((\gamma_5)^2\gamma_{\mu}) = -tr(\gamma_{\mu})$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

3.61.  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$  გამოსახულებიდან შპურის ალებით ადვილად მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

3.62.  $tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = tr[(2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_\rho \gamma_\sigma] = 2g_{\mu\nu} tr(\gamma_\rho \gamma_\sigma) - 2g_{\mu\rho} tr(\gamma_\nu \gamma_\sigma) + 2g_{\mu\sigma} tr(\gamma_\nu \gamma_\rho) - tr(\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu)$  საიდანაც, წინა ამოცანის შედეგის და

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = tr(\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu)$$

თანაფარდობის გამოყენებით, გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

3.63.  $tr \gamma_5 = tr(\gamma_5 \gamma_0 \gamma_0) = -tr(\gamma_0 \gamma_5 \gamma_0) = tr(\gamma_0 \gamma_0 \gamma_5) = -tr \gamma_5$

საიდანაც აშკარაა დასამტკიცებელი ტოლობა.

3.64.  $tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = \frac{1}{4} tr(\gamma_5 \gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu) = \frac{1}{4} tr(\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \gamma^\alpha) = -\frac{1}{4} tr(\gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\alpha) = -g_{\mu\nu} tr \gamma_5 = 0$

3.65.  $tr(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma)$  სიდიდე ანტისიმეტრიული ტენზორია ინდექსების მიმართ, ამიტომ ის პროპორციული უნდა იყოს ლევი-ჩევიტას ტენზორის. პროპორციულობის კოეფიციენტი შეიძლება განისაზღვროს:

$$\mu = 0, \nu = 1, \rho = 2, \sigma = 3$$

ჩასმით.

3.66.  $tr(\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n+1}) = tr(\gamma_5 \gamma_5 \not{a}_1 \dots \not{a}_{2n+1}) = (-1)^{2n+1} tr(\gamma_5 \not{a}_1 \dots \not{a}_{2n+1} \gamma_5) = \dots = -tr(\gamma_5 \gamma_5 \not{a}_1 \dots \not{a}_{2n+1}) = -tr(\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n+1})$

საიდანაც აშკარაა დასამტკიცებელი ტოლობა.

3.67.  $tr(\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n}) = tr(C \not{a}_1 C^{-1} C \dots C^{-1} C \not{a}_{2n} C^{-1})$  (1)

სადაც  $C$  მატრიცა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$$
 (2)

ამიტომ (1) და (2)-დან მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა:

$$tr(\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n}) = (-1)^{2n} tr(\not{a}_1^T \dots \not{a}_{2n}^T) = tr(\not{a}_{2n} \dots \not{a}_1)$$
 (3)

3.68.  $tr(\gamma_5 \gamma_\mu) = -tr(\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4) = 0$

რადგანაც კენტი რაოდენობის  $\gamma$  მატრიცების ნამრავლიდან შპური ნულის ტოლია.

3.69.

$$\begin{aligned} tr(\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_6) = & 4[(a_1 \cdot a_2)((a_3 \cdot a_4)(a_5 \cdot a_6) - (a_3 \cdot a_5)(a_4 \cdot a_6) + (a_3 \cdot a_6)(a_4 \cdot a_5))] - \\ & - (a_1 \cdot a_3)((a_2 \cdot a_4)(a_5 \cdot a_6) - (a_2 \cdot a_5)(a_4 \cdot a_6) + (a_2 \cdot a_6)(a_4 \cdot a_5)) + \\ & + (a_1 \cdot a_4)((a_2 \cdot a_3)(a_5 \cdot a_6) - (a_2 \cdot a_5)(a_3 \cdot a_6) + (a_2 \cdot a_6)(a_3 \cdot a_5)) - \\ & - (a_1 \cdot a_5)((a_2 \cdot a_3)(a_4 \cdot a_6) - (a_2 \cdot a_4)(a_3 \cdot a_6) + (a_2 \cdot a_6)(a_3 \cdot a_4)) + \\ & + (a_1 \cdot a_6)((a_2 \cdot a_3)(a_4 \cdot a_5) - (a_2 \cdot a_4)(a_3 \cdot a_5) + (a_2 \cdot a_5)(a_3 \cdot a_4)) \end{aligned}$$

$$3.70. 4[p_\mu q_\nu - (p \cdot q)g_{\mu\nu} + p_\nu q_\mu + i\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu} p^\alpha q^\beta - m^2 g_{\mu\nu}]$$

$$3.71. -2p - 2\gamma_5 p - 4m - 4m\gamma_5$$

$$3.72. \text{ა) } 4p_\mu q_\nu + 4p_\nu q_\mu + 4(m^2 - (pq))g_{\mu\nu}$$

$$\text{ბ) } 8p_\mu p_\nu - 4(p^2 + m^2)g_{\mu\nu}$$

$$3.73. \text{ა) } 0$$

$$\text{ბ) } 16(ab)(ac) - 8a^2(bc)$$

$$3.74. \text{ა) } 4[(AB)(CD) + (AD)(BC) - (AC)(BD) + cd(AB) + bc(AD) + bd(AC) + ac(BD) + ab(CD) + ad(BC) + abcd]$$

$$\text{ბ) } 4a^2 b^2 [(cd)(ef) + (cf)(de) - (ce)(df)]$$

$$\text{გ) } 16a^2(bc)$$

3.75. ექსპონენციალური ფუნქციის გაშლით მიიღება:

$$e^{\gamma_5 a} = 1 + (\gamma_5 a) + \frac{1}{2}(\gamma_5 a)^2 + \frac{1}{3!}(\gamma_5 a)^3 + \dots \quad (1)$$

მაგრამ:

$$(\gamma_5 a)^2 = -a^2, \quad (\gamma_5 a)^3 = -a^2(\gamma_5 a) \quad (2)$$

ამიტომ (1) და (2)-დან მიიღება:

$$e^{\gamma_5 a} = \left(1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots\right) + (\gamma_5 a) \left(1 - \frac{a^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} + \dots\right) = \cos(\sqrt{a^2}) + \frac{1}{\sqrt{a^2}} \sin(\sqrt{a^2}) \gamma_5 a \quad (3)$$

სადაც:

$$a^2 = a_\mu a^\mu \quad (4)$$

3.76.  $\sum_a c_a \Gamma^a = 0$  თანაფარდობის  $\Gamma_b = (\Gamma^b)^{-1}$ -ზე გამრავლებით მიიღება:

$$c_b \Gamma^b \Gamma_b + \sum_{a \neq b} c_a \Gamma^a \Gamma_b = 0 \quad (1)$$

მონესრიგების ლემის გამოყენებით, (1) შემდეგი სახით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$c_b I + \sum_{d, \Gamma^d \neq 1} c_d \eta \Gamma^d = 0 \quad (2)$$

სადაც:

$$\eta \in \{\pm 1, \pm i\} \quad (3)$$

(2) გამოსახულებიდან შპურის ალებით და იმ ფაქტის გამოყენებით, რომ:

$$\text{tr}(\Gamma^a) = \begin{cases} 0, & \Gamma^a \neq I \\ 4, & \Gamma^a = I \end{cases} \quad (4)$$

მიიღება:

$$c_b = 0 \quad (\forall b) \quad (5)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $\Gamma$ -მატრიცები წრფივად დამოუკიდებელია.

3.77. ამ ფაქტის შემონიშნება შეიძლება პირდაპირი დათვლებით. ასე, მაგალითად:

$$\gamma_5 \sigma_{01} = -i \sigma_{23}$$

3.78. მითითებაში მოცემული ოპერაციების შედეგად მიიღება:

$$A \Gamma_b = c_b \Gamma^b \Gamma_b + \sum_{a \neq b} c_a \Gamma^a \Gamma_b = c_b I + \sum_{d, \Gamma^d \neq I} c_d \eta \Gamma^d$$

ამ გამოსახულებიდან შპურის ალებით დასამტკიცებელი ტოლობა მიიღება.

$$3.79. \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho = (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) \gamma^\sigma + i \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_5 \gamma^\sigma$$

$$3.80. \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} \gamma_5 + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}$$

$$3.81. \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho \gamma_5 = \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} \gamma^\alpha - i g_{\nu\rho} \gamma_5 \gamma_\mu + i g_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu$$

$$3.82. \{\gamma_\mu, \sigma_{\nu\rho}\} = -2 \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} \gamma^\alpha$$

$$3.83. \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_a \gamma_b \gamma_5) = \\ = 4i(-g_{\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma a b} + g_{\mu\rho} \epsilon_{\nu\sigma a b} - g_{\rho\nu} \epsilon_{\mu\sigma a b} + g_{\alpha\beta} \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} - g_{\sigma\beta} \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} + g_{\sigma\alpha} \epsilon_{\beta\mu\nu\rho})$$

3.84. გამოიყენეთ 3.36 ამოცანის შედეგი.

$$3.85. [\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}] = 2i(g_{\nu\rho} \sigma_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} \sigma_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} \sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} \sigma_{\mu\rho})$$

$\frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}$  მატრიცები ლორენცის ჯგუფის გენერატორებია სპინორულ წარმოდგენაში.

3.86. თუ  $M$  მატრიცა კომუტირებს ყველა  $\gamma$  მატრიცასთან, მაშინ 3.32 ამოცანის შედეგების გათვალისწინებით  $\Gamma^b \neq I$  და შეიძლება დაინეროს:

$$M = c_b \Gamma^b + \sum_{a \neq b} c_a \Gamma^a \quad (1)$$

ცნობილია, რომ ყოველთვის არსებობს ისეთი  $\Gamma^d$  მატრიცა, რომელიც ანტიკომუტირებს  $\Gamma^b \neq I$  მატრიცასთან. გავამრავლოთ (1) ტოლობა მარცხნიდან  $\Gamma_d$ -ზე, ხოლო მარჯვნიდან  $-\Gamma^d$ -ზე:



$$\Gamma_a M \Gamma^d = -c_b \Gamma^b + \sum_{a \neq b} \eta c_a \Gamma^a \quad (2)$$

$M$  მატრიცა კომუტირებს ყველა  $\gamma$  მატრიცასთან და ამიტომ ის კომუტირებს  $\Gamma^d$ -თანაც. შედეგად, (2)-დან მიიღება:

$$M = -c_b \Gamma^b + \sum_{a \neq b} \eta c_a \Gamma^a \quad (3)$$

თუ (1) და (3) ტოლობებს გავამრავლებთ  $\Gamma_b$ -ზე და ავიღებთ მიღებული გამოსახულებების შპურებს, მივიღებთ, რომ  $c_b = 0$ . ამიტომ (1) ტოლობაში ყველა კოეფიციენტი ნულია, გარდა ერთეულოვანი მატრიცის კოეფიციენტისა.

3.87. ბეიკერ-ჰაუსდორფის ფორმულის:

$$e^B A e^{-B} = A + [B, A] + \frac{1}{2!} [B, [B, A]] + \dots \quad (1)$$

გამოყენებით მიიღება:

$$\begin{aligned} U \bar{\alpha} U^+ &= \bar{\alpha} + 2\beta \bar{n} - 2(\bar{n} \cdot \bar{\alpha}) \bar{n} - \frac{8}{3!} \beta \bar{n} + \frac{16}{4!} (\bar{\alpha} \cdot \bar{n}) \bar{n} + \dots = \\ &= \bar{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} (\bar{\alpha} \cdot \bar{n}) \bar{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \beta \bar{n} \end{aligned} \quad (2)$$

რადგანაც:

$$[\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, \alpha^i] = n^j (\beta \{\alpha^j, \alpha^i\} - \{\beta, \alpha^i\} \alpha^j) = 2\beta n^i \quad (3)$$

$$[\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, [\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, \alpha^i]] = -4(\bar{\alpha} \cdot \bar{n}) n^i \quad (4)$$

$$[\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, [\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, [\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, \alpha^i]]] = -8\beta n^i \quad (5)$$

$$[\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, [\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, [\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, [\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}, \alpha^i]]]] = 16(\bar{\alpha} \cdot \bar{n}) n^i \quad (6)$$

და ა.შ.

მეორე მხრივ, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$(\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n})^2 = -1, (\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n})^3 = -(\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n}), (\beta \bar{\alpha} \cdot \bar{n})^4 = 1, \dots \quad (7)$$

ამიტომ:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} - (I - U^2)(\bar{\alpha} \cdot \bar{n}) \bar{n} &= \bar{\alpha} + 2\beta \bar{n} - 2(\bar{\alpha} \cdot \bar{n}) \bar{n} - \frac{8}{3!} \beta \bar{n} + \dots = \\ &= \bar{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} (\bar{\alpha} \cdot \bar{n}) \bar{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \beta \bar{n} \end{aligned} \quad (8)$$

რიგორც ვხედავთ, (2) და (8) თანაფარდობების მარჯვენა მხარეები ერთმანეთს ემთხვევა, რის გამოც სამართლიანია შესამოწმებელი თანაფარდობა.

3.88. კავშირი  $\gamma_\mu$  მატრიცებსა და დირაკის წარმოდგენაში  $\gamma_\mu^{Dirac}$  მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\gamma_\mu S = S \gamma_\mu^{Dirac} \quad (1)$$

თუ (1)-ში შევიტანთ:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2)$$

უნიტარულ მატრიცას  $(a, b, c, d)$  (2) გამოსახულებაში  $2 \times 2$  მატრიცებია), მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sigma^i c & -\sigma^i d \\ \sigma^i a & \sigma^i b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\sigma^i & -a\sigma^i \\ d\sigma^i & -c\sigma^i \end{pmatrix} \quad (3)$$

(3)-ის ამონახსნია  $a = -b = c = d = I$ . ამიტომ:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \quad (4)$$

ამ წარმოდგენაში:

$$\sigma_{0i} = -i \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (5)$$

და

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (6)$$

3.89. მატრიცებს:

$$\gamma^0 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\gamma^1 = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

$$(\gamma^0)^2 = 1, (\gamma^1)^2 = -1, \gamma^0\gamma^1 = -\gamma^1\gamma^0 \quad (3)$$

ანუ ისინი აკმაყოფილებენ (III.1) პირობას (კლიფორდის ალგებრას).  $\gamma^5$  მატრიცა შემდეგნაირად განიშარტება:

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu)$  წარმოადგენს ანტისიმეტრიულ ტენზორს და ის პროპორციული უნდა იყოს  $\epsilon^{\mu\nu}$ -სი:

$$tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = C \epsilon^{\mu\nu} \quad (5)$$

$\mu = 0, \nu = 1$  დაფიქსირებით მიიღება, რომ  $C = 2$  (იმ დაშვებით, რომ  $\epsilon^{01} = +1$ ). ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$\gamma^5 \gamma^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu \quad (6)$$

3.90. რადგან მეორე რანგის მატრიცას აქვს ოთხი ელემენტი, ამიტომ გვექნება მხოლოდ ოთხი წრფივად დამოუკიდებელი მატრიცა. აქედან სამი არის პაულის  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0$  მატრიცა; ერთეულოვანი მატრიცა ასევე წრფივად დამოუკიდებელი მატრიცაა ამ მატრიცებიდან. რადგან სულ დამოუკიდებელი უნდა იყოს ოთხი მატრიცა, ამიტომ ერთეულოვანი მატრიცა წარმოადგენს მეორე რანგის ერთადერთ მატრიცას, რომელიც წრფივად დამოუკიდებელია  $\sigma_i^0$ -ზე. მაგრამ, ერთეულოვანი მატრიცა კომუტატორია ნებისმიერ მატრიცასთან და, მაშასადამე,  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0$ -თანაც. აქედან გამომდინარეობს, რომ მეოთხე ანტიკომუტატიური მატრიცის პოვნა შეუძლებელია.

3.91. გამოვიყენოთ დირაკის პირობა  $\alpha_4 \alpha_k$  მატრიცისათვის:

$$\alpha_4 \alpha_k = -\alpha_k \alpha_4 = -I \alpha_k \alpha_4 \quad (1)$$

სადაც  $I$  ერთეულოვანი მატრიცაა. აიღეთ (1) ტოლობის დეტერმინანტები; გაითვალისწინეთ, რომ ისინი რიცხვებია და ამიტომ შესაძლებელია მათი გადასმა. იმის გათვალისწინებით, რომ  $Det(-I) = (-1)^n$

$$(Det \alpha_4)(Det \alpha_k) = (-1)^n (Det \alpha_k)(Det \alpha_4) = (-1)^n (Det \alpha_4)(Det \alpha_k) \quad (2)$$

სადაც  $n$  მატრიცის რანგია. (2) ტოლობიდან ცხადია  $(-1)^n = 1$ , რაც გვიჩვენებს, რომ  $n$  უნდა იყოს ლუნი რიცხვი. ამიტომ აშკარაა, რომ დირაკის პირობებს მესამე რანგის მატრიცები ვერ დააკმაყოფილებს.

3.92. პირველ ყოვლისა, ვიპოვოთ რისი ტოლია  $\alpha_i \alpha_k$  ნამრავლი. პირდაპირი დათვლით ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$\alpha_1 \alpha_2 = i \sigma_3 \quad (1)$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$\alpha_2 \alpha_3 = i \sigma_1; \alpha_1 \alpha_3 = -i \sigma_3 \text{ და ა.შ.} \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებში მონაწილე ნამრავლები კი შეგვიძლია ჩავწეროთ მესამე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი  $\epsilon_{ikl}$  ტენზორის საშუალებით; სახელდობრ:

$$\alpha_j \alpha_k = i \epsilon_{ikl} \sigma_l \quad (j \neq k = 1, 2, 3) \quad (3)$$

რადგან  $\alpha_j = \rho_1 \sigma_j$ , ხოლო  $\alpha_k = \rho_1 \sigma_k$ , ამიტომ (3) ფორმულის თანახმად:

$$\alpha_j \alpha_k = \rho_1 \sigma_j \rho_1 \sigma_k = \rho_1^2 \sigma_j \sigma_k = \sigma_j \sigma_k = i \varepsilon_{ikl} \sigma_l \quad (4)$$

ასევე, რადგან  $\gamma_j = -i \alpha_4 \alpha_j$  და  $\gamma_k = -i \alpha_4 \alpha_k$ , მიიღება:

$$\gamma_j \gamma_k = i \varepsilon_{ikl} \sigma_l \quad (j \neq k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

როცა  $j = k$ , მაშინ  $\gamma_j^2 = \alpha_j^2 = \sigma_j^2 = 1$ . მაშასადამე, ზოგადად შეიძლება დაინფროს (გაიხსენეთ, რომ, როცა რომელიმე ორი ინდექსი ტოლია,  $\varepsilon_{iik} = 0$ ):

$$\alpha_j \alpha_k = \delta_{jk} + i \varepsilon_{jkl} \sigma_l \quad (6)$$

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i \varepsilon_{jkl} \sigma_l \quad (7)$$

$$\gamma_j \gamma_k = \delta_{jk} + i \varepsilon_{jkl} \sigma_l \quad (8)$$

ზემოთ მიღებული ფორმულები სამართლიანია პაულის  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0$  მატრიცებისთვისაც, კერძოდ:

$$\sigma_j^0 \sigma_k^0 = \delta_{jk} + i \varepsilon_{jkl} \sigma_l^0 \quad (9)$$

$$\sigma_j^0 \sigma_k^0 - \sigma_k^0 \sigma_j^0 = 2i \varepsilon_{jkl} \sigma_l^0 \quad (10)$$

3.93. გვაქვს:

$$\alpha_j \alpha_k = \delta_{jk} + i \varepsilon_{jkl} \sigma_l \quad (1)$$

$$\alpha_k \alpha_j = \delta_{kj} + i \varepsilon_{kjl} \sigma_l \quad (2)$$

(1) და (2) -დან,  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  და  $\varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{kjl}$ -ის გამო მიიღება:

$$[\alpha_j, \alpha_k] = 2i \varepsilon_{jkl} \sigma_l \quad (3)$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = [\gamma_j, \gamma_k] = 2i \varepsilon_{jkl} \sigma_l \quad (4)$$

$$3.94. \quad (\vec{\sigma} \vec{A})(\vec{\sigma} \vec{B}) = (\sigma_j A_j)(\sigma_k B_k) = \sigma_j \sigma_k A_j B_k \quad (1)$$

აქ გამოვიყენოთ წინა ამოცანის (3)-ე ფორმულა, გვექნება:

$$(\vec{\sigma} \vec{A})(\vec{\sigma} \vec{B}) = (\delta_{jk} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_l) A_j B_k = A_j B_j + i \varepsilon_{ijk} \sigma_l A_j B_k = (\vec{A} \vec{B}) + i \sigma_l [\vec{A} \times \vec{B}] \quad (2)$$

ანუ, საბოლოოდ:

$$(\vec{\sigma} \vec{A})(\vec{\sigma} \vec{B}) = (\vec{A} \vec{B}) + i \vec{\sigma} [\vec{A} \times \vec{B}] \quad (3)$$

სრულიად ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი ფორმულების სამართლიანობა:

$$(\vec{\alpha} \vec{A})(\vec{\alpha} \vec{B}) = (\vec{A} \vec{B}) + i \vec{\sigma} [\vec{A} \times \vec{B}] \quad (4)$$

$$(\vec{\gamma}\vec{A})(\vec{\gamma}\vec{B}) = (\vec{A}\vec{B}) + i\vec{\sigma}[\vec{A}\times\vec{B}] \quad (5)$$

$$(\vec{\sigma}^0\vec{A})(\vec{\sigma}^0\vec{B}) = (\vec{A}\vec{B}) + i\vec{\sigma}^0[\vec{A}\times\vec{B}] \quad (6)$$

3.95. როცა  $\vec{A} = \vec{B}$ , წინა ამოცანის (1) ფორმულიდან მიიღება:

$$(\vec{\sigma}\vec{A})^2 = \vec{A}^2 + i(\vec{\sigma}[\vec{A}\times\vec{A}]) \quad (1)$$

როცა  $\vec{A}$  ვექტორის კომპონენტები ერთმანეთთან კომუტირებს, მაშინ:

$$(\vec{\sigma}\vec{A})^2 = \vec{A}^2 \quad (2)$$

ასევე:

$$(\vec{\alpha}\vec{A})^2 = (\vec{\gamma}\vec{A})^2 = (\vec{\sigma}^0\vec{A})^2 = \vec{A}^2 \quad (3)$$

როცა  $\vec{A} = \vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორია, მაშინ:

$$(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = (\vec{\alpha}\vec{n})^2 = (\vec{\gamma}\vec{n})^2 = (\vec{\sigma}^0\vec{n})^2 = 1 \quad (4)$$

$$3.96. \left(\vec{\sigma}\hat{l}\right)\left(\vec{\sigma}\hat{p}\right) = i\left(\vec{\sigma}\left[\hat{l}\times\hat{p}\right]\right)$$

3.98. უნდა ვაჩვენოთ, რომ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 (\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0)$  მატრიცები სისტემის მობრუნებისას ისევე გარდაიქმნებიან, როგორც კოორდინატები, ე.ი. როგორც:

$$x'_i = a_{ik}x_k; \quad (i=1,2,3) \quad (1)$$

სადაც გარდაქმნის  $a_{ik}$  კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$a_{ki}a_{mi} = a_{ik}a_{im} = \delta_{km} \quad (2)$$

პაულის და დირაკის მატრიცების ვექტორული ხასიათის დასადგენად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ამ ახალ სისტემაშიც მოცემულ მატრიცებს ისეთივე თვისებები აქვთ, როგორიც ძველში. დავამტკიცოთ, რომ ახალ სისტემაშიც დაცულია დირაკის პირობა:

$$\alpha'_i\alpha'_k + \alpha'_k\alpha'_i = 2\delta_{ik} \quad (3)$$

ამისათვის დავწეროთ გარდაქმნის კანონები  $\alpha'_i$  და  $\alpha'_k$  მატრიცებისათვის:

$$\alpha'_i = a_{im}\alpha_m; \quad \alpha'_k = a_{kn}\alpha_n \quad (4)$$

შევიტანოთ (4), (3) ტოლობაში და გავითვალისწინოთ (2) პირობა. გვექნება:

$$\begin{aligned} \alpha'_i\alpha'_k + \alpha'_k\alpha'_i &= a_{im}a_{kn}\alpha_m\alpha_n + a_{kn}a_{im}\alpha_m\alpha_n = a_{im}a_{kn}(\alpha_m\alpha_n + \alpha_n\alpha_m) = \\ &= a_{im}a_{kn}2\delta_{mn} = 2a_{im}a_{km} = 2\delta_{ik} \end{aligned} \quad (5)$$

ამგვარად,  $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  წარმოადგენს ვექტორს. სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ  $\vec{\sigma}^0(\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0)$ -იც ვექტორია.

3.99. რადგან  $\vec{\sigma}^0$  ვექტორი დაკავშირებულია სპინთან, ეს უკანასკნელი კი, როგორც ყოველი მომენტის გამომხატველი ვექტორი, აქსიალურია, ამიტომ აქსიალური იქნება  $\vec{\sigma}^0$  ვექტორიც, ე.ი. საკოორდინატო ღერძების ინვერსიისას მისი კომპონენტები ნიშანს არ იცვლის.

რაც შეეხება  $\vec{\alpha}$  ვექტორს, ღერძების არეკვლისას  $p_x, p_y, p_z$  ნიშანს იცვლის, ამიტომ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  კომპონენტებიც ნიშანს უნდა იცვლიდეს, რადგანაც  $(\vec{\alpha}\vec{p})$  სიდიდე, რომელიც დირაკის განტოლებაში შედის, ნამდვილი სკალარი უნდა იყოს. ამგვარად,  $\vec{\alpha}$  პოლარული ვექტორია.

3.100. თუ  $1, \sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0$  მატრიცები სრულ სისტემას ადგენენ, მაშინ ნებისმიერი მეორე რანგის მატრიცა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ამ ოთხი მეორე რანგის მატრიცის წრფივი კომბინაციის საშუალებით. ამ წარმოდგენას შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ (A_{11} + A_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (A_{12} + A_{21}) \sigma_x^0 + (A_{11} - A_{22}) \sigma_z^0 + i(A_{12} - A_{21}) \sigma_y^0 \right\}$$

3.101. ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$[\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}]_j = \varepsilon_{jkl} \sigma_k \sigma_l \quad (1)$$

მეორე მხრივ, (3.49) ამოცანის თანახმად:

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i\varepsilon_{klm} \sigma_m \quad (2)$$

ამიტომ, (1) და (2)-დან:

$$[\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}]_j = \varepsilon_{jkl} (\delta_{kl} + i\varepsilon_{klm} \sigma_m) = \varepsilon_{jkk} + i\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{klm} \sigma_m = i\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{klm} \sigma_m = 2i\delta_{jm} \sigma_m = 2i\sigma_j \quad (3)$$

ანუ:

$$[\vec{\sigma} \times \vec{\sigma}] = 2i\vec{\sigma} \quad (4)$$

თუ (4) ტოლობას  $\rho_1^2 = 1$ -ზე გავამრავლებთ და გავიხსენებთ, რომ  $\rho_1 \vec{\sigma} = \vec{\alpha}$ , მივიღებთ:

$$[\vec{\alpha} \times \vec{\alpha}] = 2i\vec{\sigma} \quad (5)$$

რადგან  $\vec{\alpha} = i\gamma_4 \vec{\gamma}$ , ამიტომ გვექნება:

$$[\vec{\gamma} \times \vec{\gamma}] = 2i\vec{\sigma} \quad (6)$$

იმავე ფორმულას პაულის  $\vec{\sigma}^0$  მატრიცებისათვის შემდეგი სახე ექნება:

$$[\vec{\sigma}^0 \times \vec{\sigma}^0] = 2i\vec{\sigma}^0 \quad (7)$$

3.102. თუ გამოვიყენებთ (3.48) ამოცანის მე-(9)  $\sigma_j^0 \sigma_k^0 = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl} \sigma_l^0$  ფორმულას, გვექნება:

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0)^2 &= \sigma_{1j}^0 \sigma_{2j}^0 \sigma_{1k}^0 \sigma_{2k}^0 = (\sigma_{1j}^0 \sigma_{1k}^0) (\sigma_{2j}^0 \sigma_{2k}^0) = (\delta_{jk} + i\epsilon_{jkl} \sigma_l^0) (\delta_{jk} + i\epsilon_{jkm} \sigma_m^0) = \\ &= \delta_{jj} - \epsilon_{jkl} \epsilon_{jkm} \sigma_l^0 \sigma_m^0 \end{aligned} \quad (1)$$

მაგრამ:

$$\epsilon_{jkl} \epsilon_{jkm} = 2\delta_{lm}; \quad \delta_{jj} = 3 \quad (2)$$

ამიტომ:

$$(\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0)^2 = 3 - 2\delta_{lm} \sigma_l^0 \sigma_m^0 = 3 - 2(\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0) \quad (3)$$

ანუ მივიღეთ დასამტკიცებელი ტოლობა.

3.103. რადგან წინა ამოცანის თანახმად  $(\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0)^2 = 3 - 2(\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0)$ , ამიტომ  $(\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0)$ -ის ნებისმიერი ხარისხი მართლაც გამოსატყული იქნება დასამტკიცებელი ტოლობის სახით. ვიპოვოთ  $a_n$  და  $b_n$  კოეფიციენტები. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ  $(\vec{\sigma}_1^0 \vec{\sigma}_2^0)$ -ის საკუთარი მნიშვნელობა ტრიპლეთურ მდგომარეობაში ერთის ტოლია, სინგლეთურში კი  $-3$ -ის. ამიტომ გვექნება ორი ტოლობა:

$$1 = a_n + b_n; \quad (-3)^n = a_n - 3b_n \quad (1)$$

საიდანაც:

$$a_n = \frac{3 + (-3)^n}{4}; \quad b_n = \frac{3 - (-3)^n}{4} \quad (2)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

#### 4. დირაკის განტოლება

4.1. ა)  $[H_D, \vec{p}] = 0$

ბ)  $[H_D, L^i] = \epsilon^{ijk} [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, x^j p^k] = \epsilon^{ijk} \alpha^l [p^l, x^j] p^k = -i\epsilon^{ijk} \alpha^j p^k = i(\vec{p} \times \vec{\alpha})^i$

გ)  $[H_D, \vec{L}^2] = -i\epsilon^{ijk} \alpha^j (L^i p^k + p^k L^i) \neq 0$

4.2. ა) რადგანაც:

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \alpha_k] &= \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \sigma_k - \sigma_k \sigma_i \\ \sigma_i \sigma_k - \sigma_k \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2i\epsilon_{ikl} \sigma_k \\ 2i\epsilon_{ikl} \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ikl} \alpha_l \end{aligned} \quad (1)$$

და

$$[\Sigma_i, \beta] = 0 \quad (2)$$

ამიტომ:

$$[s_i, H] = \frac{c}{2} [\Sigma_i, \alpha_k] \hat{p}_k = ic \varepsilon_{ikl} \alpha_l \hat{p}_k \equiv -ic \varepsilon_{ikl} \alpha_k \hat{p}_l \quad (3)$$

$$\text{ბ) } \Sigma^2 = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \quad (4)$$

ამიტომ  $\hat{S}^2 = \frac{1}{4} \Sigma^2 = \frac{3}{4}$  და, ცხადია,  $\hat{S}^2$  კომუტირებს ჰამილტონიანთან.

$$\text{გ) } [\hat{J}_i, \hat{H}] = 0$$

$$\text{დ) } [J^2, H] = 0$$

$$4.3. \text{ ა) } [H_D, \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}] = -\frac{i}{2|\vec{p}|} \varepsilon^{ijk} p^j \alpha^k p^i = 0$$

ბ) კომუტირებს ჰამილტონიანთან მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ  $\vec{n}$  და  $\vec{p}$  კოლინეალური ვექტორებია.

$$\text{გ) } [\vec{\Sigma} \hat{p}, \hat{H}] = [\Sigma_i, \hat{H}] \hat{p}_i + \Sigma_i [\hat{p}_i, \hat{H}] = 2i \varepsilon_{ikl} \alpha_l \hat{p}_k \hat{p}_i = 0$$

$$4.4. \text{ ა) რადგანაც } \hat{I} \hat{p} = -\hat{p} \hat{I}, \text{ ამიტომ } [\hat{I}, \hat{H}] = [\hat{I}, c \vec{\alpha} \hat{p}] = -2c \vec{\alpha} \hat{p} \hat{I}$$

$$\text{ბ) } [\hat{p}, mc^2 \beta] = 0, [\hat{p}, \hat{H}] = [\hat{p}, c \vec{\beta} \hat{p}] = c \beta^i \hat{\alpha} \hat{p} - c \hat{\alpha} \hat{p} \beta^i = 0$$

$$\text{გ) } [\gamma_5, \hat{H}] = 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ და } m=0 \text{ მასის ნაწილაკისათვის ეს კომუტატორი ნულია.}$$

$$4.5. (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (1)$$

დირაკის განტოლების კერძო ამონახსნია ბრტყელი ტალღა:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad (2)$$

(2) გამოსახულების (1)-ში შეტანით მიიღება ( $\gamma$  მატრიცების დირაკის ნარმოდგენაში):

$$\begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \vec{p} \\ \vec{\sigma} \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

სადაც  $E$  და  $\vec{p}$  ნაწილაკის ენერგია და იმპულსია. (3) ერთგვაროვანი სისტემის არატრივიალური ამოხსნები მაშინ არსებობს, როდესაც მისი დეტერმინანტი ნულია, რაც იძლევა შემდეგ კავშირს ენერგიასა და იმპულსს შორის:

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} = \pm E_p \quad (4)$$

საიდანაც ჩანს, რომ არსებობენ ამოხსნები დადებითი და უარყოფითი ენერგიებით.



$E = E_p$  დადებითი ენერგიებისათვის (3) სისტემას შემდეგი სახე აქვს:

$$(E_p - m)\varphi - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi = 0 \quad (5)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\varphi - (E_p + m)\chi = 0 \quad (6)$$

საიდანაც:

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \varphi \quad (7)$$

ანუ:

$$u(E_p, \vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \varphi \end{pmatrix} \quad (8)$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას  $v(\vec{p}) = u(-E_p, -\vec{p})$  და  $u(\vec{p}) = u(E_p, \vec{p})$ , მაშინ ფიქსირებული  $\vec{p}$ -თვის (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია  $u(\vec{p})e^{-ip \cdot x}$  და  $v(\vec{p})e^{ip \cdot x}$ , სადაც  $p^\mu = (E_p, \vec{p})$ .  $u(\vec{p})e^{-ip \cdot x}$  ამონახსნის ენერგია და იმპულსია  $E_p$  და  $\vec{p}$ , ხოლო  $v(\vec{p})e^{ip \cdot x}$  ამონახსნის ენერგია და იმპულსია  $-E_p$  და  $-\vec{p}$ . დამატებითი თავისუფლების ხარისხის საპოვნელად შემოვიღოთ helicity ოპერატორი  $\frac{1}{2}\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$ , სადაც  $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$ , კომუტირებს დირაკის ჰამილტონიანთან (იხ. ამოცანა 4.3 ა).

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებიდან:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \varphi = \pm \varphi \quad (9)$$

მიიღება:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}} \begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(და ანალოგიურად  $\chi_1$  და  $\chi_2$ -თვის). თუ ავიღებთ  $\vec{p} = p\vec{e}_z$ , საბაზისო ვექტორები იქნება:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

ხოლო საბაზისო ბისპინორებია:

$$u_1(\vec{p}) = N_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u_2(\vec{p}) = N_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$v_1(\vec{p}) = N_p \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v_2(\vec{p}) = N_p \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (13)$$

სადაც  $N_p = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}}$  ნორმირების ფაქტორია. გავიხსენოთ, რომ  $\vec{p} = p\vec{e}_z$ , ანუ  $\vec{p} \cdot \vec{\sigma} = p\sigma_3$ . ამ შემთხვევაში (12) და (13) ბისპინორები ადგენენ helicity ბაზისს. ნებისმიერი  $\vec{p}$  იმპულსისათვის უნდა გამოვიყენოთ (10), ნაცვლად (12) და (13)-ისა.

(1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r=1}^2 \int d^3\vec{p} \sqrt{\frac{m}{E_p}} (u_r(\vec{p})c_r(\vec{p})e^{-ipx} + v_r(\vec{p})d_r^+(\vec{p})e^{ipx}) \quad (14)$$

რაც ემთხვევა (IV.5)-ს.

4.7.  $u_s(\vec{p})$  და  $v_s(\vec{p})$   $i\frac{\partial}{\partial t}$  ენერჯის ოპერატორის საკუთარი ფუნქციებია, რომელთა საკუთარი მნიშვნელობებია  $E_p$  და  $-E_p$ .

4.8.

$$\sum_{i=1}^2 u_r(p)\bar{u}_r(p) = \frac{E_p + m}{2m} \begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_1^+ + \varphi_2\varphi_2^+ & -(\varphi_1\varphi_1^+ + \varphi_2\varphi_2^+) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} (\varphi_1\varphi_1^+ + \varphi_2\varphi_2^+) & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} (\varphi_1\varphi_1^+ + \varphi_2\varphi_2^+) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \end{pmatrix} \quad (1)$$

სადაც  $\varphi_r$  ( $r=1,2$ ) მოცემულია (4.5) ამოცანის (10) ფორმულით. ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ სისრულის პირობას:

$$\varphi_1\varphi_1^+ + \varphi_2\varphi_2^+ = 1 \quad (2)$$

თუ გამოვიყენებთ, აგრეთვე, შემდეგ ტოლობას:

$$(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2 = E_p^2 - m^2 \quad (3)$$

მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას:

$$\sum_{i=1}^2 u_r(p)\bar{u}_r(p) = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} E_p + m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E_p + m \end{pmatrix} = \frac{p + m}{2m} \quad (4)$$

ანალოგიურად მიიღება მეორე ტოლობაც.

4.9.  $\Lambda_+^2 = \frac{1}{4m^2} (\mathbf{p}^2 + 2m\mathbf{p} + m^2) = \Lambda_+$ , სადაც გამოყენებულია ფაქტი, რომ  $\mathbf{p}^2 = p^2 = m^2$ . ანალოგიურად აჩვენებთ, რომ  $\Lambda_-^2 = \Lambda_-$ . ამ ოპერატორების ორ-თოგონალობა გამომდინარეობს შემდეგი იგივეობიდან:

$$(\mathbf{p} + m)(\mathbf{p} - m) = p^2 - m^2 = 0$$

4.10. ამ თავის შესავალი ნაწილის (IV.6) დირაკის განტოლების გამოყენებით მიიღება:

$$\Lambda_+ u_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + m) u_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m} (m + m) u_r(\vec{p}) = u_r(\vec{p}) \quad (1)$$

$$\Lambda_- u_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - m) u_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m} (m - m) u_r(\vec{p}) = 0 \quad (2)$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$\Lambda_- v_r(\vec{p}) = 0; \Lambda_+ v_r(\vec{p}) = v_r(\vec{p}) \quad (3)$$

4.11. ეს თავისება პირდაპირ შეიძლება შემოწმდეს. ასე მაგალითად,  $x$  - კომპონენტი  $\vec{\Sigma}$  ვექტორისა იქნება:

$$\Sigma^1 = \frac{i}{2} (\gamma^2 \gamma^3 - \gamma^3 \gamma^2) = i \gamma^2 \gamma^3 \quad (1)$$

მეორე მხრივ კი გვაქვს:

$$\gamma_5 \gamma_0 \gamma^1 = i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma^1 = i \gamma^2 \gamma^3 \quad (2)$$

(1) და (2)-დან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა.

4.12. ა)  $\vec{\Sigma}$ -ს განმარტებიდან მიიღება:

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = -\frac{1}{4} \varepsilon^{ilm} \varepsilon^{jpq} [\gamma^l \gamma^m, \gamma^p \gamma^q] = -\frac{1}{4} \varepsilon^{ilm} \varepsilon^{jpq} ([\gamma^l \gamma^m, \gamma^p] \gamma^q + \gamma^p [\gamma^l \gamma^m, \gamma^q]) \quad (1)$$

(1)-ში კომუტატორები გამოვსახოთ ანტიკომუტატორებით:

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = -\frac{1}{4} \varepsilon^{ilm} \varepsilon^{jpq} [\gamma^l \{\gamma^m, \gamma^p\} \gamma^q - \{\gamma^l, \gamma^p\} \gamma^m \gamma^q + \gamma^p \gamma^l \{\gamma^m, \gamma^q\} - \gamma^p \{\gamma^l, \gamma^q\} \gamma^m] \quad (2)$$

III თავის შესავალი ნაწილის (III.1) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ilm} \varepsilon^{jpq} (g^{mp} \gamma^l \gamma^q - g^{lp} \gamma^m \gamma^q + g^{mq} \gamma^p \gamma^l - g^{lq} \gamma^p \gamma^m) \quad (3)$$

(3)-ში პირველი წევრი ასე შეიძლება ჩაინეროს;

$$\varepsilon^{ilm} \varepsilon^{jpq} g^{mp} \gamma^l \gamma^q = (\delta^{ij} \delta^{lq} - \delta^{iq} \delta^{lj}) \gamma^l \gamma^q = -3\delta^{ij} - \gamma^j \gamma^i \quad (4)$$

ანალოგიურად შეიძლება ჩაინეროს (3)-ის დანარჩენი წევრებიც. საბოლოოდ მიიღება:

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = \gamma^j \gamma^i - \gamma^i \gamma^j \quad (5)$$

მეორე მხრივ, გვაქვს:

$$2i\varepsilon^{ijk}\Sigma^k = -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{klm}\gamma^l\gamma^m = \gamma^j\gamma^i - \gamma^i\gamma^j \quad (6)$$

ამიტომ:

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = 2i\varepsilon^{ijk}\Sigma^k \quad (7)$$

საიდანაც ვღებულობთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

$$\text{ბ) } S^2 = -\frac{1}{4}\bar{\Sigma}^2 = -\frac{1}{4}(\gamma_5\gamma_0\bar{\gamma})^2 = \frac{1}{4}\bar{\gamma}\cdot\bar{\gamma} = -\frac{3}{4}$$

4.14.  $u_r(\vec{p})$  და  $v_r(\vec{p})$  სპინორები არ არიან  $\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები, თუ  $\vec{n}$  და  $\vec{p}$  პარალელური ვექტორებია.

4.15. უძრავი სისტემიდან  $Z$  ღერძის გასწვრივ  $v$  სიჩქარით მოძრავ სისტემაში გადასვლის ოპერატორს შემდეგი სახე აქვს;

$$S(\Lambda(v\vec{e}_z)) = e^{-\frac{i}{2}\omega_3\sigma^3} \quad (1)$$

თუ გამოვიყენებთ  $\omega_3 = -\varphi = -\arctan(v)$ , მაშინ (1)-დან მიიღება:

$$S(\Lambda) = \cosh\left(\frac{\varphi}{2}\right)I - \sinh\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} I & -\frac{p\sigma_3}{E_p + m} \\ -\frac{p\sigma_3}{E_p + m} & I \end{pmatrix} \quad (2)$$

ნებისმიერი მოძრაობისას,  $\sigma_3 p$  უნდა შეიცვალოს  $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$  გამოსახულებით.  $S(\Lambda)$  ოპერატორი არ არის უნიტარული.

4.16. ამ შემთხვევაში:

$$S = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma^3 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sigma^3 \end{pmatrix}$$

და ეს ოპერატორი უნიტარულია.

4.18. ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$\begin{aligned} \frac{W_\mu S^\mu}{m} &= \frac{1}{4m}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}P^\sigma S^\mu = \frac{1}{2m}\gamma_5\sigma_{\mu\sigma}S^\mu\partial^\sigma = \frac{i}{2m}\gamma_5(\gamma_\mu\gamma_\sigma - g_{\mu\sigma})(\mp ip^\sigma)S^\mu \\ &= \pm\frac{1}{2m}\gamma_5\not{p} = \frac{1}{2}\gamma_5\not{\hat{p}} \end{aligned} \quad (1)$$

სადაც ზედა (ქვედა) ნიშანი შეესაბამება დადებითი (უარყოფითი) ენერგიების შესაბამის მდგომარეობებს.

უძრავობის სისტემაში  $s^\mu$  ხდება  $(0, \vec{n})$ . ამიტომ  $\not{s} = -\vec{n} \cdot \vec{\gamma}$ ,  $\frac{\not{p}}{m} = \frac{p^0 \gamma^0}{m} = \gamma^0$

და გვექნება:

$$\frac{W \cdot s}{m} = \pm \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_0 \vec{n} \cdot \vec{\gamma} = \pm \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \quad (2)$$

4.19. დადებითი ენერგიის მქონე ამოხსნები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\gamma_5 \not{s} u(\vec{p}, \pm s) = \pm u(\vec{p}, \pm s) \quad (1)$$

თუ უძრავ სისტემაში  $s^\mu$  პოლარიზაციულ ვექტორს აირჩევთ  $\left(0, \vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\right)$  სახით (რაც შეესაბამება ამ ამოცანის ფორმულირებას), მაშინ ათვლის სისტემაში, სადაც ელექტრონს  $\vec{p}$  იმპულსი გააჩნია, პოლარიზაციული ვექტორი მოიცემა ლორენცის ბუსტის გამოყენებით:

$$s^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_p}{m} & \frac{p^i}{m} \\ \frac{p^i}{m} & \delta_{ij} + \frac{p^i p^j}{m(E_p + m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{m} \\ \vec{n} + \frac{(\vec{n} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{m(E_p + m)} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$  -თვის მიიღება  $s^\mu = \left(\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E_p}{m} \vec{n}\right)$ , რომლის გამოყენებით გვექნება:

$$\gamma_5 \not{s} u(\vec{p}, \pm s) = \frac{1}{m} \gamma_5 \not{s} p u(\vec{p}, \pm s) = \frac{1}{m} \gamma_5 \left( \frac{|\vec{p}|}{m} \gamma_0 - \frac{E_p}{m} \vec{\gamma} \cdot \vec{n} \right) (E_p \gamma_0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma}) u(\vec{p}, \pm s) \quad (3)$$

$(\vec{p} \cdot \vec{\gamma})^2 = -\vec{p}^2$  ფორმულის გამოყენებით, (3)-დან მიიღება:

$$\gamma_5 \not{s} u(\vec{p}, \pm s) = \gamma_5 \gamma_0 \vec{\gamma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} u(\vec{p}, \pm s) = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u(\vec{p}, \pm s) \quad (4)$$

(1), (4) ფორმულებიდან კი საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u(\vec{p}, \pm s) = \pm u(\vec{p}, \pm s) \quad (5)$$

ანალოგიურად, უარყოფითი ენერგიის მქონე ამონახსნებისათვის მიიღება:

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} v(\vec{p}, \pm s) = \mp v(\vec{p}, \pm s) \quad (6)$$

4.20.  $m \ll E_p$  ზღვარში,  $s^\mu$  ვექტორი მოიცემა ფორმულით:

$$s^\mu \approx \left( \frac{E_p}{m}, \frac{\vec{p}}{m} \right) \approx \frac{p^\mu}{m} \quad (1)$$

მაშინ:

$$\gamma_5 \not{s} u(\vec{p}, \pm s) \approx \gamma_5 \frac{p}{m} u(\vec{p}, \pm s) = \gamma_5 u(\vec{p}, \pm s) \quad (2)$$

სადაც გამოყენებულია დირაკის განტოლება  $\not{p} u(\vec{p}, \pm s) = m u(\vec{p}, \pm s)$  და (2)-დან მიიღება საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება:

$$\gamma_5 u(\vec{p}, \pm s) = \pm u(\vec{p}, \pm s) \quad (3)$$

იგივე სიტუაცია გვაქვს  $\nu$  სპინორისათვის.

$$4.21. [\gamma_5 \not{s}, \not{p}] = \gamma_5 \not{s} \not{p} - \not{p} \gamma_5 \not{s} = \gamma_5 (\not{s} \not{p} + \not{p} \not{s}) = \gamma_5 s^\mu p^\nu \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2s \cdot p \gamma_5 = 0 \quad (1)$$

$(\gamma_5 \not{s})^2 = -s^2 = 1$  ტოლობიდან კი გამომდინარეობს, რომ  $\gamma_5 \not{s}$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობაა  $\pm 1$ .

4.22.

$$\langle \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \rangle = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \times \left[ \frac{E_p + m}{2E_p} (n_3 |a|^2 + (n_1 + in_2) b^* a + (n_1 - in_2) a^* b - n_3 |b|^2) + \frac{E_p - m}{2E_p} (n_3 |a|^2 + (-n_1 + in_2) a^* b - (n_1 + in_2) b^* a - n_3 |b|^2) \right] \quad (1)$$

არარელატივისტურ ზღვარში (1)-დან მიიღება:

$$\langle \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \rangle = \varphi^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \varphi = \frac{n_3 |a|^2 + (n_1 + in_2) b^* a + (n_1 - in_2) a^* b - n_3 |b|^2}{|a|^2 + |b|^2} \quad (2)$$

$$4.23. \psi(x) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2m}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E_p + m} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-ipx}$$

$$4.24. \left\langle \frac{1}{2} \gamma_5 \right\rangle = \frac{1}{2}$$

4.25. დირაკის ჰამილტონიანი შეიძლება ჩაინეროს  $\gamma$  მატრიცებში:

$$[H_D, \gamma_5] = [\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \gamma^0 m, \gamma_5] = 2m\gamma^0 \gamma_5 \quad (1)$$

როგორც (1)-დან ჩანს,  $\gamma_5$  ოპერატორი მოძრაობის ინტეგრალია მხოლოდ უმასო დირაკის ნანილაკისათვის. ამ ოპერატორის საკუთარი ენერჯის მნიშვნელობები და პროექციებია, შესაბამისად,  $\pm 1, \Sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ .  $\gamma_5$  ოპერატორს კირალური ოპერატორი ეწოდება.

4.26. დირაკის განტოლების მარცხნიდან  $\gamma_5$ -ზე გამრავლებით მიიღება შემდეგი განტოლება:

$$(i\partial + m)\gamma_5 \psi = 0 \quad (1)$$

(1) განტოლების დირაკის განტოლებასთან შეკრებით და გამოკლებით მიიღება მოძრაობის განტოლებათა სისტემა  $\psi_L$  და  $\psi_R$  ვეილის ველებისათვის:

$$i\partial \psi_L - m \psi_R = 0 \quad (2)$$

$$i\partial \psi_R - m \psi_L = 0 \quad (3)$$

საიდანაც ჩანს, რომ უმასო ნანილაკებისათვის ეს განტოლებები ცალდებაან.

4.27. შესაძლებელია ამ განტოლებათა სისტემის დირაკის განტოლების სახით ჩაწერა. დირაკის სპინორი ასე ჩაინერება:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (1)$$

და

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

4.28. განტოლებათა სისტემა კოვარიანტულია, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

$$S_R^{-1} \bar{\sigma}^\mu S_L = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \quad (1)$$

$$S_L^{-1} \sigma^\mu S_R = \Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu \quad (2)$$

სადაც:

$$S_L = \cosh\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \sigma_1 \sinh\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (3)$$

$$S_R = \cosh\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \sigma_1 \sinh\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \quad (4)$$

$$4.32. F_1 = q^2 + m^2; F_2 = -2im$$

$$4.33. \bar{u}(\vec{p}) \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u(\vec{p}) = \frac{m}{2E_p} N$$

$$4.35. F_1 = -iq^2; F_2 = -2im; F_3 = -2m$$

4.36. დირაკის განტოლებაზე მარცხნიდან  $(i\partial + m)$  ოპერატორის მოქმედებით კლეინ-გორდონის განტოლება მიიღება:

$$4.37. \vec{j} = \frac{\vec{p}}{m}$$

$$4.38. \vec{r}_H = \vec{r} + \frac{\vec{p}}{H} t - i \left( \vec{\alpha} - \frac{\vec{p}}{H} \right) \frac{1}{2H} + i \left( \vec{\alpha} - \frac{\vec{p}}{H} \right) \frac{1}{2H} e^{-2iHt}$$

$$4.39. \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int d^3 \vec{p} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \{ c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-ipx} + d_r^*(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \} \quad (1)$$

სადაც:

$$c_1(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}}; c_2(\vec{p}) = 0 \quad (2)$$

$$d_1^*(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} (p_x + ip_y) \quad (3)$$

$$d_2^*(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} p_z \quad (4)$$

$$4.40. \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int d^3 \vec{p} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \{ c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{-ipx} + d_r^*(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \} \quad (1)$$

სადაც:

$$c_1(\vec{p}) = \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{3/4} \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} e^{-\frac{d^2 \vec{p}^2}{2}} \quad (2)$$

$$c_2(\vec{p}) = 0 \quad (3)$$

$$d_1^*(\vec{p}) = \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} (p_x + ip_y) e^{-\frac{d^2 \vec{p}^2}{2}} \quad (4)$$

$$d_2^*(\vec{p}) = \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} p_z e^{-\frac{d^2 \vec{p}^2}{2}} \quad (5)$$



4.41. 1/2 სპინის მქონე ნაწილაკის ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრაობა შემდეგი განტოლებით ჩაინერება:

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (1)$$

თუ ჩავთვლით, რომ  $z > 0$ -თვის ტალღური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი გამოსახულებით:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-iEt+iqz} \quad (2)$$

მაშინ (1) განტოლებიდან მიიღება:

$$\begin{pmatrix} E - m - V & -\sigma_3 q \\ \sigma_3 q & -E - m + V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

(3) განტოლებათა სისტემას გააჩნია არატრივიალური ამონახსნი მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება პირობა:

$$E = V \pm \sqrt{q^2 + m^2} \quad (4)$$

და ტალღური ფუნქცია იქნება:

$$\psi_I = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iEt+ipz} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iEt-ipz}; \quad z < 0 \quad (5)$$

$$\psi_{II} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q\sigma_3}{(E+m-V)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iEt+iqz}; \quad z > 0 \quad (6)$$

სადაც  $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ . ამასთან, (5) გამოსახულებაში მარჯვენა მხარის პირველი წევრი შეესაბამება  $\psi_{in}$  დაცემულ ტალღას, მეორე წევრი კი  $\psi_r$  არეკვლილ ტალღას, ხოლო (6) გამოსახულება შეესაბამება  $\psi_I$  გაჟონილ ტალღას. რადგანაც დირაკის განტოლება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებაა, უწყვეტობის პირობას მხოლოდ ტალღური ფუნქციები აკმაყოფილებენ და  $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$  მოთხოვნიდან მიიღება შემდეგი თანაფარდობები:

$$a + b = d \quad (7)$$

$$a - b = rd \quad (8)$$

სადაც  $r = \frac{E+m}{E+m-V} \frac{q}{p}$ . განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1. თუ სრულდება პირობა  $|E - V| \leq m$ , მაშინ  $q$  იმპულსი წმინდად წარმოსახვითია, ანუ  $q = ik$ , რის გამოც  $z > 0$  არეში ტალღური ფუნქცია ექსპონენციალურად ეცემა (იგივე სიტუაცია იყო არარელატივისტურ კვანტურ მექანიკაშიც). გააჟონილი, არეკლილი და დაცემული დენები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$\vec{j}_r = \bar{\psi}_r \gamma^3 \psi_r \vec{e}_z = 0 \quad (9)$$

$$\vec{j}_r = \bar{\psi}_r \gamma^3 \psi_r \vec{e}_z = -\frac{2p}{E+m} |b|^2 \vec{e}_z \quad (10)$$

$$\vec{j}_{in} = \bar{\psi}_{in} \gamma^3 \psi_{in} \vec{e}_z = \frac{2p}{E+m} |a|^2 \vec{e}_z \quad (11)$$

გაჟონვის კოეფიციენტი ნულია იმის გამო, რომ  $\vec{j}_r = 0$ , ხოლო არეკვლის კოეფიციენტი მოიცემა ფორმულით:

$$R = \frac{-j_r}{j_{in}} = \left| \frac{p(E+m-V) - ik(E+m)}{p(E+m-V) + ik(E+m)} \right|^2 = 1 \quad (12)$$

2. თუ სრულდება პირობა  $V < E - m$ , მაშინ  $q$  იმპულსი ნამდვილია. დაცემული, არეკლილი და გაჟონილი დენები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$\vec{j}_r = \frac{2q}{E+m-V} |d|^2 \vec{e}_z \quad (13)$$

$$\vec{j}_r = -\frac{2p}{E+m} |b|^2 \vec{e}_z \quad (14)$$

$$\vec{j}_{in} = \frac{2p}{E+m} |a|^2 \vec{e}_z \quad (15)$$

გაჟონვის კოეფიციენტი იქნება:

$$T = \frac{j_r}{j_{in}} = r \left| \frac{d}{a} \right|^2 = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad (16)$$

ხოლო არეკვლის კოეფიციენტი მოიცემა ფორმულით:

$$R = \frac{-j_r}{j_{in}} = \left( \frac{1-r}{1+r} \right)^2 \quad (17)$$

3. თუ სრულდება პირობა  $E + m < V$ , მაშინ  $q$  იმპულსი ნამდვილია, რაც იმას ნიშნავს, რომ  $z > 0$  არეში ტალღური ფუნქცია ოსცილირებს. ეს კი, თავის მხრივ, გამოწვეულია ფაქტით, რომ ელექტრონს გააჩნია ორი ენერგეტიკული არე, რომლებიც ერთმანეთისგან დაშორებული არიან  $2m$  სიგანის ღრეჩოთი. გაჟონვისა და არეკვლის კოეფიციენტებს იგივე სახე აქვთ, რაც მეორე შემთხვევაში, მაგრამ ამ შემთხვევაში არეკვლის კოეფიციენტი ერთზე მეტია, ხოლო გაჟონვის კოეფიციენტი უარყოფითია. ეს მოვლენა ცნობილია როგორც *კლეინის პარადოქსი*. მისი ახსნა მოცემული იყო 2.10 ამოცანის განხილვისას.

4.42. არეების მიხედვით დირაკის განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$\psi_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{ipz} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-ipz}; \quad z < 0 \quad (1)$$

$$\psi_{II} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q\sigma_3}{(E+m-V)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{iqz} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-q\sigma_3}{(E+m-V)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iqz}; \quad 0 < z < a \quad (2)$$

$$\psi_{III} = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{ipz}; \quad z > a \quad (3)$$

სადაც  $p = \sqrt{E^2 - m^2}$  და  $q = \sqrt{(E-V)^2 - m^2}$ .  $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$  და  $\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$  „შეკერვის“ პირობებიდან მიიღება გაჟონვის კოეფიციენტი:

$$T = |F|^2 = 16 \frac{|r|^2}{\left| (1+r)^2 e^{-iqa} - (1-r)^2 e^{iqa} \right|^2} \quad (4)$$

სადაც:

$$r = \frac{q}{p} \frac{E+m}{E+m-V} \quad (5)$$

4.43. არეების მიხედვით, ტალღური ფუნქციები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$\psi_I = \begin{pmatrix} B \\ B' \\ \frac{-ik\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{kz}; \quad z < -a \quad (1)$$

$$\psi_{II} = \begin{pmatrix} C \\ C' \\ \frac{q\sigma_3}{(E+m+V)} \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{iqz} + B \begin{pmatrix} D \\ D' \\ \frac{-q\sigma_3}{(E+m+V)} \begin{pmatrix} D \\ D' \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iqz}; \quad -a < z < a \quad (2)$$

$$\psi_{III} = \begin{pmatrix} F \\ F' \\ \frac{ik\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{kz}; \quad z > a \quad (3)$$

სადაც  $k = \sqrt{m^2 - E^2}$  და  $q = \sqrt{(E+V)^2 - m^2}$ . რადგანაც არ გვაქვს სპინური არეკვლა, შეგვიძლია ავირჩიოთ  $B' = C' = D' = F' = 0$ .  $\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a)$  და  $\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$  „შეკერვის“ პირობებიდან მიიღება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$e^{-ka} B = e^{-iqa} C + e^{iqa} D \quad (4)$$

$$e^{-ka} F = e^{iqa} C + e^{-iqa} D \quad (5)$$

$$-ire^{-ka} B = e^{-iqa} C - e^{iqa} D \quad (6)$$

$$ire^{-ka} F = e^{iqa} C - e^{-iqa} D \quad (7)$$

სადაც:

$$r = \frac{k}{q} \frac{E+m+V}{E+m} \quad (8)$$

(4)-(7) განტოლებების სხვადასხვა კომბინაციით კი შეიძლება მივიღოთ შემდეგი თანაფარდობები:

$$e^{-ka} (B-F) = 2i \sin(qa) (D-C) \quad (9)$$

$$ire^{-ka} (B-F) = 2 \cos(qa) (D-C) \quad (10)$$

$$e^{-ka}(B+F) = 2\cos(qa)(D+C) \quad (11)$$

$$re^{-ka}(B+F) = 2\sin(qa)(D+C) \quad (12)$$

უნდა განვასხვავოთ ერთმანეთისაგან ლუნი და კენტი ამოხსნები.

ა) თუ  $B=F$  და  $C=D$ , მაშინ (11) და (12) განტოლებები იძლევიან შემდეგ დისპერსიულ თანაფარდობებს:

$$\operatorname{tg}(qa) = \frac{k}{q} \frac{E+m+V}{E+m} \quad (13)$$

ეს ამოხსნები ლუნია, რადგანაც მათთვის სრულდება პირობა:

$$\psi'(z) = \gamma_0 \psi(-z) = \psi(z) \quad (14)$$

ბ) თუ  $B=-F$  და  $C=-D$ , მაშინ დისპერსიულ თანაფარდობებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$c\operatorname{tg}(qa) = -\frac{k}{q} \frac{E+m+V}{E+m} \quad (15)$$

ეს ამოხსნები კენტია, რადგანაც მათთვის სრულდება პირობა:

$$\psi'(z) = \gamma_0 \psi(-z) = -\psi(z) \quad (16)$$

4.44. წინა ამოცანაში მიღებული დისპერსიული თანაფარდობები ტრანსცენდენტული განტოლებებია და ისინი მხოლოდ რიცხობრივად შეიძლება ამოვხსნათ.

ლუნი ამონახსნებისათვის დისპერსიული თანაფარდობები შეიძლება ასე ჩაინეროს:

$$q\operatorname{tg}(qa) = f(q) \quad (1)$$

სადაც:

$$f(q) = \sqrt{2V\sqrt{q^2+m^2}-q^2-V^2} \frac{m+\sqrt{q^2+m^2}}{m+\sqrt{q^2+m^2}-V} \quad (2)$$

კენტი ამონახსნებისათვის გვაქვს:

$$q\operatorname{ctg}(qa) = -f(q) \quad (3)$$

(1) და (3)-დან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ელექტრონს გააჩნია  $N$  ბმული მდგომარეობა, თუ სრულდება პირობა:

$$\frac{(N-1)\pi}{2a} \leq \sqrt{V(V+2m)} < \frac{N\pi}{2a} \quad (4)$$

$N=1$ -თვის ეს მდგომარეობა ლუნია.

4.45. ნებისმიერი ცენტრალური სიმეტრიის მქონე  $V(r)$  პოტენციალისათვის დირაკის განტოლებას  $F(r)$  და  $G(r)$  რადიალური ფუნქციებისათვის შემდეგი სისტემის სახე აქვს:

$$[E - V(r) + mc^2]G = -\hbar c \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\lambda}{r} \right) F \quad (1)$$

$$[E - V(r) - mc^2]F = \hbar c \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \right) G \quad (2)$$

სადაც  $|\lambda| = J + \frac{1}{2}$ .

$J = \frac{1}{2}$  და  $\lambda = +1$  მდგომარეობებისათვის (დადებითი ლუნობა  $s^{\frac{1}{2}}$  მდგომარეობის) და  $r < r_0$ -თვის (1)-(2) სისტემა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$[E - V_0 + mc^2]G = -\hbar c \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) F \quad (3)$$

$$[E - V_0 - mc^2]F = \hbar c \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) G \quad (4)$$

(3) და (4) განტოლებიდან კი მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას  $F(r)$  ფუნქციისათვის:

$$F'' + k^2 F = 0 \quad (5)$$

სადაც:

$$k^2 = \frac{(E - V_0)^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \quad (6)$$

როცა  $r > r_0$ , მაშინ  $F(r)$  აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$F'' - \kappa^2 F = 0 \quad (7)$$

სადაც:

$$\kappa^2 = \frac{m^2 c^4 - E^2}{\hbar^2 c^2} \quad (8)$$

ჩვენ განვიხილავთ ამონახსნებს დადებითი  $k$  და  $\kappa$  სიდიდეებისათვის.  $F(r)$  და  $G(r)$  ფუნქციები მცირე  $r$ -ებზე და უსასრულობაში უნდა ნულდებოდნენ. ამ მოთხოვნებით კი, (5) და (6) განტოლებიდან მიიღება:

$$F(r) = \begin{cases} A \sin kr & r < r_0 \\ B e^{-\kappa r} & r > r_0 \end{cases} \quad (9)$$

$$G(r) = \begin{cases} \frac{\hbar c}{E - V_0 + mc^2} \frac{A}{r} [\sin kr - kr \cos kr] & r < r_0 \\ \frac{\hbar c}{E + mc^2} \frac{B e^{-\kappa r}}{r} [1 + \kappa r] & r > r_0 \end{cases} \quad (10)$$

4.46. ა) ორივე  $-F(r)$  და  $G(r)$  ფუნქცია უწყვეტი უნდა იყოს  $r = r_0$  წერტილში. „შეკერვის“ ეს პირობა კი მოგვცემს ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას:

$$kr_0 \operatorname{ctg} kr_0 = [1 + \kappa_0] \frac{V_0}{E + mc^2} - \kappa_0 \quad (1)$$

რომელიც თავსებადი უნდა იყოს შემდეგ ტოლობასთან:

$$\bar{E}^2 = 1 - \bar{k}^2 = [\sqrt{1 + \bar{k}^2} - v]^2 \quad (2)$$

სადაც  $v = -\frac{V}{mc^2}$  დადებითი სიდიდეა, ხოლო  $\bar{E} = \frac{E}{mc^2}$ , რომელიც დადებითი

შეიძლება იყოს და უარყოფითიც. ასევე განმარტებულია შემდეგი სიდიდეები:

$\bar{k} = \frac{\hbar k}{mc}$ ;  $\bar{\kappa} = \frac{\hbar \kappa}{mc}$ . თუ აირჩევთ ერთეულებს, რომელთათვისაც  $\frac{mcr_0}{\hbar} = 1$ , მაშინ

ამ ერთეულებში (1) პირობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\bar{k} \operatorname{ctg} \bar{k} = -v \frac{1 + \bar{\kappa}}{1 + \bar{E}} - \bar{\kappa} \quad (3)$$

პირველი ბმული მდგომარეობა წარმოიქმნება სრული ენერგიის შემდეგ ზღურბლზე:

$$\bar{E} = 1 \text{ ანუ } E = mc^2 \quad (4)$$

პოტენციური ენერგიის იმ მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც  $\bar{\kappa} = 0$  და  $\bar{k}$  აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$2\bar{k} \operatorname{ctg} \bar{k} = 1 - \sqrt{1 + \bar{k}^2} \quad (5)$$

რიცხობრივი ანალიზით დგინდება, რომ (5) განტოლების უმცირესი ამონახსნი

არის  $\bar{k} = 1,8613$ , რომელიც შეესაბამება  $v = -\frac{V_0}{mc^2} = 1,1129$  პოტენციის მნიშვნელობას.

როდესაც  $|V_0|$  პოტენციის იზრდება, ბმული მდგომარეობის ენერგია  $E = mc^2$ -ის ქვემოთ „მოძრაობს“.

ბ) პოტენციის მნიშვნელობისას, როდესაც  $v = 2$ , ფიზიკურად არაფერი ახალი არ ხდება და ამ შემთხვევაში  $\bar{k} = 2,4447$ ,  $\bar{\kappa} = 0,7673$ ,  $\bar{E} = 0,6413$ . თუ პოტენციის საკმარისად „ღრმა“ ხდება, მაშინ ბმული მდგომარეობის ენერგია შეიძლება განუღდეს, რაც შეესაბამება  $\bar{\kappa} = 1$  და  $v = \sqrt{1 + \bar{k}^2}$ . ამ შემთხვევაში:

$$\bar{k} \operatorname{ctg} \bar{k} = -2\sqrt{1 + \bar{k}^2} - 1 \quad (6)$$

რომლის ამონახსნია  $\bar{k} = 2,7597$  და რომელსაც შეესაბამება  $v = -\frac{V_0}{mc^2} = 2,9353$ .

შევნიშნოთ, რომ, როდესაც ბმული მდგომარეობა წარმოიქმნება  $\bar{E} = -1 (E = -mc^2)$  მნიშვნელობისათვის, როგორც ეს (3) განტოლებიდან ჩანს, უნდა გვექონდეს  $\bar{k}ctg\bar{k} = \infty$ , საიდანაც  $\bar{k} = \pi$ . ეს შეესაბამება პოტენციალის მნიშვნელობას  $v = 1 + \sqrt{1 + \pi^2} = 4,2969$ . როდესაც  $V_0$  პოტენციალის სიდიდე კიდევ უფრო იზრდება, ეს მდგომარეობა გადადის  $E < -mc^2$  უარყოფითი ენერგიების კონტინუუმში.

4.47.  $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$  პოტენციალისათვის დირაკის განტოლებათა სისტემა ასე გამოიყურება:

$$\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + mc^2\right)G = -\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\lambda}{r}\right)F \quad (1)$$

$$\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - mc^2\right)F = \hbar c \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\right)G \quad (2)$$

დიდი  $r$ -ისათვის ეს განტოლებები ასიმპტოტურად გადადიან შემდეგ განტოლებებში:

$$F'(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2\hbar c} G(r) \quad (3)$$

$$G'(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2\hbar c} F(r) \quad (4)$$

ხოლო (3) და (4) განტოლების ზოგადი ამონახსნებია:

$$F(r) = A \sin \left[ \frac{m\omega^2 r^3}{6\hbar c} \right] + B \cos \left[ \frac{m\omega^2 r^3}{6\hbar c} \right] \quad (5)$$

$$G(r) = A \cos \left[ \frac{m\omega^2 r^3}{6\hbar c} \right] - B \sin \left[ \frac{m\omega^2 r^3}{6\hbar c} \right] \quad (6)$$

როგორც (5) და (6) განტოლებიდან ჩანს, უსასრულობაში  $F(r)$  და  $G(r)$  ამონახსნები ოსცილირებენ, რის გამოც ისინი არ შეესაბამებიან ბმულ მდგომარეობებს ანუ, მიუხედავად იმისა, რომ  $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$  პოტენციალი უსასრულობაში უსასრულოდ ზრდადი პოტენციალია, მას არ შეუძლია ნაწილაკის „დატყვევება“. ეს ფაქტი დირაკის განტოლების ნაკლზე მეტყველებს და კიდევ ერთი გამოვლინებაა ე.წ. კლეინის პარადოქსისა.



4.48. განვიხილოთ დირაკის განტოლება  $V(r) = -imc\omega(\vec{\gamma} \cdot \vec{r})$  პოტენციალისათვის (ე.წ. დირაკის ოსცილატორის პოტენციალი) ანუ, როცა ჰამილტონიანს ასეთი სახე აქვს:

$$H = \gamma^0 [c\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc^2] - imc\omega(\vec{\gamma} \cdot \vec{r}) \quad (1)$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება იქნება:

$$H\psi = \begin{pmatrix} mc^2 & c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - im\omega\vec{r}) \\ c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + im\omega\vec{r}) & -imc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2)$$

საიდანაც მიიღება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$(E - mc^2)\phi = c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - im\omega\vec{r})\chi \quad (3)$$

$$(E + mc^2)\chi = c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + im\omega\vec{r})\phi \quad (4)$$

(3) განტოლება მარცხნიდან გავამრავლოთ  $(E + mc^2)$ -ზე და გამოვიყენოთ (4) განტოლება, გვექნება:

$$(E^2 - m^2c^4)\phi = c^2[\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - im\omega\vec{r})][\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + im\omega\vec{r})]\phi \quad (5)$$

ცალკე გამოვთვალოთ (5) ტოლობის მარჯვენა მხარე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - im\omega\vec{r})][\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + im\omega\vec{r})] &= (p_i - im\omega x_i)(p_i + im\omega x_i) + i\vec{\sigma} \cdot [(\vec{p} - im\omega\vec{r}) \times (\vec{p} + im\omega\vec{r})] = \\ &= p^2 - im\omega[x_i, p_i] + m^2\omega^2 r^2 - m\omega\vec{\sigma} \cdot [\vec{p} \times \vec{r} - \vec{r} \times \vec{p}] = p^2 + 3\hbar m\omega + m^2\omega^2 r^2 + 2m\omega\vec{\sigma} \cdot \vec{L} \end{aligned} \quad (6)$$

ამიტომ, (5) და (6)-დან გვექნება:

$$(E^2 - m^2c^4)\phi = c^2[p^2 + 3\hbar m\omega + m^2\omega^2 r^2 + 2m\omega\vec{\sigma} \cdot \vec{L}]\phi \quad (7)$$

როგორც ვხედავთ, (7) განტოლებას სამგანზომილებიანი იზოტროპული ოსცილატორისათვის არარელატივისტური შრედინგერის განტოლების სახე აქვს, ოღონდ, აქ ემატება სპინორბიტალური ნევრი, ანუ (7) შემდეგი ეკვივალენტური სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$(H_0 + H_{SL})\phi(\vec{r}) = \bar{E}\phi(\vec{r}) \quad (8)$$

სადაც:

$$\bar{E} = -\frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \quad (9)$$

$$H_{SL} = \omega\vec{\sigma} \cdot \vec{L} \quad (10)$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (11)$$

რადგანაც  $H_0$  და  $H_{SL}$  ერთმანეთთან კომუტირებენ, ხოლო სრული ორბიტალური მომენტი  $\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$  კომუტირებს სრულ  $H = H_0 + H_{SL}$  ჰამილტონიან-

თან, ამიტომ  $H$ -ის საკუთარი მნიშვნელობები შეიძლება აღინეროს  $n, l, j$  და  $m_j$  კვანტური რიცხვებით.

$H_0$ -ის საკუთარი მნიშვნელობებია  $\left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ხოლო  $\vec{L}^2$ -ისა –  $l(l+1)\hbar^2$ , სადაც  $l \leq n$ . რადგანაც:

$$\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = 2\vec{S} \cdot \vec{L} = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2 \quad (12)$$

ამიტომ  $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$ -ს საკუთარი მნიშვნელობებია  $\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]\hbar$ ,  $\vec{E}$ -ს შესაძლო მნიშვნელობები კი –  $\left[n + j(j+1) - l(l+1) + \frac{3}{4}\right]\hbar$  და (9) თანაფარდობიდან ენერგიისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + 2mc^2 \left[ n + j(j+1) - l(l+1) + \frac{9}{4} \right] \hbar\omega} \quad (13)$$

სადაც  $l = n, n-2, \dots, 1, 0$ , ხოლო  $j = l \pm \frac{1}{2}$ . თუ  $l = 0$ , მაშინ  $j = \frac{1}{2}$ . ძირითადი

მდგომარეობისათვის  $n = l = 0$ ;  $j = \frac{1}{2}$  და

$$E_0 = \sqrt{mc^2 (mc^2 + 6\hbar\omega)} \quad (14)$$

4.49. თავისუფალი ნაწილაკის მცირე  $r$ -ებისათვის გვაქვს:  $f \approx r^l$ ,  $g \approx r^{l'}$ , რის გამოც  $l < l'$ -თვის  $f \gg g$ , ხოლო  $l > l'$ -თვის  $f \ll g$ . დავუშვათ, რომ ეს თანაფარდობა ნარჩუნდება მოცემულ ველში.  $l < l'$ -თვის (ანუ, როცა  $l = j - 1/2$ ;  $\lambda = -l - 1$ ), დირაკის  $f$  და  $g$  ფუნქციებისათვის რადიალურ განტოლებათა სისტემის:

$$\begin{aligned} f' + \frac{1+\lambda}{r} f - (\varepsilon + m - U)g &= 0 \\ g' + \frac{1-\lambda}{r} g + (\varepsilon - m - U)f &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

პირველ განტოლებაში შეგვიძლია უგულვებლევყოთ  $g$  და კვლავ გვექნება  $f \approx r^l$ , ხოლო (1) სისტემის მეორე განტოლებიდან მიიღება:  $g \approx rfU$  ანუ  $g \approx r^{l'+s} = r^{l-s}$ . ანალოგიურად განიხილება  $l > l'$  შემთხვევაც. საბოლოოდ გვაქვს:

$$l < l' \text{-თვის: } f \approx r^l \text{ და } g \approx r^{l'-s} \quad (2)$$

$$l > l' \text{-თვის: } f \approx r^{l-s} \text{ და } g \approx r^{l'} \quad (3)$$

4.50. დირაკის განტოლებას ამ შემთხვევაში ასეთი სახე აქვს:  $A_x = B_z y = By$ ,  
 $A_y = A_z = 0$  ყალიბების არჩევისას:

$$\left[ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial x} - ieBy \right) + i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - m \right] \psi = 0 \quad (1)$$

(1)-ის კერძო ამონახსნია:

$$\psi = e^{-iEt + ip_x x + ip_z z} \begin{pmatrix} \varphi(y) \\ \chi(y) \end{pmatrix} \quad (2)$$

და (2)-ის შეტანით (1)-ში მიიღება განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{pmatrix} E - m & (eBy - p_x)\sigma_1 - p_z\sigma_3 + i\sigma_2 \frac{d}{dy} \\ (p_x - eBy)\sigma_1 + p_z\sigma_3 - i\sigma_2 \frac{d}{dy} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

(3) სისტემის მეორე განტოლებიდან:

$$\chi(y) = \frac{1}{E + m} \left( p_x\sigma_1 + p_z\sigma_3 - eBy\sigma_1 - i\sigma_2 \frac{d}{dy} \right) \varphi(y) \quad (4)$$

(4)-ის (3) სისტემის პირველ განტოლებაში შეტანით კი მიიღება განტოლება  $\varphi$  ფუნქციისათვის:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - (p_x - eBy)^2 + E^2 - m^2 - p_z^2 - eB\sigma_3 \right) \varphi = 0 \quad (5)$$

(5)-ის მიღებისას გათვალისწინებულია შემდეგი იგივეობა:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (6)$$

$\xi = p_x - eBy$  ახალი ცვლადის შემოტანით, (5) განტოლება ემსგავსება ნრფივი ოსცილატორისათვის შრედიგერის განტოლებას ( $M$ ,  $\omega$  და  $\mathcal{E}$  პარამეტრებით), სადაც:

$$M^2 \omega^2 = \frac{1}{(eB)^2}; \quad 2M\mathcal{E} = \frac{E^2 - m^2 - p_z^2 \mp eB}{(eB)^2} \quad (7)$$

თუ დავუშვებთ, რომ  $\varphi$  სპინორი  $\sigma_3/2$ -ის საკუთარი ფუნქციაა, ანუ სრულდება პირობა:

$$\frac{1}{2} \sigma_3 \varphi = \pm \frac{1}{2} \varphi \quad (8)$$

მივიღებთ შემდეგ ენერგეტიკულ სპექტრს:

$$E_{n,p_z} = \sqrt{m^2 + p_z^2 \pm eB + (2n+1)eB} \quad (9)$$

სადაც  $n = 0, 1, 2, \dots$

4.52.  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imt}$  ჩასმით:

$$(i\partial + eA - m)\psi(x) = 0 \quad (1)$$

დირაკის განტოლებაში, მიიღება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} + eA_0 \right) \varphi = c \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + e\vec{A}) \chi \quad (2)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} + 2mc^2 + eA_0 \right) \chi = c \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + e\vec{A}) \varphi \quad (3)$$

$\vec{A} = 0$  შემთხვევაში, (3) განტოლებიდან მიიღება:

$$\chi = \frac{1}{2mc} \left( \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi - \frac{i}{2mc^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{eA_0}{2mc^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi \right) \quad (4)$$

(4)-ის (2) განტოლებაში შეტანით კი მივიღებთ განტოლებას  $\varphi$  ფუნქციისათვის:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = H' \varphi \quad (5)$$

სადაც:

$$H' = \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} - eA_0 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3 c^2} + \frac{e}{4m^2 c^2} (2i\vec{E} \cdot \vec{p} - \Delta A_0) - \frac{e}{4m^2 c^2} (i\vec{E} \cdot \vec{p} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p})) \right] \quad (6)$$

$H'$  ოპერატორი არ არის ჰამილტონიანი, რადგანაც ის არ არის ერმიტული. ეს ფაქტი იმასთან არის დაკავშირებული, რომ  $\varphi^\dagger \varphi$  არ არის ალბათობის სიმკვრივე, რომელიც სწორად ასე უნდა იქნეს განმარტებული:

$$\rho = \bar{\psi} \psi = \varphi^\dagger \varphi - \chi^\dagger \chi = \varphi^\dagger \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{4m^2 c^2} \right) \varphi + o\left( \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (7)$$

არარელატივიზმზე გადასასვლელად შემოვიტანოთ ახალი ტალღური ფუნქცია:

$$\varphi_{Sh} = \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) \varphi \quad (8)$$

მაშინ ახალი ჰამილტონიანი მოიცემა ფორმულით:

$$H = \left( 1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) H' \left( 1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2 c^2} \right) \quad (9)$$

და (9)-ში (6)-ის შეტანით მიიღება:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - eA_0 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{8m^2c^2} \Delta A_0 + \frac{e}{4m^2c^2} \vec{\sigma} \cdot [\vec{E} \times \vec{p}] \quad (10)$$

$\vec{A} = 0$  შემთხვევაში ჰამილტონიანი მოიცემა ფორმულით:

$$H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} - eA_0 + \frac{e}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{8m^2c^2} \Delta A_0 + \frac{e}{4m^2c^2} \vec{\sigma} \cdot [\vec{E} \times (\vec{p} + e\vec{A})] \quad (11)$$

4.53. ვაჩვენოთ, რომ  $V_\mu(x)$  ნამდვილი სიდიდეა. მართლაც:

$$V_\mu^* = V_\mu^+ = (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^+ = \psi^+ \gamma_\mu^+ (\psi^+ \gamma^0)^+ = \psi^+ \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = V_\mu \quad (1)$$

ლორენცის გარდაქმნების მიმართ  $V_\mu$  შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$V'_\mu(x') = \bar{\psi}'(x') \gamma_\mu \psi'(x') = \psi^+(x) \gamma_0 S^{-1} \gamma_\mu S \psi(x) \quad (2)$$

სადაც გამოვიყენეთ ფაქტი, რომ  $\gamma_0 S^{-1} = S^+ \gamma_0$ ; ბოლოს კი,  $S^{-1} \gamma_\mu S = \Lambda_\mu^\nu \gamma_\nu$  თანაფარდობის გამოყენებით მიიღება:

$$V'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu V_\nu(x) \quad (3)$$

ამრიგად  $V_\mu$  ლორენც ოთხვექტორია.

4.54. ლუნობის გარდაქმნის მიმართ  $V_\mu$  შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$V_\mu(t, \vec{x}) \rightarrow V'_\mu(t, -\vec{x}) = \bar{\psi}(t, \vec{x}) \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \psi(t, \vec{x}) \quad (1)$$

საიდანაც აშკარაა, რომ:

$$V'_0(t, \vec{x}) = V_0(t, -\vec{x}), V'_i(t, \vec{x}) = V_i(t, -\vec{x}) \quad (2)$$

როგორც ცნობილია, მუხტური შეუღლების მიმართ სპინორები შემდეგნაირად გარდაიქმნებიან:

$$\psi(x) \rightarrow \psi_c(x) = C \bar{\psi}^T \quad (3)$$

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0 \rightarrow (C \bar{\psi}^T)^+ \gamma_0 = (C (\gamma^0)^T \psi^*)^+ \gamma_0 = ((\gamma_0)^T C (\gamma^0)^+)^T = -\psi^T (C \gamma^0 \gamma^0)^T = \psi^T C \quad (4)$$

ამიტომ,  $V_\mu$ -ს გარდაქმნის კანონი იქნება:

$$V_\mu \rightarrow -\psi^T C \gamma_\mu C^{-1} \bar{\psi}^T = (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^T = V_\mu \quad (5)$$

(5)-ის მიღებისას გამოყენებულია შემდეგი თანაფარდობები:

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, C = -C^{-1} \quad (6)$$

დროითი გარდაქმნების მიმართ გვაქვს:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(-t, \bar{x}) = T\psi^*(t, \bar{x}) \quad (7)$$

სადაც  $T$  მატრიცა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$T\gamma_\mu T^{-1} = \gamma^{\mu*} = \gamma_\mu^T; \quad T^+ = T^{-1} = T = -T^* \quad (8)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(-t, \bar{x}) T\gamma_0 \quad (9)$$

ამიტომ:

$$\begin{aligned} V^\mu(t, \bar{x}) &\rightarrow \psi^T T\gamma^0 \gamma^\mu T\psi^* = \psi^T T\gamma^0 T^{-1} T\gamma^\mu T^{-1} \psi^* = \psi^T (\gamma^0)^T (\gamma^\mu)^T \psi^* = \\ &= (\psi^+ \gamma^\mu \gamma^0 \psi)^T = \psi^+ \gamma^\mu \gamma^0 \psi \end{aligned} \quad (10)$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$V_0'(-t, \bar{x}) = V_0(t, \bar{x}); \quad V_i'(-t, \bar{x}) = V_i(t, \bar{x}) \quad (11)$$

4.55.  $A^\mu$  სიდიდე ლორენცის გარდაქმნების მიმართ ასეთი სახით მოიცემა:

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu S^{-1} \gamma_5 S \psi(x) = \det \Lambda \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \gamma_5 \psi(x) = \det \Lambda \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \quad (1)$$

სადაც გამოყენებულია ფაქტი, რომ:

$$\begin{aligned} S^{-1} \gamma_5 S &= -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} S^{-1} \gamma^\mu S S^{-1} \gamma^\nu S S^{-1} \gamma^\rho S S^{-1} \gamma^\sigma S = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \\ &= -\frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \det \Lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta = \det \Lambda \gamma_5 \end{aligned} \quad (2)$$

მუხტური შეუღლება ცვლის  $A^\mu$ -ს ნიშანს. ლუნობა ცვლის დროითი კომპონენტების ნიშანს და არ ცვლის სივრცული კომპონენტებისას. დროის ინვერსია არ ცვლის დროითი კომპონენტების ნიშანს, ცვლის სივრცული კომპონენტებისას.

4.56.  $\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial^\mu \psi(x)$  სიდიდე ლორენცის გარდაქმნების მიმართ არ იცვლება ანუ სკალარია.  $P$  ლუნობა არ ცვლის ამ სიდიდეს,  $C$  მუხტური შეუღლება იძლევა  $(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi$ -ს, ხოლო დროის ინვერსია კი  $-(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi$ -ს.

4.58. დირაკის განტოლების ტრანსფორმირებით მიიღება:

$$\bar{u}(p, s)(p - m) = 0 \quad (1)$$

პირობის თანახმად:

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T \quad (2)$$

(1) და (2)-დან კი მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა:

$$4.59. \text{ ა) } \psi_c(x) = N_p \begin{pmatrix} -\frac{p}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iEt-ipz}$$

$$\text{ბ) } \psi'(x') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt'}$$

$$4.60. \text{ ა) } \psi_p(t, \vec{x}) = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{p}{E_p+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i(Et+pz)}; \psi_t(t, \vec{x}) = -iN_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{p}{E_p+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i(Et+pz)}$$

$$\text{ბ) } \psi'(x') = N_p \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{p}{E_p+m} \varphi \end{pmatrix} e^{i(Et-p'z')}$$

სადაც:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$4.61. P = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; C = i\gamma^2 \gamma^0 = i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}$$

4.62. გამრავლეთ:

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u_r(p) = (-1)^{r+1} u_r(p) \quad (1)$$

თანაფარდობა მარცხნიდან  $\gamma_0$ -ზე.  $\gamma_0 u_r(\vec{p}) = u_r(-\vec{p})$ -ის გათვალისწინებით მიიღება:

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot (-\vec{p})}{|\vec{p}|} u_r(-p) = (-1)^r u_r(-p) \quad (2)$$

საიდანაც ჩანს, რომ სპირალობამ ნიშანი შეიცვალა.

4.63. დროის ინვერსიისას, დირაკის განტოლების ტალღური ფუნქცია იქნება:

$$\begin{aligned}\psi_t(t, \vec{x}) &= i\gamma^1 \gamma^3 \psi_r^*(-t, \vec{x}) = -N \left( \frac{\sigma^2 \phi_r^*}{E_p + m} \phi_r^* \right) e^{i(-E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = \\ &= -N \left( \frac{\sigma^2 \phi_r^*}{-\frac{(\vec{\sigma}^* \cdot \vec{p}) \sigma^2}{E_p + m} \phi_r^*} \right) e^{i(-E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})}\end{aligned}\quad (1)$$

სადაც გამოვიყენეთ  $\sigma^2 \vec{\sigma}^* = -\vec{\sigma} \sigma^2$  ტოლობა. (1) გამოსახულებიდან ვასკვნით, რომ იმპულსმა შეიცვალა მიმართულება, ანუ  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ . ადვილი შესამონმებელია, რომ სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$\sigma^2 \phi_1^* = i\phi_2; \quad \sigma^2 \phi_2^* = -i\phi_1 \quad (2)$$

განვიხილოთ  $r=1$  შემთხვევა ( $r=2$  ანალოგიურად განიხილება), მაშინ, (2)-ის გათვალისწინებით, (1)-დან მიიღება:

$$\psi_t(t, \vec{x}) = -iN \left( -\frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E_p + m} \phi_2 \right) e^{i(-E_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (3)$$

თუ (3)-ზე მარცხნიდან ვიმოქმედებთ  $\frac{\vec{\Sigma} \cdot (-\vec{p})}{|\vec{p}|}$  ოპერატორით, ვნახავთ, რომ სპირალობა არ შეიცვალა. იმავე შედეგის მიღება შეიძლება, თუ ავიღებთ წინა ამოცანის (1) ტოლობის კომპლექსურად შეუღლებულს და გავამრავლებთ მიღებულ განტოლებას მარცხნიდან  $i\gamma^1 \gamma^3$ -ზე.

იმავე პროცედურების ჩატარება შეიძლება  $\mathcal{U}$  სპინორისთვისაც.

4.64. ტრანსფორმირებული ჰამილტონიანი ასე გამოიყურება:

$$H' = \left( \cos(2p\theta) - \frac{m}{p} \sin(2p\theta) \right) \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta \left( \cos(2p\theta) + \frac{m}{p} \sin(2p\theta) \right) \quad (1)$$

სადაც  $p = |\vec{p}|$ . იმისათვის, რომ ჰამილტონიანს ჰქონდეს  $H' \approx \beta$  სახე,  $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ -ს წინ კოეფიციენტი ნული უნდა იყოს, ანუ უნდა სრულდებოდეს პირობა:

$$\operatorname{tg}(2p\theta) = \frac{p}{m} \quad (2)$$

4.66. ჯერ შევამოწმოთ, რომ სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$U = \cos(p\theta) + \frac{\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{p} \sin(p\theta) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} + \frac{\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} \quad (1)$$



ამიტომ:

$$\bar{x}_{FW} = \left( \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} + \frac{\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} \right) \bar{x} \left( \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} - \frac{\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} \right) \quad (2)$$

ხოლო  $[\bar{x}, f(\vec{p})] = i \nabla f(\vec{p})$  ცნობილი ტოლობიდან მიიღება ორი დამხმარე შედეგი:

$$\bar{x} \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{E_p}{2(E_p + m)}} \frac{m}{E_p^3} \vec{p} + \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \bar{x} \quad (3)$$

$$\bar{x} \frac{\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} = \frac{i\beta \vec{\alpha}}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} - \frac{i\beta(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(2E_p + m)}{2\sqrt{2(E_p(E_p + m))^{3/2}} E_p} \vec{p} + \frac{\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}} \bar{x} \quad (4)$$

(2) და (4)-ის გამოყენებით კი მიიღება:

$$\bar{x}_{FW} = \bar{x} - i \frac{\vec{p}}{2E_p(E_p + m)} + i \frac{\vec{p}(\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p})}{2E_p^2(E_p + m)} - i \frac{\beta \vec{\alpha}}{2E_p} + i \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})}{2E_p(E_p + m)} \quad (5)$$

(5) გამოსახულება კი შემდეგნაირად შეიძლება ჩაინეროს:

$$\bar{x}_{FW} = \bar{x} + i \frac{\vec{p}(\beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p})}{2E_p^2(E_p + m)} - i \frac{\beta \vec{\alpha}}{2E_p} - \frac{\vec{\Sigma} \times \vec{p}}{2E_p(E_p + m)} \quad (6)$$

ამრიგად, გამოჩნდა, რომ ფოლდი-ვაუტსაუზენის გარდაქმნა არ ცვლის იმპულსს და ამიტომ გვექნება:

$$[x_{FW}^k, p_{FW}^l] = i \delta^{kl} \quad (7)$$

4.67. გამამატრიცების ანტიკომუტაციური თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს, რომ  $H_D^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4$ , რის გამოც  $H_D$ -ს საკუთარი მნიშვნელობებია  $\pm E$ , სადაც  $E = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}$ .

$\psi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix}$  რომ იყოს  $H_D$ -ს  $E$  დადებითი ენერჯის შესაბამისი სპინორი,

მაშინ გამამატრიცების დირაკის ნორმოდგენაში შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$H_D \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ მისი ამონახსნებია:

$$\phi_1 = E + mc^2 \quad (2)$$

$$\chi_1 = c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \quad (3)$$

ახლა დავუშვათ, რომ  $\psi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$   $H_D$ -ს  $-E$  უარყოფითი ენერჯიის შესაბამისი სპინორია, მაშინ გამამატრიცების დირაკის წარმოდგენაში შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$H_D \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = -E \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ მისი ამონახსნებია:

$$\phi_2 = -c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \quad (5)$$

$$\chi_2 = E + mc^2 \quad (6)$$

(1) და (4)-დან კი მიიღება:

$$H_D \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\phi_1 & -E\phi_2 \\ E\chi_1 & -E\chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \quad (7)$$

ნორმალიზაციის ფაქტორთან ერთად,  $\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix}$  შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$U^+ = [2E(E + mc^2)]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} E + mc^2 & -c\vec{\sigma}\vec{p} \\ c\vec{\sigma}\vec{p} & E + mc^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

რომელიც უნიტარული მატრიცაა და გააჩნია შებრუნებული:

$$U^+ = [2E(E + mc^2)]^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} E + mc^2 & c\vec{\sigma}\vec{p} \\ -c\vec{\sigma}\vec{p} & E + mc^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ამიტომ მიიღება:

$$UH_D U^+ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} = H_{FW} \quad (10)$$

უფრო აბსტრაქტული გზა ფოლდი-ვაუტხაუზენის უნიტარული ოპერატორის შემოყვანისა, შემდეგია. შემოგვყავს ოპერატორი:

$$U = \exp \left\{ \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \theta \right\} \quad (11)$$

რომელშიც  $\theta$ -ს ქვემოთ განვსაზღვრავთ. რადგანაც  $\left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right)^2 = -1$ , მივიღებთ,

რომ:

$$U = \cos \theta + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \sin \theta \quad (12)$$

რადგანაც  $\vec{\gamma}^+ = -\vec{\gamma}$ ,  $U$  -ს ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი იქნება:

$$U^+ = \exp\left\{-\frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \theta\right\} = \cos \theta - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \sin \theta \quad (13)$$

$H_D = \gamma^0(c\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc^2)$  დირაკის ჰამილტონიანი ანტიკომუტირებს  $\vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ -თან, რის გამოც

$$UH_DU^+ = H_DU^{+2} \text{ და } U^{+2} = \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\right) - \sin^2 \theta. \text{ ამიტომ:}$$

$$\begin{aligned} UH_DU^+ &= \gamma^0(c\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc^2) \left\{ \cos 2\theta - \sin 2\theta \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \right\} = \\ &= \gamma^0 \left\{ mc^2 \cos 2\theta + |\vec{p}|c \sin 2\theta + c\vec{\gamma} \cdot \vec{p} \left[ \cos 2\theta - \frac{mc}{|\vec{p}|} \sin 2\theta \right] \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

თუ ავირჩევთ  $\sin 2\theta = \frac{|\vec{p}|c}{E}$ -ს და  $\cos 2\theta = \frac{mc^2}{E}$ , მაშინ  $\vec{\gamma} \cdot \vec{p}$ -ის პროპორციული ნევრი ქრება და მიიღება:

$$UH_DU^+ = \frac{\gamma^0(m^2c^4 + \vec{p}^2c^2)}{E} = E\gamma^0 = H_{FW} \quad (15)$$

რაც თანხვედრაშია (10) ფორმულასთან. ახალ ბაზისში არ არის გადაბმული ბის-პინორის დიდი და მცირე კომპონენტები.

4.68. ელექტრომაგნიტური ველისათვის ჰამილტონიანი შემდეგი სახით ჩაინერება:

$$H_D = mc^2 \gamma^0 \left( 1 + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right) \quad (1)$$

სადაც:

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \quad (2)$$

შევნიშნოთ, რომ:

$$[\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}, H_D] = 2\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi} H_D \quad (3)$$

როცა  $\vec{A} = 0$  და  $|\vec{p}| \ll mc$ , მაშინ  $\theta \approx \frac{|\vec{p}|}{2mc}$  ანუ ველის გაქრობისას და მცირე სიჩქარეებზე ფოლდი-ვაუტხაუზენის უნიტარული მატრიცა მიახლოებით  $\exp\left[\frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{p}}{2mc}\right]$ -ს

ტოლია. ამ შემთხვევაში ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედების მუდმივას მიხედვით პირველ მიახლოებაში მიიღება:

$$U_1 = e^{A_1} \quad (4)$$

სადაც:

$$A_1 = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{2mc} \quad (5)$$

მაგრამ [] -ის 1.34 ამოცანის თანახმად:

$$e^{A_1} H_D e^{-A_1} = H_D + [A_1, H_D] + \frac{1}{2} [A_1, [A_1, H_D]] + \frac{1}{6} [A_1, [A_1, [A_1, H_D]]] + \dots \quad (6)$$

(3)-დან გამომდინარეობს, რომ  $[A_1, [A_1, \dots [A_1, H_D] \dots]] = (2A_1)^n H_D$ , სადაც  $n$  არის ჩადგმული კომუტატორების რიცხვი. ამიტომ:

$$H_1 = e^{A_1} H_D e^{-A_1} = mc^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^n \gamma^0 \left( 1 + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right) = mc^2 \gamma^0 \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \left( -\frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^n \right\} \quad (7)$$

აქ გამოყენებულია ფაქტი, რომ  $\gamma^0$  ანტიკომუტირებს  $\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}$ -თან. (7)-დან ჩანს, რომ  $\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}$  -ის მიხედვით წრფივი წევრი ბათილდება  $U_1$  ტრანსფორმაციასთან. კუბური და მეხუთე ხარისხის წევრების გასაბათილებლად შემოვიღებთ შემდგომ ტრანსფორმაციას:  $U_2 = e^{A_2}$ , სადაც:

$$A_2 = \frac{1}{6} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^3 + \frac{1}{10} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^5 \quad (8)$$

რაც მოგვცემს:

$$H_2 = e^{A_2} H_1 e^{-A_2} = \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^3 \dots \right\} H_1 = mc^2 \gamma^0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^4 + o \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^6 \right\} \quad (9)$$

კომბინირებულ უნიტარულ გარდაქმნებს კი ასეთი სახე აქვს:

$$U = U_1 U_2 = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^3 + \frac{1}{10} \left( \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}}{mc} \right)^5 \right\} \quad (10)$$

და (10) „წმინდავს“ ჰამილტონიანს იმ წევრებისაგან, რომლებიც ურევენ ერთმანეთში ბისპინორის დიდ და მცირე წევრებს.

4.69. 4.5 ამოცანის თანახმად, მოცემული მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია ასე გამოიყურება:

$$\psi = u(\vec{p}) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\vec{p}\vec{r} - \epsilon t) \right\} \quad (1)$$

სადაც:

$$u(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{\varepsilon + mc^2} \varphi \end{pmatrix}, \quad N = \sqrt{\frac{\varepsilon + mc^2}{2\varepsilon}} \quad (2)$$

(აქ გამოყენებულია  $u^* u = \varphi^* \varphi = 1$  ნორმირება). მაშინ სპინის ვექტორის საშუალო გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \frac{1}{2} \frac{u^+ \vec{\Sigma} u}{u^+ u} = \frac{N^2}{2} \begin{pmatrix} \varphi^* & \varphi^* \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{\varepsilon + mc^2} \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{N^2}{2} \varphi^* \left\{ \vec{\sigma} + \frac{c^2}{(\varepsilon + mc^2)^2} (\vec{\sigma}\vec{p})\vec{\sigma}(\vec{\sigma}\vec{p}) \right\} \varphi = \frac{N^2}{2} \varphi^* \left\{ \vec{\sigma} + \frac{p^2 c^2}{(\varepsilon + mc^2)^2} \sigma_z \vec{\sigma} \sigma_z \right\} \varphi, \quad \vec{p} = (0, 0, p) \end{aligned} \quad (3)$$

საიდანაც, პაულის მატრიცების თვისებების გამოყენებით, მიიღება:

$$\bar{s}_x = \frac{N^2}{2} \varphi^* \left\{ \sigma_x - \frac{p^2 c^2}{(\varepsilon + mc^2)^2} \sigma_x \right\} \varphi = \frac{mc^2}{2\varepsilon} \varphi^* \sigma_z \varphi \quad (4)$$

$$\bar{s}_y = \frac{mc^2}{2\varepsilon} \varphi^* \sigma_y \varphi; \quad \bar{s}_z = \frac{mc^2}{2\varepsilon} \varphi^* \sigma_z \varphi \quad (5)$$

4.70. მოცემული უნიტარული გარდაქმნისათვის:

$$\hat{U} = \hat{U}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

მიიღება:

$$\beta' = \hat{U} \beta \hat{U}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\Sigma}' = \hat{U} \vec{\Sigma} \hat{U}^+ = \vec{\Sigma}; \quad \vec{\alpha}' = \hat{U} \vec{\alpha} \hat{U}^+ = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2)$$

ამრიგად, სპინის ვექტორის ოპერატორი ახალ სისტემაში ინარჩუნებს თავის წინანდელ სახეს, ხოლო დირაკის განტოლება ახალ წარმოდგენაში ასე ჩაინერება:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = (c \vec{\alpha}' \hat{p} + mc^2 \beta') \psi' \quad (3)$$

სადაც:

$$\psi' = \hat{U} \psi = \hat{U} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi + \chi \\ \varphi - \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (4)$$

ანუ  $\xi$  და  $\eta$  ორკომპონენტური სპინორებისათვის მიიღება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \xi = c\vec{\sigma}\vec{p}\xi + mc^2\eta \quad (5)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \eta = -c\vec{\sigma}\vec{p}\eta + mc^2\xi \quad (6)$$

4.71. წინა ამოცანის (5)-(6) განტოლებიდან ჩანს, რომ  $m=0$ -თვის  $\xi$  და  $\eta$  ორკომპონენტიანი სპინორები აკმაყოფილებენ დამოუკიდებელ განტოლებებს. გარდა ამისა, ეს სპინორები ლორენცის გარდაქმნებისას ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გარდაიქმნებიან. ამრიგად, უმასო ნაწილაკისათვის:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \xi = c\vec{\sigma}\vec{p}\xi \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \eta = -c\vec{\sigma}\vec{p}\eta \quad (2)$$

განტოლებები რელატივისტურად ინვარიანტულ განტოლებებს წარმოადგენენ და მათ ვეილის განტოლებები ეწოდებათ. მაგრამ, დირაკის განტოლებისაგან განსხვავებით, ეს განტოლებები არ არიან ინვარიანტული სივრცული არეკვლის მიმართ, რაც ფიზიკურად იმაში მჟღავნდება, რომ ნაწილაკს  $\mathcal{E} = pc > 0$  ენერგიით შეესაბამება  $\lambda = \pm 1/2$  სპირალობის მქონე ორი მდგომარეობა.

4.72.  $K$  სისტემაში, რომელშიც ნაწილაკი უძრავია და  $\mathcal{E} = mc^2$  ენერგია გააჩნია, მისი სპინური მდგომარეობა აღინერება ბისპინორით:

$$u(0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

სადაც  $\varphi_0$  ორკომპონენტიანი სპინორია.

$K'$  სისტემაში, რომელშიც მოძრაობს  $K$  სისტემის მიმართ  $-\vec{v}$  სიჩქარით, ნაწილაკს გააჩნია  $\vec{v}$  სიჩქარე და  $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  იმპულსი, ხოლო მისი სპინური მდგომარეობა აღინერება  $u(\vec{p})$  ბისპინორით, რომელიც შეიძლება გამოხატულ იქნეს  $u(0)$ -ით, ბისპინორებისათვის ლორენცის გარდაქმნების შემდეგი ფორმულით:

$$u(\vec{p}) \equiv u' = \hat{S}u(0) \quad (2)$$

$$\hat{S} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{\alpha}\vec{n}\theta\right\} = ch\frac{\theta}{2} - sh\frac{\theta}{2}\vec{\alpha}\vec{n}; \quad \left(th\theta = \frac{v}{c}\right) \quad (3)$$

სადაც  $\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$  -  $K'$  სისტემის  $K$ -ს მიმართ სიჩქარის ერთეულოვანი ვექტორია.

(4), (5) ფორმულის და :

$$th \frac{\theta}{2} = \frac{th\theta}{1 + \sqrt{1 - th^2\theta}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{pc}{E(\vec{p}) + mc^2} \quad (4)$$

$$ch \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + ch\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\theta}} \right)} = \sqrt{\frac{E(p) + mc^2}{2mc^2}} \quad (5)$$

(2), (3) ფორმულის გამოყენებით მიიღება:

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \left( ch \frac{\theta}{2} \right) \varphi_0 \\ \left( sh \frac{\theta}{2} \right) \frac{\vec{\sigma} \vec{v}}{v} \varphi_0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E(p) + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \frac{c \vec{\sigma} \vec{p}}{E + mc^2} \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

4.73. თუ  $\varphi_0^* \varphi_0 = 1$ , მივიღებთ ნაწილაკის სპინის ოპერატორის საშუალო მნიშვნელობას  $K'$  სისტემაში (რომელშიც მას გააჩნია  $\vec{p}$  იმპულსი):

$$\bar{s}_p = \frac{\frac{1}{2} u^* \sum u}{u^* u} = \frac{E + mc^2}{4E} \varphi_0^* \left\{ \vec{\sigma} + \frac{c^2}{(E + mc^2)^2} (\vec{\sigma} \vec{p}) \vec{\sigma} (\vec{\sigma} \vec{p}) \right\} \varphi_0 \quad (1)$$

ნაწილაკის უძრაობის სისტემაში სპინის საშუალო უდრის:

$$\bar{s}_0 = \frac{1}{2} \varphi_0^* \vec{\sigma} \varphi_0 \quad (2)$$

თუ  $z$  ღერძს მივმართავთ ნაწილაკის  $\vec{p}$  იმპულსის გასწვრივ და გამოვიყენებთ პაულის მატრიცების თვისებებს, მივიღებთ კავშირს (1) და (2) ფორმულით განმარტებულ საშუალოებს შორის:

$$\bar{s}_{p,x} = \frac{mc^2}{E} \bar{s}_{0,x}; \quad \bar{s}_{p,y} = \frac{mc^2}{E} \bar{s}_{0,y}; \quad \bar{s}_{p,z} = \bar{s}_{0,z} \quad (3)$$

4.74. დირაკის განტოლების ამონახსნს, რომელიც შეესაბამება ნაწილაკის განსაზღვრულ ენერგიას და იმპულსს, ასეთი სახე აქვს:

$$\psi_{\vec{p}E}^{\pm} = \begin{pmatrix} \varphi_{\vec{p}} \\ \frac{c \vec{\sigma} \vec{p}}{E \pm mc^2} \varphi_{\vec{p}} \end{pmatrix} e^{\pm \frac{\vec{p}\vec{r} - Et}{\hbar}} = \begin{pmatrix} \frac{c \vec{\sigma} \vec{p}}{E \pm mc^2} \chi_{\vec{p}} \\ \chi_{\vec{p}} \end{pmatrix} e^{\pm \frac{\vec{p}\vec{r} - Et}{\hbar}} \quad (1)$$

სადაც  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \geq mc^2$ . ამასთან,  $\psi_{\vec{p}E}^+$  შეესაბამება  $\vec{p}$  იმპულსის და  $E$  ენერგიის ნაწილაკს.

$\psi_{\vec{p}E}^-$  ამონახსნს, რომელიც შეესაბამება ნაწილაკს უარყოფითი ენერგიით და  $-\vec{p}$  იმპულსით, არ გააჩნია ნაწილაკის ფიზიკური მდგომარეობის ტალღური ფუნქციის შინაარსი. ეს მდგომარეობა ეთანადება ანტინაწილაკს, ამასთან, ანტინაწი-

ლაკის ტალღური ფუნქცია  $\psi_c^- = C\psi^-$  მიიღება  $\hat{C}$  მუხტური შეუღლების ოპერაციის ჩატარების შედეგად  $\psi_{pE}^-$  ფუნქციაზე. ეს გარდაქმნა (დირაკის მატრიცების სტანდარტულ წარმოდგენაში) ცხადი სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\psi_c^+ = \hat{C}\psi^- \equiv \gamma_2\gamma_4\bar{\psi}^- = \gamma_2\gamma_4(\psi^-^* \beta) \quad (2)$$

ანუ, უფრო დანვრილებით (ბისპინორული ინდექსების მითითებით),

$$\begin{aligned} (\psi_c^+)_\alpha &= (\gamma_2\gamma_4)_{\alpha\delta} (\psi^-^* \beta)_\delta = (\gamma_2\gamma_4)_{\alpha\delta} (\psi^-^*)_\mu \beta_{\mu\delta} = (\gamma_2\gamma_4)_{\alpha\delta} \beta_{\delta\mu} (\psi^-^*)_\mu = (\gamma_2\gamma_4\beta)_{\alpha\mu} (\psi^-^*)_\mu \\ &= (\gamma_2)_{\alpha\mu} (\psi^-^*)_\mu \end{aligned} \quad (3)$$

(3)-ის გამოყვანისას გამოვიყენეთ შემდეგი ფორმულები:

$$\beta = \gamma_4, \beta^2 = 1, \beta_{\mu\delta} = \beta_{\delta\mu} \quad (4)$$

განვიხილოთ შემდეგი თანაფარდობები:

$$\psi_{pE}^\pm = \begin{pmatrix} \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + mc^2} \chi_p^* \\ \chi_p^* \end{pmatrix} e^{\frac{i\vec{p}\vec{r} - Et}{\hbar}}; \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}; \sigma^* = (\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3); \sigma_2\sigma^* = -\sigma_2 \quad (5)$$

(3) და (5) ფორმულის საშუალებით შეიძლება დაიწეროს ანტინაწილაკის შესაბამისი ტალღური ფუნქცია (რომელიც შეესაბამება დირაკის განტოლების „არაფიზიკურ“  $\psi_{pE}^-$  ამონახსნს):

$$\psi_{pE}^- = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + mc^2} \chi_p^* \\ \chi_p^* \end{pmatrix} e^{\frac{i\vec{p}\vec{r} - Et}{\hbar}} = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 \chi_p^* \\ -i \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{E + mc^2} \sigma_2 \chi_p^* \end{pmatrix} e^{\frac{i\vec{p}\vec{r} - Et}{\hbar}} \quad (6)$$

ამ მდგომარეობაში ანტინაწილაკს გააჩნია  $\vec{p}$  იმპულსი და  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \geq mc^2$  ენერგია. შემოვიტანოთ  $\varphi_{Ep} = -i\sigma_2 \chi_p^*$  აღნიშვნა და (6) დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\psi_{pE}^- = \begin{pmatrix} \varphi_{Ep} \\ \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{E + mc^2} \varphi_{Ep} \end{pmatrix} e^{\frac{i\vec{p}\vec{r} - Et}{\hbar}} \quad (7)$$

4.76.  $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ერმიტული ოპერატორი უმასო ნაწილაკის  $\hat{H} = c\vec{\alpha}\hat{p} = c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \hat{p}$

ჰამილტონიანთან, ცხადია, რომ კომუტირებს:  $[\gamma_5, \hat{H}] = 0$ .

$\gamma_5$  ოპერატორის  $\mu$  საკუთარი მნიშვნელობების ფიზიკური არსის გასარკვევად ვიპოვოთ საერთო საკუთარი  $\psi_{pE\mu}$  ფუნქცია ერთმანეთთან კომუტირებადი  $\hat{H}, \hat{p}$  და  $\gamma_5$  ოპერატორების. ეს ფუნქცია ასე გამოიყურება:



$$\psi_{pE\mu} = \begin{pmatrix} \varphi_{p\mu} \\ \frac{c}{E} \vec{\sigma} \vec{p} \varphi_{p\mu} \end{pmatrix} e^{i \frac{\vec{p}\vec{r} - Et}{\hbar}}, \quad E = \pm pc \quad (1)$$

ამასთან,  $\gamma_5 \psi_{pE\mu} = \mu \psi_{pE\mu}$  განტოლებიდან მივიღებთ:

$$-\frac{c}{E} \vec{\sigma} \vec{p} \varphi_{p\mu} = \mu \varphi_{p\mu}; \quad -\varphi_{p\mu} = \mu \frac{c}{E} \vec{\sigma} \vec{p} \varphi_{p\mu} \quad (2)$$

(2)-დან ჩანს, რომ  $\mu^2 = 1$ , ანუ  $\gamma_5$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობებია

$\mu = \pm 1$ . ასევე (2) ტოლობიდან და  $(\vec{\sigma} \vec{p})^2 = \vec{p}^2 = \frac{E^2}{c^2}$  თანაფარდობიდან გამომდინარეობს შემდეგი განტოლებები:

$$\gamma_5 \psi_{pE\mu} = \mu \psi_{pE\mu} \quad (3)$$

$$(\vec{\Sigma} \vec{n}) \psi_{pE\mu} = -\mu \frac{E}{|E|} \psi_{pE\mu} \quad (4)$$

სადაც  $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{p}$ . აშკარაა, რომ (3) და (4) განტოლება ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

ამ ფაქტიდან კი, თავის მხრივ, გამომდინარეობს ფიზიკური აზრი  $-\mu \frac{E}{|E|}$  სი-

დიდის. კერძოდ, ეს სიდიდე წარმოადგენს მდგომარეობის სპირალობის  $2\lambda$  გაორმაგებულ მნიშვნელობას.

ამრიგად, მივიღეთ, რომ დირაკის განტოლების  $E = pc > 0$  დადებითი ენერგიის მქონე მდგომარეობებისათვის  $\mu = -2\lambda$ , ხოლო უარყოფითი ენერგიებისათვის (რაც შეესაბამება ანტინაწილაკს)  $\mu = 2\lambda$ .

4.77. რადგანაც  $\hat{P}_\pm^2 = \hat{P}_\pm$ , ეს ერმიტული ოპერატორები პროექციული ოპერატორებია. წინა ამოცანის შედეგების მიხედვით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ  $\hat{P}_+$  დადებითი ენერგიის ამონახსნებს აპროექტირებს  $\lambda_1 = -1/2$  სპირალობით, ხოლო  $\lambda_2 = 1/2$  სპირალობით – უარყოფითი ენერგიის ამონახსნებს (ანუ, ანტინაწილაკების შესაბამის მდგომარეობებს).  $\hat{P}_-$  ოპერატორისათვის საწინააღმდეგო სურათი გვაქვს.

4.78. ნაწილაკს და ანტინაწილაკს საპირისპირო ნიშნის სპირალობები იმიტომ გააჩნიათ, რომ:

$$\gamma_5 \psi_c = \mu \psi_c \quad (1)$$

განტოლება მუხტური შეუღლებისას ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\gamma_s \psi_c = -\mu \psi_c \quad (2)$$

რადგანაც  $\hat{C}$  მუხტური შეუღლების ოპერატორი ანტიკომუტირებს  $\gamma_s$  მატრიცასთან.

4.79. დირაკის განტოლებას ორკომპონენტიანი სპინორებისათვის,  $m=0$  უმასო ნაწილაკების შემთხვევაში, განტოლებათა სისტემის სახე აქვს:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c \hat{\sigma} \hat{p} \chi \equiv \frac{c}{s} \hat{s} \hat{p} \chi \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = c \hat{\sigma} \hat{p} \varphi \equiv \frac{c}{s} \hat{s} \hat{p} \varphi \quad (2)$$

ამ სისტემის ბუნებრივი განზოგადება ნებისმიერი  $s$  სპინის მქონე უმასო ნაწილაკისათვის იმაში მდგომარეობს, რომ ამ განტოლებებში  $\varphi$  და  $\chi$  უნდა გაიგივდეს ორ სპინურ ფუნქციასთან, რომლებიც  $s$  სპინს შეესაბამება და რომელთაგანაც თითოეულს  $2s+1$  კომპონენტი გააჩნია. ამასთან,  $\hat{s}$  უნდა გავიგოთ, როგორც  $s$  სიდიდის სპინის ოპერატორი.

$s=1$  სპინის შემთხვევაში, ხელსაყრელია ვიმუშავოთ ვექტორული წარმოდგენით, სადაც, დეკარტეს სისტემაში, სპინური ფუნქციის კომპონენტები ვექტორის კომპონენტებია, ხოლო სპინის ოპერატორის კომპონენტები შემდეგი თანაფარდობით განისაზღვრებიან:

$$\hat{s}_i a_k = -i \epsilon_{ikl} a_l \quad (3)$$

ამასთან:

$$\hat{s} \hat{p} a_k = \hat{s}_i \hat{p}_i a_k = -\hbar \epsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} a_l \equiv \hbar (\text{rot} \vec{a})_k \quad (4)$$

ანუ  $(\hat{s} \hat{p}) \vec{a} = \hbar \text{rot} \vec{a}$  და თუ (1)-(2) განტოლებაში  $\varphi$  და  $\chi$ -ს გავაიგივებთ, შესაბამისად,  $\vec{E}$  და  $i\vec{H}$ -თან, მივიღებთ მაქსველის განტოლებების ნაწილს:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \text{rot} \vec{H}; \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = \text{rot} \vec{E} \quad (5)$$

ორი დანარჩენი განტოლება:

$$\text{div} \vec{E} = 0; \quad \text{div} \vec{H} = 0 \quad (6)$$

ორ დამატებით პირობას იძლევა, რომლებიც  $\vec{E}$  და  $\vec{H}$  ვექტორებს ედება. კლასიკურ ელექტროდინამიკაში ისინი იძლევიან ელექტრომაგნიტური ველის განივობას, ხოლო კვანტურ-მექანიკურ ასპექტში ისინი შეესაბამებიან ფაქტს, რომ არ არსებობს ფოტონი ნულოვანი სპირალობით.

4.80. ელექტრომაგნიტურ ველში მოთავსებული დირაკის  $e$  მუხტის მქონე ნაწილაკის მუხტის სიმკვრივისა და დენის გამოსახულებები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$\rho = e\psi^+\psi = e\bar{\psi}\gamma_4\psi \quad (1)$$

$$\vec{J} = ec\psi^+\vec{\alpha}\psi = iec\bar{\psi}\vec{\gamma}_4\psi \quad (2)$$

ტალღურ ფუნქციაში (ბისპინორში):

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\chi$  ქვედა სპინორი აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\vec{\sigma}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\varphi - mc^2\chi + eA_0\chi \quad (4)$$

არარელატივისტურ ზღვარში (როცა ნაწილაკის  $E$  სრული ენერგია  $E \approx mc^2$ ), იმის გამო, რომ:

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} \approx mc^2\chi \quad (5)$$

(4) ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\chi \approx \frac{1}{2mc}\vec{\sigma}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\varphi \quad (6)$$

ანუ, როგორც (6)-დან ჩანს, არარელატივისტურ ზღვარში:

$$|\chi| \ll |\varphi| \quad (7)$$

ამიტომ, ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია ამ ზღვარში ასეთია:

$$\psi \approx \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{1}{2mc}\vec{\sigma}\left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\varphi \end{pmatrix} \quad (8)$$

ხოლო:

$$\psi^+ = \left( \varphi^*, \left( \frac{1}{2mc}\vec{\sigma}\left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\varphi \right)^* \right) = \left( \varphi^*, \left( \frac{1}{2mc}\left(-\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\varphi^*\vec{\sigma} \right) \right) \quad (9)$$

(8) და (9) გამოსახულების (1) და (2) ფორმულაში შეტანით,  $1/c^2$  სიზუსტით მიიღება შემდეგი ფორმულები მუხტის სიმკვრივისა და დენისათვის:

$$\rho = e\psi^+\psi \approx e\varphi^*\varphi \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \vec{J} &= ec\psi^+ \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \psi = ec \left( \varphi^*, \frac{1}{2mc} \left( -\hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \varphi^* \vec{\sigma} \right) \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \varphi \\ \vec{\sigma} \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e}{2m} \left\{ \varphi^* \vec{\sigma} \left( \vec{\sigma} \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right) \varphi - \left( \left( \hat{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \varphi^* \vec{\sigma} \right) \vec{\sigma} \varphi \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

თუ გამოვიყენებთ პაულის მატრიცების შემდეგ თვისებას:  $\sigma_i \sigma_k = \delta_{ik} + i \varepsilon_{ikl} \sigma_l$ , მაშინ (11) გამოსახულება შეიძლება მნიშვნელოვნად გამარტივდეს, გვექნება:

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{e}{2m} \left\{ \varphi^* \sigma_i \sigma_k \left( \hat{p}_k - \frac{e}{c} A_k \right) \varphi - \left( \left( \hat{p}_k + \frac{e}{c} A_k \right) \varphi^* \right) \sigma_k \sigma_i \varphi \right\} = \\ &= \frac{e}{2m} \left\{ \varphi^* \hat{p}_i \varphi - (\hat{p}_i \varphi^*) \varphi - \frac{2e}{c} A_i \varphi^* \varphi + i \varepsilon_{ikl} [\varphi^* \sigma_l \hat{p}_k \varphi + (\hat{p}_k \varphi^*) \sigma_l \varphi] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

ამასთანავე, გვაქვს:

$$\varepsilon_{ikl} \left[ \varphi^* \sigma_l \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi + \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^* \right) \right] = \varepsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^* \sigma_l \varphi \equiv \{rot(\varphi^* \vec{\sigma} \varphi)\} \quad (13)$$

ამიტომ, (12) და (13)-დან საბოლოოდ მიიღება:

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m} \{ \varphi^* \nabla \varphi - (\nabla \varphi^*) \varphi \} - \frac{e^2}{mc} \vec{A} \varphi^* \varphi + \frac{e\hbar}{2m} rot(\varphi^* \vec{\sigma} \varphi) \quad (14)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ (14) ემთხვევა არარელატივისტური თეორიის ფორმულას ნაწილაკისათვის, რომელსაც აქვს  $s=1/2$  სპინი,  $e$  მუხტი და  $\mu = e\hbar/2mc$  მაგნიტური მომენტი.

4.81. თუ ვისარგებლებთ დირაკის მატრიცების ცხადი სახით და ელექტრომაგნიტური ტენზორის განმარტებით:

$$\begin{aligned} F_{4i} &= -F_{i4} = iE_i \\ F_{ikl} &= \varepsilon_{ikl} H_l \\ i, k &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1)$$

ამოცანის ჰამილტონიანი შეიძლება ასეთი სახით ჩაიწეროს:

$$\hat{H} = c \vec{\alpha} \hat{p} - \lambda \beta \vec{\Sigma} \vec{H} + i \lambda \beta \vec{\alpha} \vec{E} + mc^2 \beta \quad (2)$$

ხოლო  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$  ტალღური განტოლება ორკომპონენტიანი  $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  ბისპინორების  $\varphi$  და  $\chi$  სპინორებისათვის ასეთ განტოლებათა სისტემას იძლევა:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = c \vec{\sigma} \hat{p} \chi + mc^2 \varphi + i \lambda \vec{\sigma} \vec{E} \chi - \lambda \vec{\sigma} \vec{H} \varphi \quad (3)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi = c \vec{\sigma} \hat{p} \varphi - mc^2 \chi - i \lambda \vec{\sigma} \vec{E} \varphi + \lambda \vec{\sigma} \vec{H} \chi \quad (4)$$

არარელატივისტურ ზღვარზე გადასასვლელად, როდესაც ნაწილაკის სრული ენერგია  $E \approx mc^2$ , აუცილებელია ტალღურ ფუნქციაში გამოიყოს  $e^{-\frac{mc^2 t}{\hbar}}$  მამრავლი, ანუ ტალღური ფუნქცია შემდეგი სახით უნდა ავიღოთ:

$$\psi = e^{-\frac{mc^2 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (5)$$

და გამოსახულებაში:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = e^{-\frac{mc^2 t}{\hbar}} \left[ mc^2 \tilde{\psi} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \right]; \quad \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (6)$$

გავითვალისწინოთ უტოლობა:

$$\left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} \right| \approx |\mathcal{E} \tilde{\psi}| \ll mc^2 |\tilde{\psi}| \quad (7)$$

(სადაც  $\mathcal{E}$  არარელატივისტური ნაწილაკის ბმის ენერგიაა), მაშინ (4) განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$2mc^2 \tilde{\chi} - \lambda \vec{\sigma} \vec{H} \tilde{\chi} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi} = (c \hat{\sigma} \vec{p} - i\lambda \vec{\sigma} \vec{E}) \tilde{\varphi} \quad (8)$$

ზემოთ მიღებული თანაფარდობებიდან  $|\lambda \vec{H}| \ll mc^2$  უტოლობის გათვალისწინებით, მიიღება:

$$\tilde{\chi} \approx \frac{1}{2mc} \left( \hat{\sigma} \vec{p} - \frac{i\lambda}{c} \vec{\sigma} \vec{E} \right) \tilde{\varphi} \quad (9)$$

შევნიშნოთ, რომ ისევე, როგორც თავისუფალი არარელატივისტური ნაწილაკისათვის, აქაც სრულდება უტოლობა:

$$|\tilde{\chi}| \ll |\tilde{\varphi}| \quad (10)$$

ახლა (9) შევიტანოთ (3) გამოსახულებაში (ამასთან,  $\varphi$  და  $\chi$  სპინორებში წინასწარ გამოვყოთ  $e^{-\frac{mc^2 t}{\hbar}}$  მამრავლი), მივიღებთ:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\sigma} \vec{p} + \frac{i\lambda}{c} \vec{\sigma} \vec{E} \right) \left( \hat{\sigma} \vec{p} - \frac{i\lambda}{c} \vec{\sigma} \vec{E} \right) \tilde{\varphi} - \lambda \vec{\sigma} \vec{H} \tilde{\varphi} \quad (11)$$

$\hat{\sigma} \vec{p} = \sigma_i p_i$ ;  $\vec{\sigma} \vec{E} = \sigma_k E_k$  ჩანერით და პაულის მატრიცების  $\sigma_i \sigma_k = \delta_{ik} + i\epsilon_{ikl} \sigma_l$  თვისების გამოყენებით, მიიღება შემდეგი ტოლობა:

$$\left( \hat{\sigma} \vec{p} \right) \left( \vec{\sigma} \vec{E} \right) - \left( \vec{\sigma} \vec{E} \right) \left( \hat{\sigma} \vec{p} \right) = \left( \hat{p} \vec{E} \right) - \left( \vec{E} \hat{p} \right) + i \left[ \hat{p} \vec{E} \right] \vec{\sigma} - i \left[ \vec{E} \hat{p} \right] \vec{\sigma} \quad (12)$$

ამასთან:

$$\left( \hat{p} \vec{E} \right) - \left( \vec{E} \hat{p} \right) = i\hbar \operatorname{div} \vec{E} \quad (13)$$

$$\left[ \hat{p} \vec{E} \right] - \left[ \vec{E} \hat{p} \right] = -i\hbar \operatorname{rot} \vec{E} - 2 \left[ \vec{E} \hat{p} \right] \quad (14)$$

რადგანაც  $rot\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ , ეს წვერი შეგვიძლია უგულვებლევყოთ (14) ტოლობა-

ში, იმის გამო, რომ მას გააჩნია სიმცირის  $\frac{1}{c}$ -ზე უფრო მაღალი რიგი, ამიტომ:

$$[\hat{p}\vec{E}] - [\vec{E}\hat{p}] \approx -2[\vec{E}\hat{p}] \quad (15)$$

(15)-ისა და  $(\vec{\sigma}\hat{p}) = \hat{p}^2$  ტოლობის გათვალისწინებით კი (11) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tilde{\varphi} - \lambda \vec{\sigma} \vec{H} \tilde{\varphi} + \frac{\lambda}{mc} \left( -\frac{\hbar}{2} div \vec{E} - [\vec{E}\hat{p}] \vec{\sigma} \right) \tilde{\varphi} \quad (16)$$

ეს განტოლება წარმოადგენს შრედინგერის განტოლებას შემდეგი ჰამილტონიანით:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \lambda \vec{\sigma} \vec{H} + \frac{\lambda}{mc} \left( -\frac{\hbar}{2} div \vec{E} - [\vec{E}\hat{p}] \vec{\sigma} \right) \quad (17)$$

(17) ჰამილტონიანში  $eA_0$  წვერის არარსებობა იმაზე მეტყველებს, რომ ეს ჰამილტონიანი აღწერს ნეიტრალურ ნაწილაკს ( $A_0$  არის გარეშე ელექტროსტატიკური ველის სკალარული პოტენციალი), ხოლო  $-\lambda \vec{\sigma} \vec{H}$  წვერის არსებობა იმას გვიჩვენებს, რომ ნაწილაკს გააჩნია  $\mu \equiv \lambda$  მაგნიტური მომენტი. ბოლო წვერი (17)-ში წარმოადგენს სპინორბიტალურ ურთიერთქმედებას.

4.82. გარეშე ელექტროსტატიკურ ველში დირაკის ჰამილტონიანი ასე გამოიყურება:

$$\hat{H} = c \vec{\alpha} \hat{p} + mc^2 \beta + e_1 A_0(r) \equiv \hat{H}_0 + \hat{V}; \quad \hat{V} = e_1 A_0 = \frac{Zee_1}{r} \quad (1)$$

სადაც  $e_1$  ნაწილაკის მუხტია.

$\vec{p}_1$  იმპულსის მქონე ნაწილაკის საწყისი მდგომარეობის ნორმირებული ტალღური ფუნქცია (ერთეულოვანი ნაკადის სიმკვრივით) ასეთია:

$$\psi_i = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \left( \begin{array}{c} \varphi_i \\ c \vec{\sigma} \vec{p}_1 \varphi_i \end{array} \right) \sqrt{\frac{1}{v}} e^{i(\vec{p}_1 \vec{r} - Et)/\hbar}; \quad \vec{J} = c \psi_i^+ \vec{\alpha} \psi_i = \frac{\vec{v}_1}{v}; \quad \vec{J} = 1 \quad (2)$$

სადაც  $E$  და  $\vec{v}$  ნაწილაკის ენერგია და სიჩქარეა, ხოლო  $\vec{p}_2$  იმპულსის მქონე ნაწილაკის საბოლოო მდგომარეობის ნორმირებულ ტალღურ ფუნქციას (ერთეულოვანი ნაკადის სიმკვრივით) ასეთი სახე აქვს:

$$\psi_f = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \left( \begin{array}{c} \varphi_f \\ c \vec{\sigma} \vec{p}_2 \varphi_f \end{array} \right) e^{i(\vec{p}_2 \vec{r} - Et)/\hbar}; \quad \rho = \psi_f^+ \psi_f = 1 \quad (3)$$

$\varphi_i$  და  $\varphi_f$  სპინორები ერთიანზეა ნორმირებული, ანუ  $|\varphi_i|^2 = |\varphi_f|^2 = 1$ , ხოლო ნაწილაკის საწყის და საბოლოო მდგომარეობებში ენერგია ერთნაირია. გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა მოიცემა შემფოთების თეორიის ცნობილი ფორმულით:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{if}|^2 d\rho_f \quad (4)$$

საბოლოო მდგომარეობების სიმკვრივე ტოლია:

$$d\rho_f = \int \delta(E_f - E_i) \frac{d^3 p_f}{(2\pi\hbar)^3} = \int \delta(E - E_2) \frac{p_2 E_2 dE_2 d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 c^2} = \frac{p E d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \quad (5)$$

შემფოთების მატრიცული ელემენტი კი ასეთია:

$$V_{if} = \int \psi_f^* \hat{V} \psi_i dV = \frac{Zee_1(E + mc^2)}{2E\sqrt{v}} \int \frac{e^{-i\vec{q}\vec{r}}}{r} dV \varphi_f^* \left[ 1 + \frac{c^2 (\vec{\sigma}\vec{p}_2)(\vec{\sigma}\vec{p}_1)}{(E + mc^2)^2} \right] \varphi_i \quad (6)$$

სადაც  $\hbar\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ . თუ ვისარგებლებთ შემდეგი თანაფარდობებით ( $\theta$  გაფანტვის კუთხეა):

$$(\vec{\sigma}\vec{p}_2)(\vec{\sigma}\vec{p}_1) = \vec{p}_1\vec{p}_2 + i[\vec{p}_2\vec{p}_1]\vec{\sigma} = p^2 \cos\theta - ip^2 \sin\theta\vec{\sigma}\vec{v} \quad (7)$$

$$\vec{v} = \frac{[\vec{p}_1\vec{p}_2]}{|\vec{p}_1\vec{p}_2|}; \quad v^2 = 1; \quad \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} \frac{dV}{r^3} = \frac{4\pi}{q^2} = \frac{\pi\hbar^2}{p^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (8)$$

შესაძლებელი ხდება უფრო ხელსაყრელი ფორმით ჩაინეროს (6) მატრიცული ელემენტი. გვექნება:

$$V_{if} = \frac{\pi Zee_1 \hbar^2}{2Ep^2 \sqrt{v}(E + mc^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}} \varphi_f^* \left\{ (E + mc^2)^2 + p^2 c^2 \cos\theta - ip^2 c^2 \sin\theta\vec{\sigma}\vec{v} \right\} \varphi_i \quad (9)$$

(4), (5) და (9) ფორმულა განსაზღვრავს გაფანტვის დიფერენციალურ კვეთას.

4.83. გამოიყენეთ შემდეგი ცნობილი ფორმულა:

$$\left\langle \left| \varphi_f^* (f_1 + if_2 \vec{\sigma}\vec{v}) \varphi_i \right|^2 \right\rangle = |f_1|^2 + |f_2|^2 \quad (1)$$

სადაც  $\langle \rangle$  აღნიშნავს დაცემული ნაკადის ნაწილაკების სპინური მდგომარეობებით გასაშუალოებას და გაფანტული ნაწილაკების სპინური მდგომარეობების მიხედვით აჯამვას.

ამ ამოცანისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left| \varphi_f^* \left\{ (E + mc^2)^2 + p^2 c^2 \cos\theta - ip^2 c^2 \sin\theta\vec{\sigma}\vec{v} \right\} \varphi_i \right|^2 \right\rangle = \\ & = 4E^2 (E + mc^2)^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

არაპოლარიზებული ნაწილაკების გაფანტვის დიფერენციალური კვეთისათვის კი გვექნება:

$$d\bar{\sigma} = \frac{(Zee_1)^2}{4p^2v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\Omega \quad (3)$$

არარელატივისტურ შემთხვევაში, როცა  $\frac{v}{c} \ll 1$ ;  $p \approx mv$ , (3) გადადის რეზერფორდის ფორმულაში.

4.84. წინა ამოცანის ამონახსნის (3) ფორმულაში მოვახდინოთ შემდეგი შეცვლა:

$$\frac{\pi Zee_1 \hbar^2}{p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \int \frac{Zee_1}{r} e^{-iq\bar{r}} dV \rightarrow e \int A_0(r) e^{-iq\bar{r}} dV \equiv e\bar{A}_0(q) \quad (1)$$

შედეგად მივიღებთ არაპოლარიზებული ნაწილაკებისათვის გაფანტვის დიფერენციალურ კვეთას:

$$d\bar{\sigma} = \frac{e^2 p^2 \tilde{A}_0^2(q)}{4\pi^2 \hbar^4 v^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\Omega \quad (2)$$

თუ გამოვიყენებთ  $d\Omega = \frac{\pi \hbar^2}{p^2} dq^2$  თანაფარდობას, მივიღებთ გაფანტვის სრული კვეთის ფორმულას:

$$\bar{\sigma}(E) = \frac{e^2}{4\pi \hbar^2 v^2} \int_0^{\frac{4p^2}{\hbar^2}} \tilde{A}_0^2(q) \left( 1 - \frac{\hbar^2 v^2}{4p^2 c^2} q^2 \right) dq^2 \quad (3)$$

ულტარელატივისტურ ზღვარში გვაქვს  $p \approx \frac{E}{c}$ ;  $v \approx c$ . ამასთან, (3) ინტეგრალში მნიშვნელოვანია  $q^2 \leq R^2$  არე, სადაც  $R$ ,  $A_0(r)$  არის პოტენციალის მოქმედების რადიუსი. ამიტომ  $E \rightarrow \infty$  ზღვარში გაფანტვის კვეთა მუდმივი მნიშვნელობისაკენ მიისწრაფვის:

$$\bar{\sigma}(E) \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \sigma_0 = \frac{e^2}{4\pi \hbar^2 c^2} \int_0^\infty \tilde{A}_0^2(q) dq^2 \quad (4)$$

შევნიშნოთ, რომ (4) ინტეგრალის კრებადობა ქვედა საზღვარზე ( $q^2 \rightarrow 0$ ) მოითხოვს დიდ მანძილზე  $A_0(r)$  პოტენციალის შემდეგი წესით დაცემას:

$$|A_0(r)| < \frac{B}{r^2} \quad (5)$$



თუ არ შესრულდება (5) პირობა, მაშინ, არარელატივისტური შემთხვევის ანალოგიურად, გაფანტვის სრული კვეთა უსასრულობა იქნება.

4.85. საძებნი გრინის ფუნქციები შეიძლება ადვილად გამოვსახოთ თავისუფალი ნაწილაკის შესაბამისი არარელატივისტური  $g^\pm(\vec{r}, \vec{r}')$  გრინის ფუნქციების საშუალებით, რომელთათვის:

$$(-\Delta - k^2)g^\pm(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad g^\pm(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\exp[\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|]}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1)$$

თუ გამოვიყენებთ შემდეგ ტოლობას:

$$-\hbar^2 c^2 \Delta - E^2 + m^2 c^4 = (c\hat{\alpha}\hat{p} + mc^2\beta - E)(c\hat{\alpha}\hat{p} + mc^2\beta + E) \quad (2)$$

გვექნება:  $(E^2 = \hbar^2 k^2 c^2 + m^2 c^4)$

$$\begin{aligned} (-\hbar^2 c^2 \Delta - \hbar^2 c^2 k^2) \frac{\exp[\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|]}{4\pi\hbar^2 c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ = (c\hat{\alpha}\hat{p} + mc^2\beta - E)(c\hat{\alpha}\hat{p} + mc^2\beta + E) \frac{\exp[\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|]}{4\pi\hbar^2 c^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (3)$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს თავისუფალი დირაკის ნაწილაკის გრინის ფუნქცია:

$$\hat{G}_E^\pm(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\hbar^2 c^2} (c\hat{\alpha}\hat{p} + mc^2\beta + E) \frac{\exp[\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4)$$

ანუ, ინდექსების მითითებით გვექნება:

$$\hat{G}_{E\alpha\beta}^\pm(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\hbar^2 c^2} (c\hat{\alpha}\hat{p} + mc^2\beta + E)_{\alpha\beta} \frac{\exp[\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5)$$

4.86. მოცემული ტოლობის გამოყენებით:

$$-\hbar^2 c^2 \Delta - E^2 + m^2 c^4 = (ic\hat{p} + mc^2)(-ic\hat{p} + mc^2) \quad (1)$$

მიიღება ამ ამოცანის გრინის ფუნქცია:

$$f_E^\pm(\vec{r}, \vec{r}') = -i \frac{c\hat{p} + mc^2}{4\pi\hbar^2 c^2} \frac{\exp[\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{-\hbar c \vec{\gamma} + E\gamma_4 + mc^2}{4\pi\hbar^2 c^2} \frac{\exp[\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2)$$

სადაც  $f_E^\pm(\vec{r}, \vec{r}')$  გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$(ic\hat{p} + mc^2)f_E^\pm(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3)$$

4.87. გარეშე ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი მუხტის დირაკის განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$(c\hat{\alpha}\hat{p} + mc^2\beta - E)\psi(\vec{r}) = e(\hat{\alpha}\vec{A}(\vec{r}) - A_0(\vec{r}))\psi(\vec{r}) \quad (1)$$

$\vec{p}_1 = \hbar\vec{k}_1$  იმპულსის მქონე ნაწილაკის გაფანტვის ამოცანისათვის (1) განტოლება შემდეგი ინტეგრალური განტოლების სახით ჩაინერება:

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{p}_1}^{(+)} = & u_1(\vec{p}_1)e^{i\vec{k}_1\vec{r}} + \\ & + \frac{e}{4\pi\hbar^2 c^2} (c\hat{\alpha}\vec{p} + mc^2\beta + E) \int \frac{\exp\{ik|\vec{r} - \vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\hat{\alpha}\vec{A}(\vec{r}') - A_0(\vec{r}')) \psi_{\vec{p}_1}^{(+)}(\vec{r}') dV' \end{aligned} \quad (2)$$

დიდ  $r \rightarrow \infty$  მანძილებზე (2) განტოლების მარჯვენა მხარის მეორე წევრი ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\frac{e}{4\pi\hbar^2 c^2} (c\hat{\alpha}\vec{p} + mc^2\beta + E) \frac{e^{i\vec{k}r}}{r} \int e^{-i\vec{k}\vec{r}'} (\hat{\alpha}\vec{A}(\vec{r}') - A_0(\vec{r}')) \psi_{\vec{p}_1}^{(+)}(\vec{r}') dV' \quad (3)$$

სადაც  $\vec{n} = \vec{r}/r$ ;  $\vec{p}_2 = \hbar\vec{k}_2 = \hbar k\vec{n}$  არის გაფანტული ნაწილაკის იმპულსი. (3) გამოსახულებაში იმპულსის ოპერატორი მოქმედებს მხოლოდ  $e^{i\vec{k}r}$  მამრავლზე ( $\hat{p}e^{i\vec{k}r} = \hbar k\vec{n}e^{i\vec{k}r}$ ), რადგანაც  $\hat{p}$  ოპერატორის მოქმედება სხვა მამრავლებზე უსასრულობაში იძლევა  $r^{-2}$  ყოფაქცევის წევრებს, რომლებიც ამ ასიმპტოტიკაში შეიძლება უგულებელყოფილ იქნენ. ამიტომ (2) ტალღურ ფუნქციას უსასრულობაში ასეთი ასიმპტოტური სახე ექნება:

$$\psi_{\vec{p}_1}^{(+)}(\vec{r}) \approx u_1(\vec{p}_1)e^{i\vec{k}_1\vec{r}} + F \frac{e^{i\vec{k}r}}{r}; \quad r \rightarrow \infty \quad (4)$$

სადაც ბისპინორი:

$$\hat{F} = \frac{e}{4\pi\hbar^2 c^2} (c\hat{\alpha}\vec{p}_2 + mc^2\beta + E) \int e^{-i\vec{k}_2\vec{r}'} (\hat{\alpha}\vec{A}(\vec{r}') - A_0(\vec{r}')) \psi_{\vec{p}_1}^{(+)}(\vec{r}') dV' \quad (5)$$

წარმოადგენს გაფანტვის ამპლიტუდას.

ბორნის მიახლოებაში, (5) გამოსახულებაში  $\psi_{\vec{p}_1}^{(+)}(\vec{r}')$ -ის ნაცვლად უნდა ავიღოთ გარეშე ველის მიერ შეუშფოთებული  $u_1(\vec{p}_1)e^{i\vec{k}_1\vec{r}}$  მნიშვნელობა და გვექნება:

$$F \approx F_B \equiv \hat{F}_B u_1(\vec{p}_1) \quad (6)$$

სადაც:

$$\hat{F}_B = \frac{e}{4\pi\hbar^2 c^2} (c\hat{\alpha}\vec{p}_2 + mc^2\beta + E) \int e^{-i\vec{q}\vec{r}'} (\hat{\alpha}\vec{A}(\vec{r}') - A_0(\vec{r}')) dV'; \quad \hbar\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (7)$$

$\hat{F}_B$  ოპერატორი (მატრიცა) წარმოადგენს გაფანტვის მატრიცას ბორნის მიახლოებაში. მისი მატრიცული ელემენტები  $F_{12} = u_2^*(\vec{p}_2)\hat{F}_B u_1(\vec{p}_1)$  ბისპინორების

შემდეგი ნორმირებისას  $u_{1,2}^* u_{1,2} = 1$  (ერთეულოვანი  $\rho_{1,2} = 1$  სიმკვრივისას) განსაზღვრავენ გაფანტვის დიფერენციალურ კვეთას:

$$d\sigma_{12} = \left| u_2^*(\vec{p}_2) \hat{F}_B u_1(\vec{p}_1) \right|^2 d\Omega_2 \quad (8)$$

შევნიშნოთ, რომ (8) გამოსახულება დამოკიდებულია გამფანტავი და გაფანტული ნაწილაკების სპინურ მდგომარეობებზე. თუ გაფანტული ნაწილაკის სპინური მდგომარეობა არ ფიქსირდება, გაფანტვის დიფერენციალური კვეთა ამ შემთხვევაში განისაზღვრება ფორმულით:

$$d\sigma_{12} = F^* F d\Omega_2 \quad (9)$$

(8) გამოსახულება შეიძლება გამარტივდეს დირაკის განტოლების გამოყენებით. გვექნება:

$$(c\vec{\alpha}\vec{p}_2 + mc^2 \beta) u_2(p_2) = E u_2(\vec{p}_2) \quad (10)$$

$$u_2^*(p_2) (c\vec{\alpha}\vec{p}_2 + mc^2 \beta) = E u_2^*(\vec{p}_2) \quad (11)$$

ამიტომ:

$$u_2^*(\vec{p}_2) \hat{F}_B u_1(\vec{p}_1) \equiv u_2^*(\vec{p}_2) \hat{G}_B u_1(\vec{p}_1) \quad (12)$$

სადაც:

$$\hat{G}_B = \frac{eE}{2\pi\hbar^2 c^2} \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} (\vec{\alpha}\vec{A}(\vec{r}) - A_0(\vec{r})) dV \quad (13)$$

გაფანტვის დიფერენციალური კვეთაა:

$$d\sigma_{12} = \left| u_2^*(\vec{p}_2) \hat{G}_B u_1(\vec{p}_1) \right|^2 d\Omega_2 \quad (14)$$

ელექტროსტატიკური ველისათვის წინა ამოცანის (14) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$d\sigma_{12} = \left| \frac{eE}{2\pi\hbar^2 c^2} \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} A_0(\vec{r}) dV u_2^*(\vec{p}_2) u_1(\vec{p}_1) \right|^2 d\Omega_2 \quad (1)$$

ამ გამოსახულების სპინზე დამოკიდებულება (რომელიც  $u_1$  და  $u_2$  ბისპინორით განისაზღვრება) უფრო თვალსაჩინო ხდება, თუ (1)-ს გამოვსახავთ ბისპინორების  $\varphi_{1,2}$  „ზედა კომპონენტებით“, გვექნება:

$$u_2^*(\vec{p}_2) u_1(\vec{p}_1) = \frac{1}{2E(E + mc^2)} \varphi_2^* (E + mc^2)^2 + (pc)^2 \cos\theta - i(pc)^2 \sin\theta \vec{v} \varphi_1 \quad (2)$$

სადაც:

$$\vec{v} = \frac{[\vec{p}_1 \vec{p}_2]}{[\vec{p}_1 \vec{p}_2]}; \quad v^2 = 1 \quad (3)$$

ხოლო  $\theta$  გაფანტვის კუთხეა.

თუ მოვახდენთ დაცემული ნაკადის ნაწილაკების სპინური მდგომარეობებით გასაშუალოებას და გაფანტული ნაწილაკების სპინური მდგომარეობების მიხედვით აჯამვას, მივიღებთ:

$$\left\langle \left| \phi_2^*(E+mc^2)^2 + (pc)^2 \cos\theta + i(pc)^2 \sin\theta \vec{\sigma} \vec{\nu} \phi_1 \right|^2 \right\rangle = 4E^2(E+mc^2)^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (4)$$

სადაც  $\vec{\nu}$  ნაწილაკის სიჩქარეა.

$$4.88. \quad d\bar{\sigma} = \frac{(Zee_1)^2}{4p^2v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\Omega$$

$$4.89. \quad (\not{p} - m)(\not{p} + m) = (\not{p} + m)(\not{p} - m) = p^2 - m^2 \quad (1)$$

$u$  და  $v$ -ს განმარტებებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}, s) = 0 \quad (2)$$

$$(\not{p} + m)v(\vec{p}, s) = 0 \quad (3)$$

(3)-ის ერმიტულად შეუღლებული განტოლება იქნება:

$$v^+(\vec{p}, s)(\not{p} + m) = 0 \quad (4)$$

და რადგანაც  $\gamma^+ \gamma^0 = \gamma^0 \gamma$ , ამიტომ (4)-ის  $\gamma_0$ -ზე გამრავლება მარჯვნიდან მოგვცემს:

$$\bar{v}(\vec{p}, s)(\not{p} + m) = 0 \quad (5)$$

4.90. უძრობის სისტემაში სპინორები ასე გამოიყურება:

$$u(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u(0,2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ამიტომ:

$$u^+(0,s)u(0,t) = \delta_{st} \quad (2)$$

ცხადია, რომ:

$$\gamma^0 u(0,t) = u(0,t) \quad (3)$$

$$u^+(0,s)\vec{\gamma}u(0,t) = 0 \quad (4)$$

$u(\vec{p},s)$ -ის განმარტებიდან:

$$\begin{aligned} 2m(\omega_p + m)\bar{u}(\vec{p},s)u(\vec{p},t) &= u^+(0,s)(m + \gamma^+ p)\gamma^0(m + \not{p})u(0,t) = \\ &= u^+(0,s)\gamma^0(m + \not{p})^2 u(0,t) = u^+(0,s)(m^2 + 2m\not{p} + p^2)u(0,t) \end{aligned} \quad (5)$$

მაგრამ  $p^2 = m^2$  მასურ ზედაპირზე და  $u^+(0, s)\not\partial u(0, t) = \omega_p u^+(0, s)u(0, t)$ . ამიტომ (5) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$2m(\omega_p + m)\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, t) = (2m^2 + 2m\omega_p)\mu^+(0, s)u(0, t) \quad (6)$$

საბოლოოდ, (6)-დან მიიღება:

$$\bar{u}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, t) = u^+(0, s)u(0, t) = \delta_{st} \quad (7)$$

4.91.  $v(\vec{p}, s)$ -ის განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი:

$$\begin{aligned} 2m(\omega_p + m)\bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, t) &= v^+(0, s)(m - \gamma^+ p)\gamma^0(m - \not{p})v(0, t) = \\ &= v^+(0, s)\gamma^0(m - \not{p})^2 v(0, t) = 2mv^+(0, s)\gamma^0(m - \not{p})v(0, t) \end{aligned} \quad (1)$$

სადაც გამოყენებულია:  $p^2 = m^2$  და  $\gamma^+ \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^+$ .

ადგილი საჩვენებელია, რომ ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$v^+(0, s)v(0, t) = \delta_{st} \quad (2)$$

$$\gamma^0 v(0, t) = -v(0, t) \quad (3)$$

$$v^+(0, s)\not{p}v(0, t) = 0 \quad (4)$$

ამიტომ:

$$2m(\omega_p + m)\bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, t) = 2mv^+(0, s)(m\gamma^0 - \omega_p)v(0, t) = -2m(m + \omega_p)v^+(0, s)v(0, t) \quad (5)$$

საბოლოოდ მიიღება:

$$\bar{v}(\vec{p}, s)v(\vec{p}, t) = -v^+(0, s)v(0, t) = -\delta_{st} \quad (6)$$

4.92.

$$\begin{aligned} 2m(\omega_p + m)\bar{v}(\vec{p}, s)u(\vec{p}, t) &= v^+(0, s)(m - \gamma^+ p)\gamma^0(m + \not{p})u(0, t) = \\ &= v^+(0, s)\gamma^0(m - \not{p})(m + \not{p})u(0, t) = v^+(0, s)\gamma^0(m^2 - p^2)u(0, t) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ორთოგონალობას ადგილი აქვს ნებისმიერი  $\vec{p}$ -თვის და  $\vec{p}$ -ს  $-\vec{p}$ -თი შეცვლისას. ამიტომ, (1)-დან მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

4.93.

$$\begin{aligned} 2m(\omega_p + m)\mu^+(-\vec{p}, s)v(\vec{p}, t) &= u^+(0, s)(m + \gamma^{+0}\omega_p - \gamma^+ \cdot \vec{p})(m - \not{p})v(0, t) = \\ &= u^+(0, s)(m + \not{p})(m - \not{p})v(0, t) = u^+(0, s)(m^2 - p^2)v(0, t) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ორთოგონალობას ადგილი აქვს ნებისმიერი  $\vec{p}$ -თვის და  $\vec{p}$ -ს  $-\vec{p}$ -თი შეცვლისას. ამიტომ, (1)-დან მიიღება:

$$u^+(\vec{p}, s)v(-\vec{p}, t) = 0 \quad (2)$$

4.94.

$$\begin{aligned} 2m(\omega_p + m)u^+(\vec{p}, s)u(\vec{p}, t) &= u^+(0, s)(m + \gamma^{+0}\omega_p + \gamma^+ \cdot \vec{p})u(0, t) = \\ &= u^+(0, s)(m + \gamma^0\omega_p - \vec{\gamma} \cdot \vec{p})(m + \not{p})u(0, t) = u^+(0, s)\left[(m + \gamma^0\omega_p)^2 - (\vec{\gamma} \cdot \vec{p})^2\right]u(0, t) \end{aligned} \quad (1)$$

მაგრამ:

$$(\vec{\gamma} \cdot \vec{p})^2 = \frac{1}{2}\{\gamma^j, \gamma^k\}p_j p_k = g^{jk} p_j p_k = -(\vec{p})^2 = m^2 - \omega_p^2 \quad (2)$$

ამიტომ,  $\gamma^0 u(0, t) = u(0, t)$ -ის გამოყენებით მიიღება:

$$\left[(m + \gamma^0\omega_p)^2 - (\vec{\gamma} \cdot \vec{p})^2\right] = m^2 + 2m\gamma^0\omega_p + \omega_p^2 - m^2 + \omega_p^2 = 2\omega_p(\omega_p + m) \quad (3)$$

საბოლოოდ, (3)-ის (1)-ში შეტანით მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობის ერთი ნაწილი:

$$u^+(\vec{p}, s)u(\vec{p}, t) = \frac{\omega_p}{m} \delta_{st} \quad (4)$$

ანალოგიურად:

$$\begin{aligned} 2m(\omega_p + m)v^+(\vec{p}, s)v(\vec{p}, t) &= v^+(0, s)(m - \gamma^{+0}\omega_p - \gamma^+ \cdot \vec{p})v(0, t) = \\ &= v^+(0, s)(m - \gamma^0\omega_p + \vec{\gamma} \cdot \vec{p})(m - \not{p})v(0, t) = v^+(0, s)\left[(m - \gamma^0\omega_p)^2 - (\vec{\gamma} \cdot \vec{p})^2\right]v(0, t) = \\ &= 2\omega_p v^+(0, s)(\omega_p - m\gamma_0)v(0, t) = 2\omega_p(\omega_p + m)v^+(0, s)v(0, t) = 2\omega_p(\omega_p + m)\delta_{st} \end{aligned} \quad (5)$$

საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობის მეორე ნაწილი:

$$v^+(\vec{p}, s)v(\vec{p}, t) = \frac{\omega_p}{m} \delta_{st} \quad (6)$$

4.95. ალბათობის დენის ვექტორისა და ალბათობის სიმკვრივისათვის,  $\psi$  მატრიცისათვის გვაქვს:

$$\rho = \psi^+ \psi; \quad \vec{J} = c\psi^+ \vec{\alpha} \psi = ic\psi^+ \gamma_4 \vec{\gamma} \psi \quad (1)$$

$ic\rho$  და  $\vec{J}$  ადგენენ ოთხვექტორს. დენის ეს ოთხვექტორი აღვნიშნოთ  $J_\mu(J, ic\rho)$ -თი. აშკარაა, რომ:

$$J_\mu = ic(\psi^+ \gamma_\mu \psi); \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

მართლაც,  $\vec{J}$ -სათვის გვაქვს  $ic(\psi^+ \gamma_4 \vec{\gamma} \psi)$ , ხოლო  $j_4 = ic\psi^+ \psi = ic\rho$ . (2) ფორმულის საშუალებით უწყვეტობის განტოლება ასე დაინერგება:

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (3)$$

სადაც  $x_4 = ict$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  და  $x_3 = z$ .

4.96. თუ დირაკის განტოლება ჩანერილია  $\gamma$  მატრიცებში:

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \lambda \psi = 0 \quad (1)$$

მაშინ,  $\psi^+$ -ის ნაცვლად ხელსაყრელია ახალი  $\bar{\psi}$  ფუნქციის შემოღება, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4 \quad (2)$$

ან, პირიქით:

$$\psi^+ = \bar{\psi} \gamma_4 \quad (3)$$

ამ შემთხვევაში, წინა ამოცანის (1) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\rho = \bar{\psi} \gamma_4 \psi; \quad \vec{J} = ic \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi \quad (4)$$

დენის ობვექტორისათვის კი გვექნება:

$$J_\mu = ic (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \quad (5)$$

4.97. ავიღოთ წინა ამოცანის (1) განტოლების ერმიტულად შეუღლებული განტოლება:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \right)^+ \gamma_\nu + \lambda \psi^+ = 0 \quad (1)$$

გავამრავლოთ (1) განტოლება მარჯვნიდან  $\gamma_4$  მატრიცაზე და გავიხსენოთ, რომ  $x_4^+ = (ict)^+ = -x_4$ , მივიღებთ:

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial x_k} \gamma_k \gamma_4 - \frac{\partial \psi^+}{\partial x_4} \gamma_4 \gamma_4 + \lambda \psi^+ \gamma_4 = 0; \quad (k=1,2,3) \quad (2)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $\gamma_k \gamma_4 = -\gamma_4 \gamma_k$  და  $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4$ ,  $\bar{\psi}$  ფუნქცია დააკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\nu - \lambda \bar{\psi} = 0 \quad (3)$$

4.98. თუ მოვახდენთ შეცვლას  $\hat{p} \rightarrow \hat{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$  და  $\frac{\hat{E}}{c} \rightarrow \frac{\hat{E}}{c} + \frac{e}{c} \phi$ , მაშინ დირაკის განტოლება ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი ელექტრონისათვის ასე გადაინერება:

$$\left[ \frac{\hat{E}}{c} - (\vec{\alpha} \hat{p}) - \alpha_4 mc \right] \psi = -\frac{e}{c} [\phi - (\vec{\alpha} \vec{A})] \psi \quad (1)$$

და თუ გავიმეორებთ იმავე გარდაქმნებს, რაც საჭიროა თავისუფალი ნაწილაკის შემთხვევაში  $\gamma$  მატრიცებზე გადასასვლელად, მივიღებთ:

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \lambda \psi = \frac{e}{\hbar c} \left[ \gamma_4 \phi + \frac{1}{i} (\vec{\gamma} \vec{A}) \right] \psi \quad (2)$$

ხოლო, თუ გავიხსენებთ, რომ პოტენციალები ადგენს ოთხვექტორს  $A_\nu = (\vec{A}, i\phi)$ , მაშინ, საბოლოოდ, გვექნება:

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \lambda \psi = -\frac{ie}{\hbar c} (\gamma_\nu A_\nu) \psi \quad (3)$$

4.99. 
$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\nu - \lambda \bar{\psi} = \frac{ie}{\hbar c} \bar{\psi} \gamma_\nu A_\nu$$

4.100. სმირად,  $x_4 = ict$ -ს ნაცვლად შემოაქვთ აღნიშვნა  $x_0 = ct$ , ხოლო  $\gamma$  მატრიცებს ასე განმარტავენ:

$$\gamma^0 = \alpha_4; \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}^0 \\ -\vec{\sigma}^0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ცხადია, რომ  $\gamma_0$  ერმიტულია, ხოლო  $\gamma_i^+ = -\gamma_i$  ( $i=1,2,3$ ) – ანტიერმიტული. ასევე  $\gamma_i^2 = -1$  ( $i=1,2,3$ ), ხოლო  $\gamma_4^2 = 1$ . ამ აღნიშვნებში დირაკის განტოლებას  $\psi$  ფუნქციისათვის ასეთი სახე აქვს:

$$-i\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \lambda \psi = 0 \quad (2)$$

ხოლო  $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$ -თვის:

$$i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\nu + \lambda \bar{\psi} = 0; \quad (3)$$

დენის ვექტორი და ალბათობის სიმკვრივე განისაზღვრება ფორმულებით;

$$\vec{J} = c \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi; \quad \rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi \quad (4)$$

4.101.  $P_\pm$  ერმიტული ოპერატორებია და  $P_\pm^2 = P_\pm$

4.102. უმასო ნაწილაკისათვის დირაკის განტოლებას  $\gamma$  მატრიცებში ასეთი სახე აქვს:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = 0 \quad (1)$$



იმის გასარკვევად, აკმაყოფილებს თუ არა ამ განტოლებას  $\Phi = \gamma_5 \psi$  ფუნქცია, (1) განტოლება მარცხნიდან გავამრავლოთ  $\gamma_5$ -ზე, გვექნება:

$$-\gamma_\mu \frac{\partial \gamma_5 \psi}{\partial x_\mu} = 0 \quad (2)$$

ანუ:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} = 0 \quad (3)$$

მივიღეთ, რომ  $\Phi = \gamma_5 \psi$  ფუნქცია აკმაყოფილებს (1) განტოლებას.

ანალოგიურად, (1) განტოლება მარცხნიდან გავამრავლოთ  $(1 + \gamma_5)$ -ზე, გვექნება:

$$(1 + \gamma_5) \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = 0 \quad (4)$$

ანუ:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \gamma_\mu \frac{\partial \gamma_5 \psi}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (1 - \gamma_5) \psi = 0 \quad (5)$$

ამრიგად, (1) განტოლებას აკმაყოფილებს  $\psi = (1 - \gamma_5) \psi$  და არა  $\psi = (1 + \gamma_5) \psi$  ფუნქცია.

4.103.  $\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \lambda \psi = 0$  განტოლება მარცხნიდან გავამრავლოთ  $\gamma_5$ -ზე, გვექნება:

$$-\gamma_\mu \frac{\partial \gamma_5 \psi}{\partial x_\mu} + \lambda \gamma_5 \psi = 0 \quad (1)$$

ანუ, მივიღეთ, რომ  $\Phi = \gamma_5 \psi$  ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$-\gamma_\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} + \lambda \Phi = 0 \quad (2)$$

4.105.  $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ ) (1)

გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა განისაზღვრება ფორმულით:

$$x_\nu = a_{\mu\nu} x'_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

წრფივი გარდაქმნა (1) შეიცავს კოორდინატთა სისტემის ღერძების მობრუნებას და სარკისებურ არეკვლას – ინვერსიას სათავის მიმართ. ამასთან, მობრუნებას  $x_1 0 x_4$  სიბრტყეში შეესაბამება ლორენცის გარდაქმნები:

$$x_1 = \frac{x'_1 - i\beta x'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3; \quad x_4 = \frac{x'_4 + i\beta x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3)$$

სადაც  $v = \beta c$  მოძრავი სისტემის სიჩქარეა უძრავის მიმართ. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $tg\theta = i\beta$  ( $\theta$ -წმინდა წარმოსახვითი კუთხეა), მაშინ ლორენცის ფორმულები დაიყვანება შემდეგ წრფივ გარდაქმნაზე:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \theta - x'_4 \sin \theta \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \\ x_4 &= x'_1 \sin \theta + x'_4 \cos \theta \end{aligned} \quad (4)$$

რომელიც, (2)-ის თანახმად, მართლაც მობრუნებაა  $\theta$  წარმოსახვით კუთხეზე  $x_1 0 x_4$  სიბრტყეში შემდეგი გარდაქმნის მატრიცით:

$$a = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

(2) გარდაქმნაში შედის მობრუნება  $x_1 0 x_2$  სიბრტყეში  $\varphi$  კუთხეზე. ცნობილია, რომ ეს მობრუნება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \varphi - x'_2 \sin \varphi \\ x_2 &= x'_1 \sin \varphi + x'_2 \cos \varphi \\ x_3 &= x'_3 \\ x_4 &= x'_4 \end{aligned} \quad (6)$$

შესაბამის გარდაქმნის მატრიცას კი ასეთი სახე აქვს:

$$a = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

სივრცით ინვერსიას შეესაბამება შემდეგი ფორმულები:

$$x_\alpha = -x'_\alpha, \quad x_4 = x'_4; \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (8)$$

რომლის შესაბამისი მატრიცაა:

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ამგვარად, კოორდინატთა სისტემის ყველა შესაძლო წრფივი გარდაქმნა თავმოყრილია (2) გამოსახულებაში. ვაჩვენოთ, რომ დირაკის განტოლება ინვარიანტულია ამ გარდაქმნების მიმართ. რადგან  $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$  ოთხგრადიენტია, ამიტომ მისთვის მოქმედებს გარდაქმნის შემდეგი კანონი:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = a_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \quad (10)$$

(10) გამოსახულება შევიტანოთ დირაკის განტოლებაში, გვექნება:

$$a_{\nu\mu} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x'_\nu} + \lambda \psi = 0 \quad (11)$$

ეს განტოლება მარცხნიდან გავამრავლოთ  $\Omega$  მატრიცაზე და  $\psi$  ფუნქცია წარმოვიდგინოთ იგივეურად:

$$\psi = \Omega^{-1} \Omega \psi = \Omega^{-1} \psi' \quad (12)$$

სადაც:

$$\psi' = \Omega \psi \quad (13)$$

$\Omega$  მატრიცები ჯერჯერობით უცნობი მატრიცებია. (11) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\Omega a_{\nu\mu} \gamma_\mu \Omega^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x'_\nu} + \lambda \psi' = 0 \quad (14)$$

ახლა საკმარისია დავუშვათ, რომ:

$$\Omega a_{\nu\mu} \gamma_\mu \Omega^{-1} = \gamma_\nu \quad (15)$$

ან, რაც ეკვივალენტურია:

$$a_{\nu\mu} \gamma_\mu = \Omega^{-1} \gamma_\nu \Omega \quad (16)$$

მაშინ დირაკის განტოლება მიიღებს ინვარიანტულ სახეს:

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi'}{\partial x'_\nu} + \lambda \psi' = 0 \quad (17)$$

შემდეგ ამოცანებში ვიპოვით  $\Omega$  მატრიცების კონკრეტულ სახეს.

4.106. ადვილად შევამოწმებთ, რომ, აღნიშნული მობრუნების შემთხვევაში, წინა ამოცანის (16) განტოლებას აკმაყოფილებს შემდეგი მატრიცა:

$$\Omega = e^{-\frac{\gamma_1 \gamma_2 \varphi}{2}}; \quad \Omega^{-1} = e^{\frac{\gamma_1 \gamma_2 \varphi}{2}} \quad (1)$$

ამ ოპერატორის ქვეშ იგულისხმება ექსპონენტის მწკრივად გაშლა:

$$\Omega^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2 \varphi}{2} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2 \varphi}{2} \right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2 \varphi}{2} \right)^{2k+1} \quad (2)$$

რადგან  $(\gamma_1 \gamma_2)^{2k} = (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2)^k = (-1)^k$ ;  $(\gamma_1 \gamma_2)^{2k+1} = (-1)^k \gamma_1 \gamma_2$ , ამიტომ:

$$\Omega^{-1} = \cos \frac{\varphi}{2} + \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2}; \quad \Omega = \cos \frac{\varphi}{2} - \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3)$$

ეს მატრიცები შევიტანოთ წინა ამოცანის (16) განტოლებაში, სადაც  $a_{\mu\nu}$  ელემენტების ნაცვლად ჩავსვათ წინა ამოცანის (7) სიდიდეები, გვექნება:

$$\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi = \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \gamma_1 \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad (4)$$

$$\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_2 \cos \varphi = \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \gamma_2 \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5)$$

$$\gamma_3 = \Omega \gamma_3 \Omega^{-1} \quad (6)$$

$$\gamma_4 = \Omega \gamma_4 \Omega^{-1} \quad (7)$$

(6) და (7) ტოლობების სამართლიანობა აშკარაა, რამდენადაც  $\Omega$  კომუტირებს  $\gamma_3$  და  $\gamma_4$  მატრიცასთან. შევამოწმოთ (4)-ის სამართლიანობა. მისი მარჯვენა მხარე იქნება:

$$\gamma_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \gamma_2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \gamma_2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \gamma_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi \quad (8)$$

რომელიც ემთხვევა (4) გამოსახულების მარცხენა მხარეს. ასევე მარტივად შემოწმდება (5) ტოლობაც.

ამგვარად, (1) მატრიცა  $x_1 0 x_2$  სიბრტყეში მობრუნებისას მართლაც აკმაყოფილებს წინა ამოცანის (16) განტოლებას. აღვნიშნოთ, რომ  $\Omega$  მატრიცის ერმიტულად შეუღლებული ტოლია:

$$\Omega^+ = \cos \frac{\varphi}{2} - \gamma_2 \gamma_1 \sin \frac{\varphi}{2} = \Omega^{-1} \quad (9)$$

ე.ი.  $\Omega(\varphi)$  წარმოადგენს უნიტარულ მატრიცას.

სრულიად ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ  $x_1 0 x_3$  და  $x_2 0 x_3$  სიბრტყეებში მობრუნებისას  $\Omega$  მატრიცებს, შესაბამისად, ექნებათ ასეთი სახე:

$$\Omega = e^{\frac{\gamma_1 \gamma_3 \varphi}{2}}; \quad \Omega^{-1} = e^{-\frac{\gamma_2 \gamma_3 \varphi}{2}} \quad (10)$$

4.107. ლორენცის გარდაქმნებისას, 4.104 ამოცანის (5) გარდაქმნის მატრიცის თანახმად, 4.105 ამოცანის (16) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\gamma_1 \cos \theta - \gamma_4 \sin \theta = \Omega^{-1} \gamma_1 \Omega \quad (1)$$

$$\gamma_2 = \Omega^{-1} \gamma_2 \Omega \quad (2)$$

$$\gamma_3 = \Omega^{-1} \gamma_3 \Omega \quad (3)$$

$$\gamma_1 \sin \theta + \gamma_4 \cos \theta = \Omega^{-1} \gamma_4 \Omega \quad (4)$$

როგორც ვხედავთ,  $\Omega$  კომუტირებს  $\gamma_2$  და  $\gamma_3$  მატრიცასთან. რადგან ლორენცის გარდაქმნები შეესაბამება წარმოსახვით  $\theta$  კუთხეზე მობრუნებას, ამიტომ წინა ამოცანის ანალოგიით შეიძლება დავწეროთ:

$$\Omega = e^{\frac{\gamma_1 \gamma_4 \theta}{2}}; \quad \Omega^{-1} = e^{-\frac{\gamma_1 \gamma_4 \theta}{2}} \quad (5)$$

და, რადგანაც  $\gamma_1 \gamma_4$  ნამრავლსაც  $i$  მამრავლის თვისებები აქვს, გვექნება:

$$\Omega = \cos \frac{\theta}{2} - \gamma_1 \gamma_4 \sin \frac{\theta}{2}; \quad \Omega^{-1} = \cos \frac{\theta}{2} + \gamma_1 \gamma_4 \sin \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

ამ მატრიცების გამოყენებით ადვილად შევამოწმებთ, რომ (1)-(4) ფორმულები დაცულია. რადგან  $\theta^+ = \theta$ , ამიტომ:

$$\Omega^+(\theta) = \Omega(\theta); \quad [\Omega^{-1}(\theta)]^+ = \Omega^{-1}(\theta) \quad (7)$$

ანუ  $\Omega(\theta)$  მატრიცა ერმიტულია.

4.108. ინვერსიისას, 4.104 ამოცანის (8) გარდაქმნის მატრიცის თანახმად, 4.104 ამოცანის (16) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Omega \gamma_k + \gamma_k \Omega = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1)$$

$$\Omega \gamma_4 = \gamma_4 \Omega \quad (2)$$

მაშასადამე,  $\Omega$  მატრიცა კომუტირებს  $\gamma_4$ -თან, დანარჩენ  $\vec{\gamma}$  მატრიცასთან კი – ანტიკომუტირებს. ამიტომ,  $\Omega$  მატრიცა შეგვიძლია ასეთი სახით ავირჩიოთ:

$$\Omega = \Omega^{-1} = c \gamma_4 \quad (3)$$

4.109. ზემოთ განხილული ნრფივი გარდაქმნების დროს იცვლება დირაკის ბისპინორიც. ამიტომ, დამატებით საჭიროა დამტკიცდეს, რომ ტალღური ფუნქციით განმარტებულ ფიზიკურ სიდიდეებს კოორდინატთა გარდაქმნისას ექნებათ ტრანსფორმაციის შესაბამისი თვისებები. კერძოდ, ვექტორს და სკალარს უნდა ჰქონდეთ ვექტორისა და სკალარისათვის დამახასიათებელი გარდაქმნის თვისება და ა.შ. ამისათვის საკმარისი იქნება ვაჩვენოთ, რომ დენის ვექტორი  $\vec{J}$  და  $ic\rho$  სიდი-

დე, სადაც  $\rho$  ალბათობის სიმკვრივეა, გარდაიქმნებიან, როგორც კოორდინატები, ე.ი. ადგენენ ოთხვექტორს.

როგორც ვიცით, დენის ოთხვექტორი ასე განიმარტება:

$$J_\mu = ic\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (1)$$

(4.105) ამოცანის (13) ფორმულის თანახმად:

$$\psi = \Omega^{-1}\psi' \quad (2)$$

ხოლო:

$$\psi^+ = \psi'^+(\Omega^{-1})^+ \quad (3)$$

საჭიროა ვიპოვოთ  $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_4$ . ამიტომ (3) ტოლობის მარჯვნიდან  $\gamma_4$ -ზე გამრავლებით, გვექნება:

$$\bar{\psi} = \psi'^+(\Omega^{-1})^+\gamma_4 = \psi'^+\gamma_4^2(\Omega^{-1})^+\gamma_4 \quad (4)$$

საიდანაც:

$$\psi = \bar{\psi}'\gamma_4(\Omega^{-1})^+\gamma_4 \quad (5)$$

ადვილად დავამტკიცებთ, რომ:

$$\gamma_4(\Omega^{-1})^+\gamma_4 = \Omega \quad (6)$$

მართლაც, ნამდვილი მობრუნების დროს  $\Omega$  უნიტარულია, ამიტომ  $(\Omega^{-1})^+ = \Omega$ ; გარდა ამისა, ნამდვილი მობრუნების შესაბამისი  $\Omega$  მატრიცა კომუტირებს  $\gamma_4$ -თან; შესაბამისად, (6)-ის სამართლიანობა ამ შემთხვევაშიც დამტკიცებულია. წარმოსახვით კუთხეზე მობრუნებისას  $\Omega^+ = \Omega$ , ამიტომ  $(\Omega^{-1})^+ = \Omega^{-1}$  და:

$$\gamma_4\Omega^{-1}\gamma_4 = \gamma_4\left(\cos\frac{\theta}{2} + \gamma_1\gamma_4\sin\frac{\theta}{2}\right)\gamma_4 = \cos\frac{\theta}{2} - \gamma_1\gamma_4\sin\frac{\theta}{2} = \Omega \quad (7)$$

დაბოლოს, არეკვლისას,  $\Omega = \gamma_4$ , ამიტომ  $\Omega^{-1} = \gamma_4$  და  $(\Omega^{-1})^+ = \gamma_4$ . ამგვარად, (6) ფორმულის სამართლიანობა ზოგად შემთხვევაში დამტკიცებულია.

$\bar{\psi}$  ფუნქციისათვის საბოლოოდ გვაქვს გარდაქმნის კანონი:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}'\Omega \quad (8)$$

დენის ვექტორი სათანადოდ გარდაიქმნება მოცემული ფორმულით:

$$J_\mu = ic\bar{\psi}'\Omega\gamma_\mu\Omega^{-1}\psi' \quad (9)$$

თუ 4.105 ამოცანის (15) ფორმულას გავამრავლებთ  $a_{\nu\mu}$  კოეფიციენტზე, ავჯამავთ  $\nu$ -თი და გავითვალისწინებთ  $a_{\nu\mu}$  კოეფიციენტების ორთონორმირების პირობას, მივიღებთ:

$$\Omega\gamma_\mu\Omega^{-1} = a_{\nu\mu}\gamma_\nu \quad (10)$$

ამ გამოსახულების (9)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$J_\mu = a_{\nu\mu} (ic\bar{\psi}'\gamma_\nu\psi') = a_{\nu\mu} J'_\nu \quad (11)$$

რაც წარმოადგენს ოთხვექტორის გარდაქმნის კანონს. ამგვარად დავამტკიცეთ, – ლორენცის ზოგადი გარდაქმნებისას ტალღური ფუნქცია ისე იცვლება, რომ მისი საშუალებით განმარტებულ ფიზიკურ სიდიდეებს ტრანსფორმაციის სწორი თვისებები გააჩნიათ.

4.110. ზემოთ განხილულ ამოცანებში დავადგინეთ, რომ ლორენცის ზოგადი გარდაქმნებისას გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}'\Omega; \quad \psi = \Omega^{-1}\psi' \quad (1)$$

$$\Omega\gamma_\mu\Omega^{-1} = a_{\nu\mu}\gamma_\nu \quad (2)$$

ა) ვაჩვენოთ, რომ  $A_0 = \bar{\psi}\psi$  სკალარია, გვექნება:

$$A_0 = \bar{\psi}\psi = \bar{\psi}'\Omega\Omega^{-1}\psi' = \bar{\psi}'\psi' = A'_0 \quad (3)$$

ამგვარად,  $A_0$  მართლაც სკალარი ყოფილა და თანაც ნამდვილი სკალარი, რადგანაც კოორდინატთა ღერძების ინვერსიისას ნიშანს არ იცვლის.

ბ) განვიხილოთ  $A_0^{\text{ps}} = \bar{\psi}\gamma_5\psi$  სიდიდე. რადგან  $\gamma_5$  კომუტირებს  $\gamma_\mu\gamma_\nu$  ნამრავლთან, ამიტომ იგი კომუტირებს  $\Omega$  და  $\Omega^{-1}$  მატრიცებთანაც, რის გამოც გვექნება:

$$A_0^{\text{ps}} = \bar{\psi}\gamma_5\psi = \bar{\psi}'\Omega\gamma_5\Omega^{-1}\psi' = \bar{\psi}'\gamma_5\psi' = A_0^{\text{ps}'} \quad (4)$$

ე.ი. ეს სიდიდე სკალარია სისტემის მობრუნების მიმართ. რაც შეეხება ინვერსიას, რადგანაც ინვერსიის დროს  $\Omega = \gamma_4$ , ამიტომ:

$$A_0^{\text{ps}} = \bar{\psi}'\gamma_4\gamma_5\gamma_4\psi' = -A_0^{\text{ps}} \quad (5)$$

ე.ი.  $A_0^{\text{ps}} = \bar{\psi}\gamma_5\psi$  ფსევდოსკალარია.

4.111. ა) ვაჩვენოთ, რომ  $A_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  ოთხვექტორია. წინა ამოცანის (2) ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$A_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = i\bar{\psi}'\Omega\gamma_\mu\Omega^{-1}\psi' = i\bar{\psi}'a_{\nu\mu}\gamma_\nu\psi' = a_{\nu\mu}(i\bar{\psi}'\gamma_\nu\psi') = a_{\nu\mu}A'_\nu \quad (1)$$

რაც ოთხვექტორის გარდაქმნის კანონია.

ბ) რადგან  $A_\mu^{\text{ps}} = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$  სიდიდე  $A_\mu$  ოთხვექტორისაგან  $\gamma_5$  მამრავლით განსხვავდება, ამიტომ ის ფსევდოვექტორი იქნება.

გ) ვაჩვენოთ, რომ  $A_{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$  მეორე რანგის ტენზორია. მართლაც, კვლავ, წინა ამოცანის (2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$A_{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi = i\bar{\psi}'\Omega\gamma_\mu\Omega^{-1}\Omega\gamma_\nu\Omega^{-1}\psi' = a_{\rho\mu}a_{\rho\nu}(i\bar{\psi}'\gamma_\rho\gamma_\sigma\psi') = a_{\rho\mu}a_{\rho\nu}A'_{\rho\sigma} \quad (2)$$

რაც მეორე რანგის ტენზორის გარდაქმნის კანონს წარმოადგენს.

4.116. ვთქვათ, მოძრაობა ხდება  $Z$  ლერძის გასწვრივ, მაშინ ჰამილტონიანს ექნება სახე:

$$\hat{H} = c\alpha_3\hat{p}_z + \alpha_4 mc^2 \quad (1)$$

რომელიც, იმის გამო, რომ  $\alpha_3 = \rho_1\sigma_3$  და  $\alpha_4 = \rho_3$ , კომუტირებს  $\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$  ოპერატორთან. ცხადია, რომ  $\vec{l}^2, l_z$  და  $\vec{s}^2$ -იც კომუტირებენ ჰამილტონიანთან. ამიტომ, მოძრაობის ამ კერძო შემთხვევაში ინახება როგორც ორბიტალური, ისე სპინური მომენტი.

4.117. შემფოთების თეორიის პირველ მიახლოებაში გვექნება:

$$\Delta E = 4\pi \int_0^\infty R_{nl}(r) \hat{H} R_{nl}(r) r^2 dr = -\frac{\pi\hbar^2 e^2 Z}{m^2 c^2} \int_0^\infty R_{nl}(r) \frac{1}{r^2} \frac{dR_{nl}}{dr} r^2 dr \quad (1)$$

ანუ:

$$\Delta E = -\frac{\pi\hbar^2 e^2 Z}{2m^2 c^2} \int_0^\infty \frac{dR_{nl}^2}{dr} r^2 dr = -\frac{\pi\hbar^2 e^2 Z}{2m^2 c^2} [R_{nl}^2(\infty) - R_{nl}^2(0)] \quad (2)$$

მაგრამ, ატომისათვის  $R(\infty) = 0$  და ამიტომ:

$$\Delta E = \frac{Z e^2 \hbar^2}{8m^2 c^2} R_{nl}^2(0) 4\pi \quad (3)$$

როგორც ცნობილია,  $R(0) \neq 0$  მხოლოდ  $s$  ელექტრონებისათვის ( $l=0$ ). მაშასადამე, აღნიშნული წევრი იწვევს მხოლოდ  $s$  დონის მცირედით წანაცვლებას.

მაგალითად, წყალბადისებრი ატომის  $1s$  მდგომარეობისათვის, როცა

$$|\psi_{100}(0)|^2 = \left( \frac{Z^3}{\pi a_0^3} \right) \quad (4)$$

(3) გვაძლევს:

$$\Delta E = Z^4 E_1 a_0^2 \quad (5)$$

სადაც  $E_1 = -13,5$  ევ წყალბადის ატომის  $1s$  დონის ენერგიაა,  $a_0 = \frac{e^2}{\hbar c}$  კი – ზომერფელდის მუდმივა. როგორც ვხედავთ,  $\Delta E$  რიცხობრივად ძალიან მცირე სიდიდეა  $\Delta E = 0,0008Z^4$ . ეს წანაცვლება, რომელიც ექსპერიმენტულად დაკვირვებადია, პაულის თეორიით არ აიხსნება.

4.118.  $(n, j, l)$  მდგომარეობაში სპინორბიტალური ურთიერთქმედების საშუალო მნიშვნელობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\langle H_{LS} \rangle_{njl} = \frac{e^2}{2m^2 c^2} \langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle_{jl} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nl} \quad (1)$$



$J^2 = (L + S)^2 = L^2 + 2\vec{S}\vec{L} + S^2$  თანაფარდობიდან მიიღება:

$$2\langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle_{jl} = \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (2)$$

სადაც  $s = \frac{1}{2}$ . ამიტომ (2)-დან მიიღება:

$$\langle \vec{S} \cdot \vec{L} \rangle_{jl} = \frac{1}{2} \hbar^2 \left[ (j-l)(j+l+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (3)$$

$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nl}$  გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ არარელატივისტურ თეორიაში კარგად ცნობილი:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \left( 1 + \frac{b}{r} \right); \quad b > 0 \quad (4)$$

სავალენტო მოდელის შესაბამისი პოტენციალისათვის ენერჯის ფორმულა:

$$E(\beta) = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2} \frac{1}{(n + \bar{l} - l)^2} \quad (5)$$

სადაც არამთელი  $\bar{l}$  განისაზღვრება განტოლებიდან:

$$\bar{l}(\bar{l} + 1) = l(l+1) - \beta \quad (6)$$

ხოლო:

$$\beta = \frac{2me^2 b}{\hbar^2} \quad (7)$$

(6)-დან ცხადია, რომ  $\frac{d\beta}{d\bar{l}} = -(2\bar{l} + 1)$  და ამიტომ:

$$\frac{dE(\beta)}{d\beta} = \frac{dE(\beta)}{d\bar{l}} \frac{d\bar{l}}{d\beta} = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2} \frac{1}{\left(\bar{l} + \frac{1}{2}\right)(n + \bar{l} - l)^3} \quad (8)$$

(8)-ის საშუალებით შეიძლება გამოვითვალოთ ენერჯია  $\beta$ -ს პირველ რიგში, მიიღება:

$$E(\beta) = E(0) - \frac{e^4 m}{2\hbar^2} \frac{\beta}{\left(l + \frac{1}{2}\right)n^3} + o(\beta^2) \quad (9)$$

თუ  $-\frac{e^2 b}{r^2}$  წევრს განვიხილავთ, როგორც პირველი რიგის შეშფოთებას კულონური პოტენციალისათვის, მაშინ ისევ  $\beta$ -ს გაშლის პირველ რიგში, (5)-დან მივიღებთ:

$$E(\beta) = E(0) - \frac{\hbar^2 \beta}{2me^2} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle + o(\beta^2) \quad (10)$$

რომლის შედარება (9) ფორმულასთან გვაძლევს:

$$a_0^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle_{nl} = \frac{1}{\left( l + \frac{1}{2} \right) n^3} \quad (11)$$

სადაც  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$  ბორის პირველი რადიუსია.

$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle$ -ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ კრამერსის თანაფარდობით წყალბადის ატომისათვის (იხ. ამოცანა 4.23 [11] კრებულში):

$$\frac{s+1}{n^2} \langle r^s \rangle - (2s+1) \langle r^{s-1} \rangle + \frac{1}{4} s [(2l+1)^2 - s^2] \langle r^{s-2} \rangle = 0 \quad (12)$$

თუ (12)-ში ავიღებთ  $s = -1$ , გვექნება:

$$\left\langle \frac{a_0^2}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{l(l+1)} \left\langle \frac{a_0^2}{r^3} \right\rangle_{nl} \quad (13)$$

(11) და (13)-დან კი მიიღება:

$$\left\langle \frac{a_0^2}{r^3} \right\rangle_{nl} = \frac{1}{l \left( l + \frac{1}{2} \right) (l+1) n^3} \quad (14)$$

(1), (3) და (14)-დან გვექნება:

$$\langle H_{LS} \rangle_{njl} = \frac{\alpha^4 mc^2}{4n^3} \frac{(j-l)(j+l+1) - \frac{3}{4}}{l \left( l + \frac{1}{2} \right) (l+1)} \quad (15)$$

(15)-ში  $\frac{(j-l)(j+l+1) - \frac{3}{4}}{l \left( l + \frac{1}{2} \right) (l+1)}$  მამრავლი  $j = l + \frac{1}{2}$ -თვის იძლევა  $\frac{1}{\left( l + \frac{1}{2} \right) \left( j + \frac{1}{2} \right)}$ -ს,

ხოლო

$j = l - \frac{1}{2}$ -თვის  $-\frac{1}{\left( l + \frac{1}{2} \right) \left( j + \frac{1}{2} \right)}$ -ს. ამიტომ, ორივე შემთხვევაში ის შეიძლება

ჩაინეროს, როგორც  $\frac{2(j-l)}{\left( l + \frac{1}{2} \right) \left( j + \frac{1}{2} \right)}$ , რაც გვაძლევს საბოლოო შედეგს:

$$\langle H_{LS} \rangle_{njl} = \frac{\alpha^4 mc^2}{2n^3} \frac{j-l}{\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right)} \quad (16)$$

4.119. წყალბადის ატომისათვის კლასიკურ რელატივისტურ ჰამილტონიანს ასეთი სახე აქვს:

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{e^2}{r} \quad (1)$$

მცირე იმპულსებისათვის (1) თანაფარდობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი მწკრივად შეიძლება გავშალოთ:

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3 c^2} + o(p^6) \quad (2)$$

თუ შევადარებთ (2)-ს არარელატივისტურ ჰამილტონიანს, შეიძლება ნავანაცვლოთ მუდმივი  $mc^2$  უძრაობის ენერგია და ჩავწეროთ:

$$H = H_{Schrodinger} + H_{Einstein} \quad (3)$$

სადაც არარელატივისტური ჰამილტონიანი მოიცემა ფორმულით:

$$H_{Schrodinger} = H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad (4)$$

პირველი რელატივისტური შესწორება კი ასეთია:

$$H_{Einstein} = -\frac{p^4}{8m^3 c^2} = -\frac{1}{2mc^2} \left( H_0 + \frac{e^2}{r} \right)^2 \quad (5)$$

(5) წევრს განვიხილავთ როგორც შეშფოთებას შეუშფოთებელი შრედინგერის წყალბადის ატომის მიმართ, რომლის დონეები მოიცემა ცნობილი ფორმულით

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{n^2} = -\frac{mc^2 \alpha^2}{2n^2} \quad (6)$$

სადაც  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$  ბორის პირველი რადიუსია, ხოლო  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  ნაზი სტრუქტურის მუდმივაა.

შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში  $\{n, l, m\}$  მდგომარეობის შესწორება მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\Delta E_{nlm} = \langle nlm | H_{Einstein} | nlm \rangle = -1/2mc^2 \left\langle nlm \left| \left( H_0 + \frac{e^2}{r} \right) \left( H_0 + \frac{e^2}{r} \right) \right| nlm \right\rangle \quad (7)$$

საიდანაც:

$$\begin{aligned} \Delta E_{nlm} &= -\frac{1}{2mc^2} \langle nlm | E_n^2 + 2e^2 E_n / r + e^4 / r^2 | nlm \rangle = \\ &= -\frac{1}{2mc^2} \left\{ \frac{m^2 c^4 \alpha^4}{4n^4} - \frac{mc^2 e^2 \alpha^2}{n^2} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + e^4 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

წინა ამოცანიდან:

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle_{nl} = \frac{1}{a_0^2 \left( l + \frac{1}{2} \right) n^3} = \frac{m^2 c^4 \alpha^4}{e^4 \left( l + \frac{1}{2} \right) n^3} \quad (9)$$

ცნობილია, რომ არარელატივისტური წყალბადის ატომისათვის:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{a_0 n^2} = \frac{mc^2 \alpha^2}{e^2 n^2} \quad (10)$$

თუ (9) და (10)-ს ჩავსვამთ (8)-ში, მივიღებთ:

$$\Delta E_{nlm} = \langle H_{Einstein} \rangle = \frac{1}{2} \alpha^4 mc^2 \left[ \frac{3}{4n^4} - \frac{1}{n^3 \left( l + \frac{1}{2} \right)} \right] \quad (11)$$

შევნიშნოთ, რომ სპინური კვანტური რიცხვი საერთოდ არ შევიდა (11) გამოსახულებაში.

სპინორბიტალური ურთიერთქმედების წვლილი მოცემულია წინა ამოცანის (16) ფორმულით, რომელიც უფრო მოსახერხებელი სახით ასე ჩაინერება:

$$\langle H_{LS} \rangle_{njl} = \frac{\alpha^4 mc^2}{2n^3} \left[ \frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right] \quad (12)$$

(11) და (12)-ის შეკრებით მიიღება:

$$\langle H_{Einstein} + H_{LS} \rangle_{njl} = \frac{1}{2} \alpha^4 mc^2 \left[ \frac{3}{4n^4} - \frac{1}{n^3 \left( j + \frac{1}{2} \right)} \right] \quad (13)$$

ე.ი., მიუხედავად იმისა, რომ ეინშტეინის და  $LS$  წევრები ცალ-ცალკე ცხადი სახით არიან დამოკიდებული  $l$  ორბიტალურ მომენტზე, მათი ჯამი დამოკიდებულია მხოლოდ  $j$  სრულ ორბიტალურ მომენტზე. ეს ასეც უნდა ყოფილიყო, რადგანაც ლაგრანჟიანის ინვარიანტობიდან მოზრუნებების მიმართ გამომდინარეობს სრული ორბიტალური მომენტის შენახვა და არა ორბიტალური და სპინური კომ-

პონენტების ცალ-ცალკე შენახვა. ორბიტალური და სპინური კომპონენტები ცალ-ცალკე მხოლოდ არარელატივისტურ ზღვარში ინახებიან.

4.120. პოზიტრონიუმის სრული ენერგია მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$E_{tot} = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + \sqrt{p_a^2 c^2 + m_a^2 c^4} - \frac{e^2}{|\vec{q}_e - \vec{q}_a|} \quad (1)$$

სადაც  $\vec{q}_e, \vec{p}_e$  და  $m_e$  ელექტრონის რადიუსვექტორი, იმპულსი და მასაა, ხოლო  $\vec{q}_a, \vec{p}_a$  და  $m_a$  მეორე ნაწილაკის (პოზიტრონის ან ნეიტრონის ატომის შემთხვევაში, პროტონია) რადიუსვექტორი, იმპულსი და მასაა.

თუ (1) გამოსახულებაში გავშლით ფესვებს  $p^4$  რიგამდე, მივიღებთ:

$$E_{tot} = (m_a + m_b)c^2 + \frac{p_e^2}{2m_e} + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{p_e^4}{8m_e^3 c^2} - \frac{p_a^4}{8m_a^3 c^2} - \frac{e^2}{|\vec{q}_e - \vec{q}_a|} \quad (2)$$

შემოვიტანოთ სიმძიმის ცენტრის და ფარდობითი რადიუსვექტორები, სრული და ფარდობითი იმპულსები, სრული მასა და დაყვანილი მასა შემდეგი სტანდარტული ფორმულებით:

$$\vec{Q} = \frac{m_e \vec{q}_e + m_a \vec{q}_a}{m_e + m_a}; \quad \vec{q} = \vec{q}_e - \vec{q}_a \quad (3)$$

$$\vec{P} = \vec{p}_e + \vec{p}_a; \quad \vec{p} = \frac{m_a \vec{p}_e - m_e \vec{p}_a}{m_a + m_b} \quad (4)$$

$$M = m_e + m_b; \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_a} \quad (5)$$

თუ გადავალთ მასათა ცენტრის სისტემაში, ანუ ავიღებთ  $\vec{P} = 0$ , რაც ნიშნავს, რომ  $\vec{p}_e = -\vec{p}_a = \vec{p}$ , (2)-დან გვექნება:

$$E_{tot} = Mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8c^2} \left[ \frac{1}{m_e^3} + \frac{1}{m_a^3} \right] - \frac{e^2}{r} \quad (6)$$

სადაც  $r = |\vec{q}|$ . 4.119 ამოცანის ანალოგიურად, უგულებელვყოთ უძრაობის  $Mc^2$  ენერგია და ჩავწეროთ:

$$H = H_{Schrodinger} + H_{Einstein} \quad (7)$$

$$H_{Schrodinger} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad (8)$$

$$H_{Einstein} = -\frac{p^4}{8c^2} \left[ \frac{1}{m_e^3} + \frac{1}{m_a^3} \right] \quad (9)$$

შრედინგერის არარელატივისტური თეორიის თანახმად, ენერჯიის ფორმულას ასეთი სახე აქვს:

$$E_{\text{Scrodinger}} = -\frac{\alpha^2 mc^2}{2n^2} \quad (10)$$

სადაც  $\alpha$  ნაზი სტრუქტურის მუდმივაა, ხოლო  $n = 1, 2, 3, \dots$  მთავარი კვანტური რიცხვია. წყალბადის ატომისათვის  $m_a = m_p$  პროტონის მასაა და რადგანაც

$$\frac{m_p}{m_e} \approx 1836, \text{ გვექნება: } m = \frac{m_e}{1 + \frac{1}{1836}} \approx 0,9995m_e. \text{ პოზიტრონიუმისათვის } m = \frac{1}{2}m_e,$$

ამიტომ შრედინგერის ენერჯიის დონეები პოზიტრონიუმისათვის დაახლოებით 2-ჯერ უფრო მცირეა, ვიდრე წყალბადის ატომისათვის და, შესაბამისად, ბორის რადიუსი ორჯერ უფრო მეტია, ვიდრე წყალბადის ატომის.

ეინშტეინის წვერი წყალბადის ატომისათვის ასე გამოიყურება:

$$H_{\text{Einstein}} = -\frac{p^4}{8m_e^3 c^2} \quad (11)$$

სადაც უგულებელყოფილია  $m_p^{-3}$  წვერი,  $m_e^{-3}$ -თან შედარებით. 4.119 ამოცანაში შემოვთების თეორიის პირველ რიგში გამოთვლილია შესაბამისი ენერჯიის წანაცვლება:

$$\langle H_{\text{Einstein}} \rangle = \frac{1}{2} \alpha^4 mc^2 \left[ \frac{3}{4n^4} - \frac{1}{n^3 \left( l + \frac{1}{2} \right)} \right] \quad (12)$$

პოზიტრონიუმისათვის  $m_a = m_e = 2m$ , ამიტომ:

$$H_{\text{Einstein}} = -\frac{p^4}{4m_e^3 c^2} = -\frac{p^4}{32m_e^3 c^2} \quad (13)$$

ამ შემთხვევაში ენერჯიის წანაცვლება იქნება:

$$\langle H_{\text{Einstein}} \rangle = \frac{1}{2} \alpha^4 mc^2 \left[ \frac{3}{4n^4} - \frac{1}{n^3 \left( l + \frac{1}{2} \right)} \right] \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \alpha^4 mc^2 \left[ \frac{3}{4n^4} - \frac{1}{n^3 \left( l + \frac{1}{2} \right)} \right] \quad (14)$$

ამრიგად, ეინშტეინის წანაცვლება პოზიტრონიუმისათვის 8-ჯერ უფრო ნაკლებია, წყალბადის ატომთან შედარებით.

4.121. 4.118 ამოცანაში გამოვთვალეთ სპინორბიტალური ურთიერთქმედების ჰამილტონიანის:

$$H_{LS} = \frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r^3} (\vec{S} \cdot \vec{L}) \quad (1)$$

შესაბამისი ენერჯის წანაცვლება:

$$\langle H_{LS} \rangle_{njl} = \frac{\alpha^4 mc^2 (j-l)(j+l+1) - \frac{3}{4}}{4n^3 l \left( l + \frac{1}{2} \right) (l+1)} \quad (2)$$

სადაც  $m$  დაყვანილი მასაა, რომელიც, დაახლოებით, ელექტრონის მასის ტოლია ნეალბადის ატომისათვის. პოზიტრონიუმისათვის  $m = \frac{1}{2} m_e$ .

ზენაზი სტრუქტურა ნეალბადის ატომში წარმოიშობა ელექტრონისა და პროტონის სპინების მაგნიტური ურთიერთქმედების გამო და შესაბამის ჰამილტონიანს ასეთი სახე აქვს:

$$H_{Hpfm} = -\frac{8\pi}{3} (\vec{\mu}_s \cdot \vec{\mu}_p) \delta^3(\vec{r}) = \frac{2\pi}{3} \frac{g g_p e^2}{m m_p c^2} (\vec{S} \cdot \vec{S}_p) \delta^3(\vec{r}) \quad (3)$$

პოზიტრონიუმისათვის  $g_p$  უნდა შევცვალოთ  $g$ -თი, ხოლო  $m_p$ ,  $m$ -ით. ამიტომ, დელტა-ფუნქციასთან მდგომი კოეფიციენტი უფრო დიდია ნეალბადის ატომთან შედარებით შემდეგი ფაქტორით:

$$\frac{m_p}{m_e} \frac{g}{g_p} \approx \frac{1836 \times 2}{5,56} = 660 \quad (4)$$

4.122. თავისუფალი ნაწილაკისათვის დირაკის ჰამილტონიანს ასეთი სახე აქვს:

$$H = c\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc^2 \gamma^0 \quad (1)$$

აქედან ვლბულობთ, რომ:

$$i\hbar \dot{x}^j = [x_j, H] = c\gamma^0 \gamma^k [x^j, p_k] = i\hbar c \gamma^0 \gamma^j \quad (2)$$

ანუ:

$$v_j \equiv \dot{x}^j = c\gamma^0 \gamma^j \quad (3)$$

$\gamma^0 \gamma^j$ ;  $j=1,2,3$  მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობებია  $\pm 1$  და ამიტომ  $v_j$ -ის საკუთარი მნიშვნელობებია  $\pm c$  ანუ:

$$v_x = \pm c; v_y = \pm c; v_z = \pm c \quad (4)$$

მიღებული შედეგი, ერთი შეხედვით, დაუშვებელია, რადგანაც ბუნებაში ჩვენ გვხვდება მხოლოდ ისეთი ელექტრონები, რომელთა სიჩქარე ნაკლებია  $c$ -ზე.

მაგრამ ეს პარადოქსი შეიძლება ავხსნათ ჰაიზენბერგის განუზღვრელობის თანაფარდობით. (4) იძლევა სიჩქარის მნიშვნელობას რომელიმე მოცემულ მომენტში, მაშინ, როცა ექსპერიმენტზე დაკვირვებული სიჩქარე წარმოადგენს სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობას დროის გარკვეულ შუალედში. მყისი სიჩქარის ძალიან ზუსტი გაზომვა მოითხოვს კოორდინატის გაზომვას ორ, ერთმანეთისაგან მცირედ განსხვავებულ მომენტში. ასეთი გაზომვა კი განუზღვრელობის თანაფარდობის ძალით გამოიწვევს იმპულსის მნიშვნელობის გაზომვის შეუძლებლობას; ამ შემთხვევაში იმპულსის მნიშვნელობა აუცილებლად უსასრულოა იქნება. მაგ-

რამ, 
$$p_x = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}}$$
 ფორმულის თანახმად, იმპულსის უსასრულო სიჩქარეს შე-

ესაბამება სიჩქარის სწორედ  $v_x = \pm c$  მნიშვნელობა.

4.123. წინა ამოცანის (3) ფორმულიდან ჩანს, რომ სიჩქარის კომპონენტები არ არიან დამოკიდებული დროზე, მაგრამ, თუ ჰამილტონიანს ჩავწერთ შემდეგი სახით:

$$H = c\vec{\alpha}(t) \cdot \vec{p} + mc^2 \beta(t) \quad (1)$$

სადაც  $\vec{\alpha}(t)$  და  $\beta(t)$  მატრიცები დროზე დამოკიდებული მატრიცებია, რომლებიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებენ:

$$\{\alpha_j(t), \alpha_k(t)\} = 2\delta_{jk} \quad (2)$$

$$\{\alpha_j(t), \beta(t)\} = 0 \quad (3)$$

$$(\beta(t))^2 = 1 \quad (4)$$

მაშინ დირაკის განტოლება თავსებადია კლეინ-გორდონის განტოლებასთან. ავირჩიოთ:

$$\vec{\alpha}(0) = \gamma^0 \vec{\gamma}, \beta(0) = \gamma^0 \quad (5)$$

როგორც თავსებადი საწყისი პირობა, რადგანაც  $\{\gamma^0 \gamma^j, \gamma^0 \gamma^k\} = 2\delta^{jk}$ .

მაშინ, წინა ამოცანის (3) ფორმულის ნაცვლად, გვექნება:

$$\vec{v} = -\frac{i}{\hbar} [\vec{x}, H] = c\vec{\alpha}(t) \quad (6)$$

$\alpha(t)$ -ს დროზე დამოკიდებულება შეიძლება დაფიქსირდეს მოთხოვნიდან, რომ ის იყოს დინამიკური ცვლადი, ანუ:

$$i\hbar \dot{\vec{\alpha}} = [\vec{\alpha}, H] = \{\vec{\alpha}, H\} - 2H\vec{\alpha} = 2\vec{\alpha}H - \{\vec{\alpha}, H\} \quad (7)$$

მაგრამ  $\{\vec{\alpha}, H\}$  ანტიკომუტატორი ადვილი დასათვლელია:

$$\{\alpha_j, H\} = c\{\alpha_j, \alpha_k\} p_k = 2cp_j \quad (8)$$



(8)-ის გათვალისწინება (7) ტოლობაში იძლევა ორ ეკვივალენტურ განტოლებას  $\alpha_j(t)$ -თვის:

$$i\hbar\dot{\alpha}^j + 2H\alpha^j = 2cp_j \quad (9)$$

$$i\hbar\dot{\alpha}^j - 2\alpha^j H = -2cp_j \quad (10)$$

(9) განტოლების ინტეგრება შესაძლებელია, თუ მას გავამრავლებთ მარცხნიდან  $e^{-2i\phi}$  ფაქტორზე და (10) განტოლებას კი – მარჯვნიდან  $e^{2i\phi}$ -ზე, სადაც  $\phi(t) = \frac{Ht}{\hbar}$ .

შედეგად მიიღება:

$$e^{-2i\phi(t)}\alpha^j(t) - \alpha^j(0) = c(e^{-2i\phi(t)} - 1)H^{-1}p_j \quad (11)$$

$$\alpha^j(t)e^{2i\phi(t)} - \alpha^j(0) = cp_j H^{-1}(e^{2i\phi(t)} - 1) \quad (12)$$

(12) განტოლება გავამრავლოთ მარჯვნიდან  $ce^{-2i\phi(t)}$ -ზე და გავითვალისწინოთ (5) სანყისი პირობა, მიიღება:

$$v_j = c\alpha^j(t) = c^2 p_j H^{-1} + c[\gamma^0 \gamma^j - cp_j H^{-1}] e^{-2i\phi(t)} \quad (13)$$

რადგანაც  $H$  და  $p_j$  მუდმივებია, შეგვიძლია ვაინტეგრროთ (13) და მივიღებთ:

$$x^j(t) = x^j(0) + c^2 p_j t H^{-1} + c[\gamma^0 \gamma^j - cp_j H^{-1}] \frac{e^{-2i\phi(t)} - 1}{(-2iH/\hbar)} \quad (14)$$

რაც ამოცანის პირობაში დასამტკიცებელი ტოლობაა, რომელშიც:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2}i\hbar c [c\bar{p}H^{-2} - \gamma^0 \vec{p}H^{-1}] \quad (15)$$

(14) ნიშნავს ელექტრონის „კანკალს“.

$\bar{\xi}$ -ს მატრიცული ელემენტი ქრება, თუ ვიხილავთ მხოლოდ დადებითი ან მხოლოდ უარყოფითი ენერგიის მქონე მდგომარეობებს. ამ ფაქტის დასადაგენად, შევნიშნოთ, რომ:

$$H^2 = \frac{1}{2}[\alpha^j, \alpha^k] p_j p_k + mc^2 [\alpha^j, \beta] p_j + m^2 c^4 \beta^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = E^2 \quad (16)$$

სადაც  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  არის თავისუფალი ნაწილაკის რელატივისტური ენერგია. აშკარაა, რომ:

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{H}{E} \right] \quad (17)$$

პროექციული ოპერატორებია დადებითი და უარყოფითი ენერგიებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\Gamma_{\pm}^2 = \Gamma_{\pm} ; \quad \Gamma_+ \Gamma_- = \Gamma_- \Gamma_+ = 0 \quad (18)$$

განვიხილოთ კომუტატორი:

$$\begin{aligned} [\Gamma_{\pm}, \alpha_k] &= \pm \frac{1}{2E} [H, \alpha_k] = \pm \frac{1}{2E} (\{H, \alpha_k\} - 2\alpha_k H) = \pm \frac{1}{E} (cp_k - \alpha_k H) =: \\ &= \pm \frac{1}{E} (cp_k H^{-1} - \alpha_k) H \end{aligned} \quad (19)$$

(19) თანაფარდობის გამოყენებისას გამოვიყენეთ (8) გამოსახულება და  $H^{-1} = HH^{-2} = HE^{-2}$  ტოლობის გამოყენებით მივიღეთ:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} i\hbar c [c\bar{p}H^{-1} - \bar{\alpha}]H^{-1} = \frac{1}{2} i\hbar c [c\bar{p}H^{-1} - \bar{\alpha}]HE^{-2} = \pm \frac{1}{2E} i\hbar c [\Gamma_{\pm}, \alpha_k] \quad (20)$$

ამიტომ:

$$\Gamma_{\pm} \bar{\xi} \Gamma_{\pm} = \pm \frac{1}{2E} i\hbar c \Gamma_{\pm} [\Gamma_{\pm}, \bar{\alpha}] \Gamma_{\pm} = \pm \frac{1}{2E} i\hbar c (\Gamma_{\pm} \bar{\alpha} \Gamma_{\pm} - \Gamma_{\pm} \bar{\alpha} \Gamma_{\pm}) = 0 \quad (21)$$

სიჩქარის ოპერატორს, რომელიც პროექტირებულია მხოლოდ დადებითი ან უარყოფითი ენერგიების მდგომარეობებზე, არ გააჩნია „კანკალი“, რადგანაც:

$$\Gamma_{\pm} \bar{v} \Gamma_{\pm} = \Gamma_{\pm} c^2 \bar{p} H^{-1} \Gamma_{\pm} = c^2 \bar{p} H^{-1} \Gamma_{\pm} \quad (22)$$

„კანკალი“ უარყოფითი ენერგიების არსებობით აიხსნება. ის გამონვეულია დადებითი და მისი ტოლი უარყოფითი ენერგიის შესაბამისი რხევების ძგერით. როგორც ცნობილია, ძგერის სიხშირე ძგერადი ტალღების სიხშირეთა სხვაობას უდ-

რის, ე.ი. სწორედ  $\omega = \frac{E - (-E)}{\hbar} = \frac{2E}{\hbar}$ .

როგორც (14)-დან ჩანს, სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობა დროის დიდ ინტერვალში ტოლია:

$$\frac{\bar{x}(t) - \bar{x}(0)}{t} = c^2 \bar{p} H^{-1} + \bar{\xi} \frac{1 - e^{-\frac{2i\hbar t}{\hbar}}}{t} \rightarrow c^2 \bar{p} H^{-1} \quad (23)$$

4.124. განვიხილოთ შემდეგი ანზაცი:

$$\alpha^j(t) = e^{i\phi(t)} \alpha^j(0) e^{-i\phi(t)} \quad (1)$$

სადაც  $\phi(t) = \frac{Ht}{\hbar}$ . გავანარმოთ (1) დროის მიხედვით, გვექნება:

$$i\hbar \dot{\alpha}^j(t) = -He^{i\phi(t)} \alpha^j(0) e^{-i\phi(t)} + e^{i\phi(t)} \alpha^j(0) e^{-i\phi(t)} H = [\alpha^j(t), H] \quad (2)$$

რომელიც თანხმობაშია წინა ამოცანის (7) ტოლობასთან. რადგანაც (1) ანზაცი აკმაყოფილებს  $\alpha^j(t) = \gamma^0 \gamma^j$  საწყის პირობას  $t = 0$  მომენტში, ამიტომ (1) ანზაცი კორექტულია. მოსალოდნელი ანტიკომუტატორი უდრის:

$$\{\alpha^j(t), \alpha^k(t)\} = e^{i\phi(t)} \{\gamma^0 \gamma^j, \gamma^0 \gamma^k\} e^{-i\phi(t)} = \delta^{jk} \quad (3)$$

სადაც გამოვიყენეთ წინა ამოცანის (5) ტოლობა.

ანალოგიურად, თუ დავუშვებთ, რომ  $\beta(t)$  მატრიცები დინამიკური ცვლადებია ანუ აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$i\hbar\dot{\beta} = [\beta, H] \quad (4)$$

მაშინ შეგვიძლია შევამონმოთ, რომ:

$$\beta(t) = e^{i\phi(t)} \beta(0) e^{-i\phi(t)} \quad (5)$$

აკმაყოფილებს (4) განტოლებას და ასევე საწყის პირობას  $\beta(t) = \gamma^0$ -ს  $t = 0$  მომენტში.

(1) და (2)-დან კი მივიღებთ:

$$\{\alpha_j(t), \beta(t)\} = e^{i\phi(t)} \{\gamma^0 \gamma^j, \gamma^0\} e^{-i\phi(t)} = 0 \quad (6)$$

$$(\beta(t))^2 = e^{i\phi(t)} (\gamma_0)^2 e^{-i\phi(t)} = 1 \quad (7)$$

სადაც კვლავ გამოვიყენეთ წინა ამოცანის (5) ტოლობა.

## დამატება

### A. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ზოგიერთი თვისება

შემოვიღოთ კომპლექსური ცვლადი  $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$  და ამ ცვლადის რაიმე  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = |f(z)|e^{i\theta}$  ფუნქცია. კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია განიმარტება კომპლექსური სიბრტყის რაიმე  $D$  არეზე. თუ არეს აქვს ერთი შემომსაზღვრელი კონტური (ანუ არეს არ გააჩნია ხვრელები), მაშინ მას მარტივად ბმულ არეს უწოდებენ, ხოლო, როცა არე შემოსაზღვრულია ერთი გარე ჩაკეტილი კონტურით და რამდენიმე შიგა კონტურით, მაშინ მას მრავლად ბმული არე ეწოდება.  $D$  არეს, რომელსაც საზღვარიც ეკუთვნის, ჩაკეტილი ეწოდება და  $\bar{D}$ -თი აღინიშნება.

$f(z)$  ფუნქციას დიფერენცირებადი ეწოდება  $z = z_0$  წერტილში, თუ არსებობს ზღვარი:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (A.1)$$

$z = z_0$  წერტილისათვის და ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული  $\Delta z$ -ის ნულისაკენ მისწრაფების ხასიათზე. ფუნქცია შესაძლოა წარმოებადი იყოს წერტილზე, წირზე ან მთელ არეზე.

$f(z)$  კომპლექსური ცვლადის ფუნქციას ანალიზური ეწოდება, თუ  $D$  არის ყოველ წერტილზე იგი დიფერენცირებადია. ამ თვისების მქონე ფუნქციისათვის ნშირად სხვა სახელწოდებაც გამოიყენება: რეგულარული ან ჰოლომორფული.

წერტილს, სადაც ირღვევა  $f(z)$  ფუნქციის ანალიზურობა, განსაკუთრებულ წერტილს უწოდებენ.  $z = z_0$ -ს ეწოდება  $f(z)$  ფუნქციის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მახლობლობა  $0 < |z - z_0| < R$ , რომელშიც  $f(z)$  ანალიზურია. აქ იგულისხმება ისეთი წერტილები, რომელთა მახლობლობაში  $f(z)$  ცალსახაა.

განიხილება სამი ტიპის იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილი.

1) თუ არსებობს სასრული ზღვარი:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \tag{A.2}$$

მაშინ  $z_0$ -ს ეწოდება აცილებადი განსაკუთრებული წერტილი. მაგალითად,  $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z}$  ფუნქციისათვის  $z = 0$  აცილებადი განსაკუთრებული წერტილია და ამიტომ ასეთი წერტილი არ ითვლება განსაკუთრებულ წერტილად.

2) თუ არსებობს (A.2) ზღვარი და ის უსასრულობის ტოლია, მაშინ  $z = z_0$  განსაკუთრებულ წერტილს პოლუსი ეწოდება. განმარტების თანახმად, პოლუსში,  $|f(z_0)| = \infty$ . პოლუსს ეწოდება  $m$  რიგის პოლუსი, თუ  $(z - z_0)^m f(z)$  ანალიზურია  $z = z_0$  წერტილში ( $(z - z_0)^{m-1} f(z)$  შეიძლება არ იყოს ანალიზური  $z = z_0$  წერტილში). მაგალითად,  $f(z) = (z - 3)^{-6}$  ფუნქციისათვის  $z = 3$  არის  $m = 6$  რიგის პოლუსი.

3) თუ არ არსებობს (A.2) ზღვარი, მაშინ  $z = z_0$ -ს არსებითად განსაკუთრებული წერტილი ეწოდება. ასე მაგალითად,  $f(z) = \cos \frac{1}{z}$  და  $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$  ფუნქციებისათვის  $z = 0$  არსებითად განსაკუთრებული წერტილია.

ფუნქციას ეწოდება მთელი ან ჰოლომორფული, თუ მას საერთოდ არ გააჩნია განსაკუთრებული წერტილები. მტკიცდება, რომ ასეთი ფუნქცია წარმოიდგინება ხარისხოვანი მწკრივით:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{A.3}$$

რომელიც კრებადია მთელ სიბრტყეზე; ადგილი აქვს შებრუნებულ დებულებასაც.

თუ  $f(z)$  ფუნქციას, გარდა პოლუსებისა, სხვა განსაკუთრებულობა არ გააჩნია, მაშინ მას მერომორფულ ფუნქციას უწოდებენ.

ანალიზური ფუნქციებისათვის ადგილი აქვს მეტად მნიშვნელოვან კოშის ინტეგრალურ თეორემას.

### კოშის ინტეგრალური თეორემა

თუ  $f(z)$  ფუნქცია ანალიზურია  $D$  არეში და უწყვეტია  $\bar{D}$ -ში, მაშინ  $f(z)$  ფუნქციიდან აღებული ინტეგრალი ამ არის საზღვარზე, იმ პირობით, რომ კონტურის შემოვლისას  $D$  არე ყოველთვის ერთ მხარეს მდებარეობდეს, ნულის ტოლია:

$$\int_C f(z') dz' = 0 \quad (\text{A.4})$$

### კოშის ინტეგრალური ფორმულა

თუ  $f(z)$  ფუნქცია ანალიზურია  $D$  არეში და უწყვეტია  $\bar{D}$ -ში, მაშინ ადგილი აქვს კოშის ინტეგრალურ ფორმულას:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{z' - z} \quad (\text{A.5})$$

სადაც  $C$ -კონტური წარმოადგენს  $D$  არის საზღვარს; ამასთან, კონტურის შემოვლა ხდება ისე, რომ არე რჩებოდეს ყოველთვის მარცხნივ.  $z$  კი არის შიგნით მოთავსებული წერტილი.  $D$  არე შეიძლება შეიცავდეს ჭრილებსაც, ე.ი. მრავლად ბმული იყოს. კოშის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ  $f(z)$  ფუნქციის მნიშვნელობა  $D$  არის ნებისმიერ წერტილში, როდესაც ცნობილია  $f(z)$ -ის მნიშვნელობა საზღვარზე. კერძო შემთხვევაში (A.5) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\int_C \frac{dz'}{z' - z} = 2\pi i \quad (\text{A.6})$$

აქვე მოვიყვანოთ კოშის ფორმულა  $f(z)$  ფუნქციის წარმოებულებისათვის, რომელიც დიდ როლს ასრულებს ფიზიკის სხვადასხვა ამოცანაში. თუ  $f(z)$  ანალიზურია  $D$  არეში და უწყვეტია  $\bar{D}$ -ში, მაშინ მას  $D$  არის ყველა წერტილში აქვს ნებისმიერი რიგის წარმოებულები, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z)^{n+1}} \quad (\text{A.7})$$

სადაც  $C$  კვლავ  $D$  არის საზღვარია.

### ტილორის მწკრივად გაშლა

თუ  $f(z)$  ფუნქცია ანალიზურია  $R$ -რადიუსიან  $C_R$  წრეში, რომლის ცენტრი მოთავსებულია  $z = b$  წერტილში, მაშინ არსებობს  $(z - b)$ -ს ხარისხების ერთადერთი მწკრივი, რომელიც თანაბრად კრებადია  $f(z)$ -საკენ, როცა  $|z - b| \leq R' < R$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b)^n \quad (\text{A.8})$$

სადაც:

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(b)}{dz^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'}} \frac{f(z') dz'}{(z' - b)^{n+1}} \quad (\text{A.9})$$

ხოლო  $C_{R'}$ -არის  $R' = |z - b|$ -რადიუსიანი წრე.

(A.8)-ს უწოდებენ ტილორის მწკრივს. უდიდესი წრე  $C_{R_c}$  ( $|z - b| \leq R_c$ ), რომლის ყველა შიგა წერტილი მოთავსებულია  $f(z)$ -ის ანალიზურობის არეში, წარმოადგენს (A.8) ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის წრეს, ხოლო  $R_c$ -ს კრებადობის რადიუსი ეწოდება.

### ლორანის მწკრივად გაშლა

თუ  $f(z)$  ფუნქცია ანალიზურია ორ კონცენტრულ  $- C_{R_1}$  და  $C_{R_2}$  წრეს შორის არეში ( $R_2 < R_1$ ) ცენტრებით  $z = b$  წერტილში ( $b \neq \infty$ ), მაშინ არსებობს ერთადერთი მწკრივად გაშლა  $(z - b)$ -ს დადებითი და უარყოფითი ხარისხების მიხედვით:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n (z - b)^{-n}; \quad R_2 < |z - b| < R_1 \quad (\text{A.10})$$

სადაც:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(z') dz'}{(z' - b)^{n+1}} \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{a}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_2}} \frac{f(z') dz'}{(z' - b)^{1-n}} \quad (\text{A.12})$$

$C_{R_1}$  კონტური არის  $|z - b| = R_1 < R_1$  წრე, ხოლო  $C_{R_2}$ ,  $|z - b| = R_2 > R_2$  წრეა. (A.10)-ის პირველი ჯამი თანაბრად კრებადია  $|z - b| \leq R_1'$ -სათვის და ანალიზურია  $C_{R_1}$ -ის შიგნით; მეორე ჯამი თანაბრად კრებადია  $|z - b| \geq R_2'$ -სათვის და ანალიზურია  $C_{R_2}$ -ის გარეთ.

(A.10) მწკრივი შეიძლება ასეც ჩაინეროს:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \alpha_n (z-b)^n \quad (\text{A.13})$$

სადაც:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{(z'-b)^{n+1}} \quad (\text{A.14})$$

$C$  კონტური წარმოადგენს  $C_{R_1}$  და  $C_{R_2}$ -ს შორის მოთავსებულ ნებისმიერ წრეწირს.

$z$  წერტილებს, რომლებზეც  $f(z) = 0$ -ს, უწოდებენ  $f(z)$ -ის ნულებს ან ფესვებს. ანალიზურ  $f(z)$  ფუნქციას  $z = b$  წერტილზე ექნება  $m$  რიგის ფესვი ( $m$  მთელი დადებითი რიცხვია), თუ  $z = b$  წერტილში  $f(z)$ -ის ტეილორის მწკრივად გაშლაში პირველი  $m$  კოეფიციენტი  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$  ნულის ტოლია, ხოლო  $a_m \neq 0$ ; ამასთან,  $(z-b)^{-m} f(z)$  იქნება ანალიზური და ნულისაგან განსხვავებული  $z = b$  წერტილზე.

### თეორემა ნაშთის შესახებ

თუ  $z = b$  წერტილზე  $f(z)$  ფუნქცია ან ანალიზურია, ან იზოლირებული განსაკუთრებულობა გააჩნია, მაშინ  $f(z)$ -ის ნაშთი  $b$  წერტილში  $-\text{Res } f(z)$  ეწოდება ლორანის გაშლაში  $(z-b)^{-1}$  წევრის კოეფიციენტს, ანუ:

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z') dz' \quad (\text{A.15})$$

სადაც  $C$  კონტურია, რომელიც გარს ერტყმის  $b$  წერტილს და არ შეიცავს  $f(z)$ -ის არავითარ განსაკუთრებულობას,  $z = b$ -საგან განსხვავებულს.

თუ  $f(z)$  ანალიზურია ანდა აქვს აცილებადი განსაკუთრებულობა  $z = b \neq \infty$ -ზე, მაშინ  $\text{Res } f(b) = 0$ .

თუ  $z = b \neq \infty$  არის  $m$  რანგის პოლუსი, მაშინ:

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-b)^m f(z)] \quad (\text{A.16})$$

კერძო შემთხვევაში, როცა  $z = b$  მარტივი პოლუსია, ხოლო  $f(z) = \frac{F(z)}{\Phi(z)}$ , სადაც

$F(z)$  და  $\Phi(z)$  ანალიზური ფუნქციებია  $z = b$  წერტილში და  $F(b) \neq 0$ , მაშინ  $\Phi'(b) \neq 0$  და

$$\operatorname{Res} f(b) = \frac{F(b)}{\Phi'(b)} \quad (\text{A.17})$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:  $f(z)$  ფუნქციის ნულეებში და პოლუსებში, მის  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  ლოგარითმულ წარმოებულს პირველი რიგის პოლუსები გააჩნია და ფუნქციის ლოგარითმული ნაშთი ნულში ფესვის რიგის ტოლია, ხოლო პოლუსში, პოლუსის რიგისაა შებრუნებული ნიშნით.

თუ  $f(z)$  ფუნქცია უწყვეტია  $D$  არის  $C$ -საზღვარზე (საზღვარზე უწყვეტობა იგულისხმება იმ აზრით, რომ საზღვრის ნებისმიერი  $z_0$  წერტილისათვის არსებობს  $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} f(z) = f(z_0)$ ) და ამ არის შიგნით, გარდა სასრული რაოდენობის განსაკუთრებული  $b_1, b_2, \dots, b_n$  წერტილებისა, ანალიზურია, მაშინ:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k) \quad (\text{A.18})$$

ეს ფორმულა დიდად გამოიყენება განსაზღვრული ინტეგრალების გამოთვლისას.

ნამდვილი განსაზღვრული ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კონტურზე კომპლექსური ცვლადის ფუნქციიდან აღებული ინტეგრალის ნაწილი იმ პირობით, რომ კონტური შეიცავს ნამდვილი ღერძის  $(a, b)$  ინტერ-

ვალს. ზოგიერთი  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  ტიპის ინტეგრალის ნაშთთა თეორიით გამოთვლის

დროს უნდა გამოვიყენოთ  $C$ -კონტური, რომელიც შედგება ნამდვილი ღერძის  $(-R, R)$  ინტერვალისა და ზედა ნახევარსიბრტყეში  $C_R$  ნახევარწრისაგან. შემდეგი ლემა საშუალებას გვაძლევს აღნიშნულ ნახევარწრეზე აღებული ინტეგრალები უგულვებელყოთ ამ წრის რადიუსის უსასრულობისაკენ მისწრაფებისას.

### პირველი ლემა

ამ ლემის თანახმად:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z') dz' = 0 \quad (\text{A.19})$$

თუ ინტეგრალი არსებობს ყოველი სასრული  $R$ -სათვის და  $zf(z)$  თანაბრად მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა  $|z| \rightarrow \infty, y \geq 0$ .



## მეორე ლემა (ჟორდანის ლემა)

თუ  $\chi(z)$  ანალიზურია ზედა ნახევარსიბრტყეში, შესაძლო სასრული რაოდენობის პოლუსების გამოკლებით და თანაბრად მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა  $|z| \rightarrow \infty$   $y \geq 0$ -სათვის, მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი დადებითი  $k$  რიცხვისათვის:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z') dz' = 0 \quad (\text{A.20})$$

## განშტოების წერტილები

დავუშვათ,  $f(z)$  ფუნქცია ისეთია, რომ მას  $D$  არის სხვადასხვა ქვეარეში ე.წ.  $f_1(z), f_2(z), \dots$  შტოები გააჩნია და საკუთარი განმარტების არეში ყოველი შტო ლებულობს  $f(z)$  ფუნქციის რაიმე მნიშვნელობების სიმრავლეს. ანალიზურ ფუნქციათა თეორია გარკვეული აზრით შეიძლება გავავრცელოთ ასეთ მრავალსახა ფუნქციაზეც.

ვთქვათ,  $f(z)$  ფუნქციას აქვს რამდენიმე შტო, რომლებიც ანალიზურია  $z = a$  წერტილის მახლობლობაში, გარდა, შესაძლოა, თვით  $a$  წერტილისა. როცა  $z$  ცვლადი  $z = a$  წერტილის ირგვლივ აღწერს ჩაკეტილ წირს, თუ  $f(z)$  ფუნქცია თავისი ერთი შტოდან მეორეზე გადადის, მაშინ  $z = a$  წერტილს განშტოების წერტილი ეწოდება. თუ ამ ჩაკეტილი წირის ერთი და იმავე მიმართულებით  $(n+1)$ -ჯერადი შემოვლით კვლავ (პირველად!) დავუბრუნდებით პირველდანყებით შტოს, მაშინ  $n$ -ს უწოდებენ განშტოების წერტილის რიგს. თუ  $z = a$  წერტილზე განსაზღვრულია  $f(z)$ , მაშინ  $f(a)$  საერთოა ყველა შტოსათვის.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,  $f(z) = \sqrt{z}$ ; რადგან  $z = |z|e^{i\varphi}$ , ამიტომ  $f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ .  $z = 0$  წერტილის ჩაკეტილ წრეზე ორჯერ შემოვლით არგუმენტი მიიღებს  $4\pi$  ნაზრდს და  $f(z)$  ფუნქცია სანყის მნიშვნელობას დაუბრუნდება. ამიტომ  $z = 0$  პირველი რიგის განშტოების წერტილია.

როცა  $z = a$  წერტილის ირგვლივ ერთი და იმავე მიმართულებით ყოველი შემოვლისას ახალ შტოებს ვღებულობთ, მაშინ განშტოების წერტილს უსასრულო რიგის ან ლოგარითმული განშტოების წერტილი ეწოდება. ასეთი უსასრულო რიგის განშტოების წერტილი აქვს, მაგალითად,  $f(z) = \ln z$  ფუნქციას. რადგან  $\ln z = \ln|z| + i\varphi$ , ამიტომ  $z = 0$  წერტილის ყოველი შემოვლისას  $f(z)$  ლებულობს  $2\pi$  ნაზრდს და არასოდეს უბრუნდება სანყის მნიშვნელობას.

$f(z)$  ფუნქციის ცალკეული ცალსახა შტოები განისაზღვრება არეებში, რომლებიც შემოსაზღვრულია ჭრილებით. მაგალითად,  $f(z) = \sqrt{z}$  ფუნქციის ჭრილი

შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი მარტივი წირის გასწვრივ, რომელიც აერთებს  $z = 0$  და  $z = +\infty$  წერტილებს.

სწორად ხელსაყრელია მრავალსახა (შტოებიანი) ფუნქციის წარმოდგენა ცალსახა ფუნქციის სახით, რომელიც განსაზღვრულია რიმანის ზედაპირზე. რიმანის ზედაპირი შედგება  $z$ -სიბრტყეების ან, როგორც ამბობენ, ფურცლების გარკვეული რაოდენობისაგან, რომლებიც შეესაბამებიან  $f(z)$  ფუნქციის შტოებს და შეერთებული არიან ერთმანეთთან გარკვეული წესით შერჩეული ჭრილების გასწვრივ.

### ანალიზური გაგრძელება

დავუშვათ, გვაქვს ორი  $- D_1$  და  $D_2$  არე, რომელთაც არა აქვთ საერთო წერტილები, მაგრამ გააჩნიათ საზღვრის  $\gamma$  საერთო ნაწილი. ვთქვათ, ამ არეებში განსაზღვრულია  $f_1(z)$  და  $f_2(z)$  ანალიზური ფუნქციები. ამბობენ, რომ  $f_2(z)$  ფუნქცია წარმოადგენს  $f_1(z)$ -ის უშუალო გაგრძელებას  $D_2$  არეში. თუ არსებობს ისეთი  $f(z)$  ფუნქცია, რომელიც ანალიზურია  $D_1 + \gamma + D_2$ -ში,  $D_1$ -ის ყველა წერტილში ემთხვევა  $f_1(z)$ -ს,  $D_2$ -ის ყველა წერტილში კი  $- f_2(z)$ -ს, ე.ი.:

$$f(z) = f_1(z) \quad D_1\text{-ში} \quad (\text{A.21})$$

$$f(z) = f_2(z) \quad D_2\text{-ში} \quad (\text{A.22})$$

ანალიზური გაგრძელებისათვის საკმარისია ერთი პირობა.

დავუშვათ, მოცემულია ორი ისეთი მარტივად ბმული  $D_1$  და  $D_2$  არე, რომელთაც საერთო წერტილები არ გააჩნიათ, მაგრამ მათ საზღვრებს აქვთ საერთო  $\gamma$  მონაკვეთი. ვთქვათ, ამ არეებში, შესაბამისად, განსაზღვრულია  $f_1(z)$  და  $f_2(z)$  ანალიზური ფუნქციები. თუ, გარდა ამისა, ეს ფუნქციები უწყვეტია  $D_1 + \gamma$  და  $D_2 + \gamma$ -ზე, ხოლო  $\gamma$  მონაკვეთის ყველა წერტილში ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ  $f_2(z)$  ფუნქცია წარმოადგენს  $f_1(z)$  ფუნქციის უშუალო გაგრძელებას  $D_2$  არეში.  $f_1(z)$  და  $f_2(z)$  შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ერთიანი  $f(z)$  ანალიზური ფუნქცია, განმარტებული ყველგან  $D_1 + \gamma + D_2$  არეში.

დავუშვათ,  $f(z)$  ანალიზურია  $D$  არეში, რომლის საზღვარი შეიცავს ნამდვილი ღერძის  $\gamma$  მონაკვეთს. თუ  $f(z)$  უწყვეტია  $D + \gamma$ -ზე და  $\gamma$ -ზე იღებს ნამდვილ მნიშვნელობებს, მაშინ  $\tilde{f}(z)$  ფუნქცია, რომელიც განმარტებულია  $D$  არის ნამდვილი ღერძის სიმეტრიულ  $\tilde{D}$  არეში, ტოლობით:

$$\tilde{f}(z^*) = f^*(z) \quad (\text{A.23})$$

წარმოადგენს  $f(z)$ -ის ანალიზურ გაგრძელებას  $\tilde{D}$  არეში. ეს თეორემა გამოხატავს ე.წ. სიმეტრიის პრინციპის შინაარსს.

## B. ინტეგრალები და ინტეგრალური თანაფარდობები

$$1. \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk; \delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (\text{B.1})$$

ანალოგიური თანაფარდობაა სამართლიანი  $n$ -განზომილებიან სივრცეშიც.

$$2. \int_a^b \frac{F(x)dx}{x-x_0 \mp i\varepsilon} = \int_a^b \frac{F(x)dx}{x-x_0} \pm i\pi F(x_0) \quad (\text{B.2})$$

სადაც  $a < x_0 < b$ , ხოლო  $\varepsilon > 0$  უსასრულოდ მცირე სიდიდეა;  $\int_a^b \frac{F(x)dx}{x-x_0}$  ინტეგ-

რალი კი აიღება მთავარი მნიშვნელობით.

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{k^2 - \lambda^2 \pm i\varepsilon} = \mp i \frac{\pi}{\lambda} e^{\mp i\lambda|x|}; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{k^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\lambda|x|} \quad (\text{B.3})$$

სადაც  $x$  და  $\lambda > 0$  ნამდვილი სიდიდეებია, ხოლო  $\varepsilon > 0$  უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. ინტეგრალები გამოითვლება ნაშთთა თეორიის გამოყენებით. ამასთან,  $x > 0$ -თვის ინტეგრების კონტური მოთავსებულია  $k$  კომპლექსური სიდიდის ზედა ნახევარსიბრტყეში, ხოლო  $x < 0$ -თვის, შესაბამისად, ქვედა ნახევარსიბრტყეში.

$$4. \int \frac{1}{r} e^{ikr - \lambda r} d^3r = \frac{4\pi}{k^2 + \lambda^2}; \operatorname{Re} \lambda > 0 \quad (\text{B.4})$$

ინტეგრალი ( $\lambda = 0$ -თვის ეს ინტეგრალი იძლევა კულონური პოტენციალის ფურცელური კომპონენტას) გამოითვლება სფერულ კოორდინატებში  $\vec{k}$  ვექტორის გასწვრივ პოლარული ღერძის მიმართვით.

$$5. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} \quad (\text{B.5})$$

$$6. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} \quad (\text{B.6})$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{\pi(2n-1)!!}{2^n n! a^{2n+1}}, \quad a > 0 \quad (\text{B.7})$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{2n+1}}; \quad a > 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.8})$$

$$9. \int_a^b \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(x-b)} dx = \frac{\pi}{2} (a+b - 2\sqrt{ab}); \quad 0 < a < b \quad (\text{B.9})$$

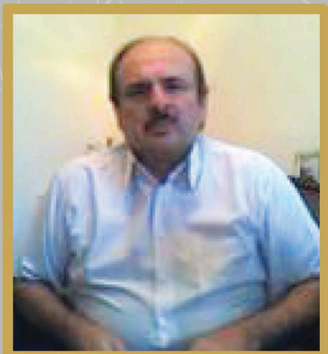
$$10. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.10})$$

## ლიტერატურა

1. Y.K. Lim. "Problems and Solutions on Quantum Mechanics". Word Scientific. (2005).
2. D.Atkinson, M.N.Hounkonnou. "Quantum Mechanics". A self-Contained Course. Volume 1. Rinton Press (USA).(2001).
3. D.Atkinson, M.N.Hounkonnou, P.W.Johnson. "Exercises in Quantum Mechanics". Volume 3. Rinton Press (USA).(2003).
4. V. Galitski, B.Karnakov, V.Kogan and V.Galitski,Jr. "Exploring Quantum Mechanics". OXFORD. University Press. (2011).
5. Y.Peleg, R.Pnini, E.Zaarur. "Theory and problems of Quantum Mechanics". Schaum's Outline Series.McGRAW-HILL.New York. (1998)
6. F.Constantinescu, E.Magyari. "Problems in Quantum Mechanics". Pergamon Press. Oxford. (1971).
7. J.J.Sakurai. "Modern Quantum Mechanics". Revised Edition. Addison – Wesley Publishing Company. (1994).
8. D.J. Griffiths. "Introduction to Quantum Mechanics". Second Edition. Pearson Education International. New Jersey (USA). (2005)
9. V.Radovanovic. "Problem Book in Quantum Field Theory". Second Edition. Springer (2008).
10. W.Griener. "Relativistic Quantum Mechanics". Third Edition.Springer. (2000).
11. თ.ნადარეიშვილი. „ამოცანათა კრებული კვანტურ მექანიკაში“, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. (2018)
12. ი.ვაშაკიძე, ვ.მამასახლისოვი, გ.ჭილაშვილი. „კვანტური მექანიკა“, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. (1978)
13. გ.ჭილაშვილი. „ორი და სამი ნაწილაკის კვანტური მექანიკა“, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. (1973)
14. В.М. Галицкий. "Задачи по квантовой механике". 3-е издание. Едиториал Москва. Часть II. (2001).
15. В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. "Задачи по квантовой механике". "Наука". Москва. (1981).
16. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Курс теоретической физики т III. "Квантовая механика". 6 -е издание. ФИЗМАТЛИТ. Москва. (2004).
17. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Курс теоретической физики т IV. "Квантовая Электродинамика". 4-е издание. ФИЗМАТЛИТ. Москва. (2006).
18. И.И. Гольдман, В.Д. Кривченков. "Сборник задач по квантовой механике". ГИТТЛ Москва. (1957).
19. З. Флюгге. "Задачи по квантовой механике". том 2. "Мир". Москва. (1991).
20. Мин Чен. "Задачи по физике с решениями". "Мир". Москва. (1978).
21. А.С. Давыдов. "Квантовой механика". "БХВ Петербург". Санкт Петербург. (2011).
20. Т.А. Ломоносова, Ю.П. Никитин. "Сборник задач по квантовой электродинамике". Национальный исследовательский ядерный Университет МИФИ. Москва (2010).

გამომცემლობის რედაქტორი **მარინე ვარამაშვილი**  
გარეკანის დიზაინი **ნინო ებრალიძე**  
კომპიუტერული უზრუნველყოფა **ლალი კურდღელაშვილი**

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14  
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179  
Tel: +995 (32) 2250484, 6284; 6278  
[www.press.tsu.edu.ge](http://www.press.tsu.edu.ge)



## თეიმურაზ ნადარეიშვილი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის მიმართულების ელემენტარული ნაწილაკების და კვანტური ველების კათედრის ასისტენტ-პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მაღალი ენერგიების ფიზიკის ინსტიტუტის ველის კვანტური თეორიის განყოფილების უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელი.

თ. ნადარეიშვილი ავტორია 50-მდე სამეცნიერო ნაშრომისა. მისი სამეცნიერო ინტერესების სფეროა: ველის კვანტური თეორია, ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკა, კვანტური მექანიკის პრინციპული საკითხები, თვითშეუღლებული გაფართოების პრობლემა არარელატივისტურ და რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში.

თ. ნადარეიშვილი 1999 წლიდან კითხულობს ლექციებს, ატარებს პრაქტიკულ მეცადინეობებსა და სემინარებს ზუსტი და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის მიმართულების ბაკალავრიატის და მაგისტრატურის სტუდენტებისთვის ზოგადი და თეორიული ფიზიკის საკვანძო საკითხებში.