

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მ ა ი ა ნ ი კ ო ლ ი შ ვ ი ლ ი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ერთი არაწრფივი დიფუზიური მოდელის გამოკვლევა და
მიახლოებითი ამოხსნა

*Ph. D - მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად წარმოდგენილი*

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

პროფესორი თემურ ჯანგველაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,

პროფესორი ზურაბ კილურაძე

თბილისი, 2016



უნივერსიტეტის
გამოცემლობა

აბსტრაქტი. დისერტაციაში შესწავლილია მცენარეთა ფოთლებში მიმდინარე ძარღვოვანი განვითარების დიფუზიური პროცესების აღმწერი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ზოგიერთი თვისება. კერძოდ, აღნიშნული ორგანზომილებიანი დიფუზიური სისტემისა და მისი ერთგანზომილებიანი ვარიანტების შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნებისათვის მიღებულია აპრიორული შეფასებები და ერთადერთობის დებულებები. აგებულია ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები. ორგანზომილებიან მოდელში არსებითი ყურადღება ექცევა ეკონომიურ ალგორითმებს. დამტკიცებულია შესაბამისი მდგრადობის და კრებადობის თეორემები. მოყვანილია სარეალიზაციო ალგორითმები, შედგენილია შესაბამისი პროგრამები და ჩატარებულია თეორიული შედეგების დამადასტურებელი მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი და მათი ანალიზი.

M a i a N i k o l i s h v i l i

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Mathematics

**Investigation and Numerical Solution of One Nonlinear
Diffusion Model**

A D I S E R T A T I O N

Submitted for the degree of Ph.D in Mathematics

Scientific advisers:

Doctor of Physics and Mathematics,

Professor Temur Jangveladze

Ph.D Physics and Mathematics,

Professor Zurab Kighuradze

Tbilisi, 2016

Abstract. In this work we study the system which describes the vein formation in meristematic tissues of young leaves. The system of two-dimensional nonlinear partial differential equations and its one-dimensional analog is considered. Semi-discrete and finite difference schemes for initial-boundary value problems are constructed and investigated. Absolute stability regarding space and time steps of scheme is shown. The convergence is given. Various numerical experiments are carried out and results some of them are considered. Comparison of numerical experiments with the results of the theoretical investigation is given too.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი	6
თავი I	22
ერთგანზომილებიანი მოდელი და მისი მიახლოებითი ამოხსნა	22
§1. ამოცანის დასმა	22
§ 2. ნახევრად-დისკრეტული სქემა და მისი კრებადობა	24
§ 3. ერთი არაცხადი სხვაობიანი სქემა	28
§ 4. იტერაციულ მეთოდზე დაფუძნებული სხვაობიანი სქემის შესახებ	33
§5. დიფუზიური მოდელის პარაბოლური რეგულარიზაცია	34
§ 6. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები	36
თავი II	45
ორი დეკომპოზიციური მოდელი არაწრფივი ორგანზომილებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის	45
§ 1. ამოცანის დასმა	45
§ 2. ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ	47
§ 3. ჯამური აპროქსიმაციის გასაშუალოებული მოდელი	49
§ 4. ერთი დეკომპოზიციური სხვაობიანი სქემა	53
§ 5. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები	55
თავი III	62
ცვალებადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემის აგება და გამოკვლევა ორგანზომილებიანი მოდელისთვის	62
§1. მცენარეთა ფოთლების ძარღვოვანი განვითარების მათემატიკური მოდელი	62
§2. ცვალებადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემა	64
§ 3. ცვალებადი მიმართულებების (3.2.1)-(3.2.7) სქემის მდგრადობა	67
§4. ცვალებადი მიმართულებების (3.2.1)-(3.2.7) სქემის კრებადობა	70
§5. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები	77
ლიტერატურა	87
დანართი	96

შესავალი

არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები და მათი სისტემები წარმოიშვება მრავალი რეალური პროცესის მათემატიკური მოდელირებისას. მათთვის დასმული საწყის-სასაზღვრო ამოცანების თვისობრივი და სტრუქტურული მახასიათებლების დადგენა, დისკრეტული ანალოგების აგება, გამოკვლევა და რიცხვითი ალგორითმების შესწავლა წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკის და ინფორმატიკის მეტად აქტუალურ და სწარაფად განვითარებად ნაწილს.

დღეისათვის შეიძლება ითქვას, რომ არსებობს ახალი ხერხი ისეთი რთული პროცესების კვლევისა, რომლებიც შესაძლებელია მათემატიკურად აღიწეროს. ეს არის გამოთვლითი ექსპერიმენტი, ე.ი. საბუნებისმეტყველო-სამეცნიერო პრობლემების კვლევა გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებებით.

თუ რაიმე ფიზიკური პროცესია შესასწავლი პირველ ეტაპზე ხდება მისი მათემატიკური მოდელის აგება, ე.ი. პროცესის აღწერა დიფერენციალური, ინტეგრალური ან ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებებისა და მათი სისტემების სახით. ეს განტოლებები, როგორც წესი, ძირითადი ფიზიკური სიდიდეების შენახვის კანონებს გამოხატავს. გამოთვლითი ექსპერიმენტის მეორე ეტაპი მდგომარეობს გამოთვლითი ალგორითმების არჩევასა და მის გამოკვლევაში, მესამე ეტაპზე ხორციელდება კომპიუტერისთვის გამოთვლითი ალგორითმის დაპროგრამება, მეოთხე ეტაპზე - კომპიუტერზე გამოთვლების ჩატარება და ბოლოს, გამოთვლითი ექსპერიმენტის მეხუთე ეტაპად შეიძლება გამოიყოს მიღებული რიცხვითი შედეგების ანალიზი და მათემატიკური მოდელის შემდგომი დაზუსტება.

კომპიუტერზე ამოცანის გადაწყვეტისას ყოველთვის ვღებულობთ თავდაპირველი ამოცანის არა ზუსტ, არამედ მიახლოებით ამონახსნს. მიახლოება სასურველია, რაც შეიძლება ზუსტი იყოს. ნებისმიერი ამოცანისათვის შეიძლება მოინახოს მრავალი ალგორითმი, რომლებიც რიგით ერთნაირ $\varepsilon > 0$ სიზუსტეს იძლევიან მოქმედებათა სხვადასხვა რიცხვისათვის. სიზუსტის რიგის

მიხედვით ექვივალენტურ ალგორითმებს შორის შეიძლება აირჩეს ისეთი, რომელიც ამოცანის ამოხსნას უმცირესი მანქანური დროის (მოქმედებათა $Q(\varepsilon)$ რიცხვის) დანახარჯით იძლევა, ანუ ალგორითმი უნდა იყოს ეკონომიური. მრავალგანზომილებიანი ამოცანებისათვის ერთ-ერთი ასეთი მეთოდი არის დეკომპოზიციის (გახლეჩვის) მეთოდი და ჯამური აპროქსიმაციის ზოგადი პრინციპი (იხ. მაგალითად, [1-7, 15-20, 28-36, 38, 40-45, 54, 61, 64, 67, 73-75, 81, 82, 87]), რომელიც საშუალებას იძლევა რთული ამოცანა უფრო მარტივ ამოცანათა მიმდევრობად დანაწილდეს. ეს არსებითად ამარტივებს მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნას.

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითად მიზანს წარმოადგენს ერთ-ერთი ასეთი, მათემატიკური ფიზიკის რთული ორგანზომილებიანი ამოცანის შესწავლა. კერძოდ, მცენარეთა ფოთლებში მიმდინარე მარღვოვანი განვითარების დიფუზიური პროცესების აღმწერი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ზოგიერთი თვისების შესწავლა, შესაბამისი დისკრეტული ანალოგების აგება და გამოკვლევა, სარეალიზაციო ალგორითმების შედგენა, პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ამოხსნა.

მცენარეთა ფოთლებში მარღვების ფორმირების ერთ-ერთი საინტერესო მათემატიკური მოდელი შემოთავაზებულ იქნა ინგლისელი მეცნიერის ჯ. მიჩისონის მიერ [57].

მიჩისონმა მოდელი მიიღო მრავალ ექსპერიმენტზე დაკვირვებისა და ანალიზის საფუძველზე. კერძოდ, მარღვთა რეგენერაციაზე ჩატარებული ექსპერიმენტები აჩვენებენ, რომ გარკვეული სახის სიგნალები, რომლებსაც შეუძლიათ მარღვის დიფერენციაცია, მიედინება ფოთლების მზარდ ქსოვილებში არსებული წყაროდან ფესვებისკენ. იმ გზის ტევადობა, რომელიც ახდენს სიგნალის ტრანსპორტირებას, იზრდება ნაკადთან ერთად. ზემოთმოყვანილი ბიოლოგიური პროცესის გამოკვლევისას ამ მნიშვნელოვანი ფაქტის გათვალისწინება აუცილებელია [80].

კონცეფცია ნაკადთან ერთად დიფუზიის კოეფიციენტის ცვლილების შესახებ პარალელს პოულობს სხვადასხვა ფიზიკურ სისტემებში. დიფუზიური

პროცესები, როგორც წესი აღიწერება რთული მრავალგანზომილებიანი არაწრფივი განტოლებების სისტემებით და მათი როგორც გამოკვლევა, ასევე რიცხვითი ამოხსნა არსებით სირთულეებთანაა დაკავშირებული (იხ. მაგალითად, [7-10, 12-14, 24, 26, 27, 39, 46-48, 50-53, 56, 59, 68, 71, 79, 83, 87] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული ციტირებები).

მიჩისონის მიერ შემოთავაზებულ უწყვეტ მოდელს აქვს შემდეგი სახე [57]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(D_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(D_2 \frac{\partial S}{\partial x_2} \right), \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} = f \left(D_i, D_i \frac{\partial S}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2,$$

სადაც $S(t, x_1, x_2)$ არის სიგნალის კონცენტრაცია, ხოლო D_1 და D_2 დიფუზიის კოეფიციენტებია OX_1 და OX_2 საკოორდინატო ღერძების მიმართულებით. წყაროს აქტივობა ამ შემთხვევაში (0.1) სისტემაში არ განიხილება.

მიჩისონის მოდელი სწრაფად მოექცა სხვადასხვა მეცნიერთა ყურადღების ცენტრში. კერძოდ, მოდელის წარმოშობიდან მოკლე ხანში, ამერიკელი მათემატიკოსების ჯ. ბელის, ჩ. კოსნერისა და უ. ბერტიგერის მიერ გამოკვლეული იქნა (0.1) სისტემის შესაბამისი ერთგანზომილებიანი ანალოგი [9].

მათ განიხილეს შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T], \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -d + g \left(d \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, T],$$

$$S(0, t) = 0, \quad d \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi, \quad t \in [0, T], \quad (0.3)$$

$$S(x, 0) = S_0(x); \quad d(x, 0) = d_0(x) \geq \delta_0 = \text{const} > 0, \quad x \in [0, T],$$

სადაც $0 < g_0 \leq g(\xi) \leq G_0$, $g_0 = \text{Const}$, $G_0 = \text{Const}$, T და ψ დადებითი კონსტანტები, ხოლო g , S_0 , d_0 - მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია. ავტორებმა დაამტკიცეს თეორემა დასმული ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთა-

დერთობის შესახებ, რისთვისაც გამოიყენეს ცვლადთა ბუნებრივი გარდაქმნა და ასევე ბუნებრივი იტერაციული სქემა.

კერძოდ, ახალი უცნობის შემოტანით

$$W(x, t) = D \frac{\partial S}{\partial x}$$

(0.2), (0.3) რედუცირდება შემდეგ ამოცანაზე:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = d \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left[\frac{g(W)}{d} - 1 \right] W,$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -d + g(W),$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad W(1, t) = \psi,$$

$$W(x, 0) = W_0(x) = d_0 \frac{dS_0(x)}{dx}, \quad d(x, 0) = d_0(x).$$

შესაბამისი იტერაციული სქემაა:

$$\frac{\partial W^n}{\partial t} = d^{n-1} \frac{\partial^2 W^n}{\partial x^2} + \left[\frac{g(W^{n-1})}{d^{n-1}} - 1 \right] W^{n-1}, \tag{0.4}$$

$$\frac{\partial d^n}{\partial t} = -d^n + g(W^{n-1}),$$

$$\frac{\partial W^{n-1}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad W^n(1, t) = \psi, \tag{0.5}$$

$$W^n(x, 0) = W_0(x), \quad d^n(x, 0) = d_0(x).$$

(0.4), (0.5) იტერაციულ პროცესზე დაფუძნებული რიცხვითი ალგორითმები კომპიუტერზე ადვილად რეალიზებადია, რადგან იგი შეიცავს ორ დამოუკიდებელ კერძოწარმოებულებიან წრფივ განტოლებას.

იგივე ნაშრომში [9] მიღებულია სტაციონალური ამონახსნის მდგრადობის საკმარისი პირობა $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით. ამ პირობას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{1}{\delta_0} \left[G_1 D_1 + \frac{\psi}{g(\psi)} \right] + \frac{G_1 \psi}{g'(\psi)} < 1,$$

სადაც G_1, D_1 დადებითი მუდმივებია.

იმავე სტატიაში მითითებულ იქნა ჰოფის ბიფურკაციული სურათის არსებობის შესაძლებლობაზე. კერძოდ, თუ შესრულებულია პირობა $0 < \psi < \psi_c$, (ψ_c არის კრიტიკული მნიშვნელობა), მაშინ ამონახსნი აბსოლუტურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით, ხოლო როგორც კი $\psi > \psi_c$, მაშინ ადგილი აქვს ჰოფის ბიფურკაციას [55].

მათემატიკური მოდელი, რომელიც შემოთავაზებულ იქნა XX საუკუნის 80-იან წლებში, კვლავ აქტუალური გახდა უახლესი ბიოქიმიური გამოკვლევების და კომპიუტერული ტექნოლოგიების განვითარებასთან ერთად და მისი კვლევა უფრო ინტენსიური გახდა. რასაც ადასტურებს ის უამრავი ლიტერატურული მითითება, რაც განხორციელებულია ამ ნაშრომზე (იხ., მაგალითად, [9, 11, 20-23, 25, 37, 39-45, 49, 58, 60-66, 69, 70, 76-78, 84, 85] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული ციტირებები).

სადისერტაციო ნაშრომში ჩატარებულია მათემატიკური გამოკვლევები არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებათა აღწერილი დიფუზიური სისტემის ერთგანზომილებიანი და ორგანზომილებიანი ვარიანტებისთვის. ამოცანაში შემავალი ყველა პარამეტრისათვის, კერძოდ, არაწრფივობის მახასიათებლებისთვის, როგორც უწყვეტი, ასევე დისკრეტული ანალოგების სრულყოფილი თეორიული შესწავლა ფაქტიურად შეუძლებელია. სადისერტაციო ნაშრომში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა სხვადასხვა კერძო შემთხვევის თეორიულ გამოკვლევებს, რომელთა შედეგებიც დადასტურებულია ჩატარებული მრავალი რიცხვითი გამოთვლებით.

რეალური გამოყენებითი ამოცანების შესწავლა თანამედროვე კომპიუტერების გარეშე წარმოუდგენელია. არაწრფივი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების განვითარება და მათ ბაზაზე სხვადასხვა გამოყენებითი ამოცანის მოდელირებისთვის გამოთვლითი ექსპერიმენტების ჩატარების აუცილებლობა ნათელია. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები განხილულია მრავალ სამეცნიერო პუბლიკაციაში (იხ., მაგალითად, [1-7, 16-23, 27-36, 38-

47, 49, 52-54, 61-66, 73-75, 81-87] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული ციტირებები).

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება სამი თავისაგან, გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისა და დანართისაგან.

პირველ თავში შესწავლილია ერთი დიფუზიური მოდელი, რომელიც წარმოიშვება მცენარეთა ფოთლებში ძარღვების ფორმირებისას. აგებული და გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები. მოცემულია ამოხსნის ალგორითმები და ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და ანალიზი. მოყვანილია გრაფიკული ილუსტრაციები.

პირველ პარაგრაფში მოცემულია მიჩისონის [57] მიერ შემოთავაზებული (0.1) დიფუზიური მოდელის შესაბამისი ერთგანზომილებიანი ანალოგისათვის (0.2), (0.3) საწყის-სასაზღვრო ამოცანა მოხერხებულობისათვის ჩაწერილი განსხვავებულ არაბიოლოგიურ აღნიშვნებში:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V + g \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right). \quad (0.6)$$

$$U(0; t) = 0, \quad V \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi, \quad t \in [0, T],$$

$$U(x; 0) = U_0(x), \quad V(x; 0) = V_0(x) \geq \delta_0, \quad x \in [0, 1],$$

სადაც U_0 , V_0 , g მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია, ამასთან $g_0 \leq g(x) \leq G_0$; T , g_0 , G_0 , δ_0 , ψ - მოცემული დადებითი მუდმივებია.

აღვნიშნოთ, რომ (0.6) ამოცანაში მოყვანილი სისტემისა და მისი მრავალგანზომილებიანი ანალოგების და მსგავსი მოდელების შესწავლასა და მიახლოებითი ამოხსნის საკითხებს ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო გამოკვლევა (იხ., მაგალითად, [9, 11, 20, 23, 31, 37, 39-45, 49, 58, 60-66, 69, 70, 76-80] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული ციტირებები).

მეორე პარაგრაფში აგებული და გამოკვლეულია (0.6) ამოცანის შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული სქემა:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - (vu_{\bar{x}})_x &= 0, \\ \frac{dv}{dt} &= -v + g(vu_{\bar{x}}), \end{aligned} \tag{0.7}$$

$$u(0, t) = 0, \quad v_M u_{\bar{x}, M} = \psi, \quad t \in [0, T], \tag{0.8}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h.$$

(0.7), (0.8) დამოკიდებულებებში მონაწილე $u(t)$ და $v(t)$ დისკრეტული ფუნქციები განსაზღვრულია $[0, 1]$ სეგმენტზე აგებულ თანაბარბიჯიან $\bar{\omega}_h$ ბადეზე.

დამტკიცებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.2.1. ნახევრად-დისკრეტული (0.7), (0.8) სქემის $(u(t), v(t))$ ამონახსნი კრებადია (0.6) ამოცანის (U, V) ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს და არის $O(h)$ სიდიდის ტოლი.

შენიშვნა 1.2.1. თუ $v(t)$ დისკრეტულ ფუნქციას განვსაზღვრავთ შემდეგ ბადეზე

$$\omega_h^* = \{x_i = (i - 1/2)h, \quad i = 1, \dots, M\}$$

და სასაზღვრო პირობის აპროქსიმაციას, როცა $x = 1$, მოვახდენთ შემდეგნაირად

$$v_{M-1/2} u_{\bar{x}, M} + \frac{h}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)_M = \psi,$$

მივიღებთ შემდეგ ნახევრად-დისკრეტულ სქემას:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - (vu_{\bar{x}})_x &= 0, \\ \frac{dv}{dt} &= -v + g(vu_{\bar{x}}), \end{aligned} \tag{0.9}$$

$$u(0, t) = 0, \quad v_{M-1/2} u_{\bar{x}, M} + \frac{h}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)_M = \psi, \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad v(x, 0) = V_0(x), \quad x \in \omega_h^*,$$

რომლის აპროქსიმაცია (0.6) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(h^2)$ რიგის და შესაბამისად, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.2.2. ნახევრად-დისკრეტული (0.9) სქემის აპროქსიმაცია (0.6) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(h^2)$ და იგი კრებადია (0.6) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

იგივე ამოცანისათვის აგებულია აგრეთვე სრულად დისკრეტული ანალოგი. კერძოდ, (0.6) ამოცანის შესაბამისი არაცხადი სხვაობიანი სქემა და შესწავლილია მისი კრებადობის საკითხი ბადურ ფუნქციათა C_h სივრცის ნორმის აზრით.

პირველი თავის ბოლოს (0.6) მოდელის ერთი ვარიანტისთვის განხილულია შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

(0.10)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V + g \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

(0.11)

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x) \geq \text{Const} > 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

სადაც კვლავ g, U_0, V_0 მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია, ამასთან $g_0 \leq g(\xi) \leq G_0; T, g_0, G_0, \varepsilon$ მოცემული დადებითი კონსტანტებია, $\Omega = (0, 1)$, ხოლო $\partial\Omega$ არის Ω -ს საზღვარი $\{0, 1\}$.

დასმულ ამოცანას შეიძლება შევხედოთ როგორც პირველ პარაგრაფში განხილული მოდელის პარაბოლურ რეგულარიზაციას $\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ წევრის წამატებით.

აქვე აგებულია (0.10), (0.11) ამოცანის შესაბამისი დისკრეტული ანალოგი და შესწავლილია მისი კრებადობის საკითხი ბადურ ფუნქციათა C_h ნორმის აზრით.

აგებული ალგორითმების საფუძველზე ჩატარებულია მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი. დადასტურებულია ალგორითმების კრებადობა და ამოცანის პარაბოლური რეგულარიზაციის ყოფაქცევა, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$.

მეორე თავში შესწავლილია არაწრფივი ორგანზომილებიანი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა, რომლითაც აღიწერება ბიოლოგიური დიფუზიური პროცესები და რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (0.12)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (0.13)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = -V_2 + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

სადაც g_i , $i = 1, 2$, თავისი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ განსაზღვრულ დამატებით პირობებს.

განტოლებათა (0.12), (0.13) სისტემა საინტერესოა როგორც ბიოლოგიის, ასევე ფიზიკის და სხვა დარგების სამეცნიერო მიმართულებებისთვისაც.

(0.12), (0.13) სისტემის ზოგიერთი ხარისხობრივი და სტრუქტურული თვისება დადგენილია [9], [40] შრომებში. [9] ნაშრომში გამოკვლეულია (0.12), (0.13) სისტემის ერთგანზომილებიანი ანალოგი ორი უცნობი U და V_1 ფუნქციით. [9] და [58] ნაშრომებში ასევე ყურადღება გამახვილებულია (0.12), (0.13) სისტემის შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების როგორც თეორიული და პრაქტიკული კვლევების, ასევე მიახლოებითი ამონახსნების აგების დიდ მნიშვნელობაზე.

მოცემული მოდელის ორგანზომილებიანობის გამო მისი რიცხვითი რეალიზაცია ქმნის გარკვეულ პრობლემებს, რომლებიც არსებითად არიან განპირობებულნი შესაბამისი ალგორითმის შრომატევადობით და არაეკონომიურო-

ბით, ამიტომ ბუნებრივად წარმოიშვება ეკონომიური ალგორითმების მოძიების საკითხი. აღნიშნული ალგორითმები ძირითადად მიეკუთვნებიან გახლეჩისა და ჯამური აპროქსიმაციის მეთოდებს მათი მააპროქსიმირებელი თვისებების მიხედვით.

ოპერატორთა გახლეჩვის ტექნიკის შესწავლას დიდი ხნის ისტორია აქვს. მას შემდეგ, რაც დუგლასის, პისმენის და რეკვორდის [16-19, 67] მიერ შემოღებულ იქნა ალტერნატიული მიმართულების მეთოდები, მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი და მსგავსი ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების აგების მეთოდები მნიშვნელოვნად გაფართოვდა. ეს მიდგომა, რომელიც ამცირებს დროს მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ლოკალურად ერთგანზომილებიან ამოცანებზე დაყვანით, გამოყენებულ იქნა მრავალი მნიშვნელოვანი ფიზიკური და სხვა დარგების ამოცანების რიცხვითი მოდელირებისთვის. დღეისათვის არსებობს მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნის რამდენიმე ეფექტური ალგორითმი (იხ., მაგალითად, [1-6, 15-19, 32-36, 38, 53, 54, 67, 73-75, 81, 82, 86] და მათში მითითებული ლიტერატურა).

(0.12), (0.13) სისტემის სახე გვკარნახობს დეკომპოზიციის (გახლეჩის) მეთოდის გამოყენებას, რადგანაც განტოლება (0.12) ორგანზომილებიანია, ხოლო (0.13) განტოლებები შესაბამისად შეიცავენ მხოლოდ x ან y ცვლადს და V_α დიფუზიის კოეფიციენტებს.

მეორე თავში (0.12), (0.13) სისტემისათვის გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანა, აგებულია ჯამური აპროქსიმაციის გასაშუალოებული მოდელი, რომელიც წარმოადგენს ეკონომიური ალგორითმის აგების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მეთოდს.

პირველ პარაგრაფში არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა (0.12), (0.13) სისტემისათვის დასმულია შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{aligned}
 U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad V_i(x, y, 0) = V_{i0}(x, y), \quad i = 1, 2, \\
 U(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T].
 \end{aligned}
 \tag{0.14}$$

სადაც $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, T - ნებისმიერი ფიქსირებული დადებითი რიცხვია, ხოლო g_i, U_0, V_{i0} მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} V_{i0} &\geq \delta_0 = \text{const} > 0, & x \in \bar{\Omega}, \\ g_0 &\leq g_i(\xi_i) \leq G_0, & |g'_i(\xi_i)| \leq G_1, & \xi_i \in R, & i = 1,2, \end{aligned} \quad (0.15)$$

სადაც δ_0, g_0, G_0, G_1 დადებითი მუდვივებია.

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია თეორემა მოცემული (0.12)-(0.14) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2. 2.1. თუ (0.12)-(0.14) ამოცანას გააჩნია კლასიკური ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

მესამე პარაგრაფში განხილულია ჯამური აპროქსიმაციის გასაშუალებული მეთოდი (0.12)-(0.14) ამოცანისათვის, რომელიც როგორც უკვე აღვნიშნეთ, წარმოადგენს მოცემული სისტემისათვის ეკონომიური ალგორითმის აგების ერთ-ერთ მეთოდს. აღნიშნულ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1^k \frac{\partial U_1^k}{\partial x} \right), \\ \eta_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2^k \frac{\partial U_2^k}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial V_1^k}{\partial t} &= -V_1^k + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial V_2^k}{\partial t} &= -V_2^k + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial y} \right), \\ U_1^k|_{x=0} &= U_1^k|_{x=1} = 0, & U_2^k|_{y=0} &= U_2^k|_{y=1} = 0, & U_i^0(x, 0) &= U_0(x), \\ U_i^k(x, y, t_k) &= U^{k-1}(x, y, t_k), & V_i^k(x, y, t_k) &= V_i^{k-1}(x, y, t_k), & i &= 1,2, \end{aligned} \quad (0.16)$$

სადაც

$$U^k(x, t) = \eta_1 U_1^k(x, y, t) + \eta_2 U_2^k(x, y, t), \quad \eta_1, \eta_2 > 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 1.$$

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.3.1. (0.16), (0.17) ამოცანის ამონახსნი (U^k, V_1^k, V_2^k) კრებადია (0.12)-(0.14) ამოცანის ამონახსნისაკენ (U, V_1, V_2) , როცა $\tau \rightarrow 0$ და ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|U^k(t) - U(t)\|^2 + \|V_1^k(t) - V_1(t)\|^2 + \|V_2^k(t) - V_2(t)\|^2 = O(\tau^{1/2}).$$

მეოთხე პარაგრაფში აგებული და გამოკვლეულია (0.12)-(0.14) ამოცანის შესაბამისი გახლეჩილი დისკრეტული ანალოგი წონებით.

კერძოდ, უწყვეტი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, N, N\tau = T\},$$

ზადის ყოველ ბიჯზე იხსნება შემდეგი ორი სისტემა:

$$\frac{u_1^{k+1} - u_1^k}{\tau} = \sigma_1(v_1^{k+1}u_{1\bar{x}}^{k+1})_x + (1 - \sigma_1)(v_1^k u_{1\bar{x}}^k)_x,$$

$$\frac{v_1^{k+1} - v_1^k}{\tau} = -v_1^{k+1} + g_1(v_1^k u_{1\bar{x}}^k),$$

$$u_1(x_i, y_j, t_k) = u_2(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad u_1(x_i, y_j, 0) = U_0(x_i, y_j), \quad (0.18)$$

$$(x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h, \quad v_1(x_i, y_j, 0) = V_{01}(x, y), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{1h},$$

$$u_1(0, y_j, t_{k+1}) = 0, \quad u_1(1, y_j, t_{k+1}) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M,$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$\frac{u_2^{k+1} - u_2^k}{\tau} = \sigma_2(v_2^{k+1}u_{2\bar{y}}^{k+1})_y + (1 - \sigma_2)(v_2^k u_{2\bar{y}}^k)_y,$$

$$\frac{v_2^{k+1} - v_2^k}{\tau} = -v_2^{k+1} + g_2(v_2^k u_{2\bar{y}}^k),$$

$$u_2(x_i, y_j, t_k) = u_1(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h, \quad (0.19)$$

$$v_2(x_i, y_j, 0) = V_{02}(x, y), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$u_2(x_i, 0, t_{k+1}) = 0, \quad u_2(x_i, 1, t_{k+1}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, M,$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

(0.18), (0.19) გახლეჩილ ამოცანებში $\sigma_1, \sigma_2 \in]0,1[$; u_1 და u_2 ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, v_1 და v_2 კი $\bar{\omega}_{1h\tau}$ და $\bar{\omega}_{2h\tau}$ ბადეებზე შესაბამისად, სადაც

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{h\tau} &= \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, & \bar{\omega}_{\alpha h\tau} &= \bar{\omega}_{\alpha h} \times \omega_\tau, & \alpha &= 1,2, \\ \bar{\omega}_h &= \{(x_i, y_j) = (ih, jh), & i, j &= 0, 1, \dots, M, & Mh &= 1\}, \\ \bar{\omega}_{1h} &= \{(x_i, y_j) = ((i - 1/2)h, jh), & i, j &= 1, \dots, M, & Mh &= 1\}, \\ \bar{\omega}_{2h} &= \{(x_i, y_j) = (ih, (j - 1/2)h), & i, j &= 1, \dots, M, & Mh &= 1\}, \\ \bar{\omega}_\tau &= \{t_k = k\tau, & k &= 0, 1, \dots, N, & N\tau &= T\}.\end{aligned}$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ საწყისი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნების მნიშვნელობები $t = t_k$ შრის წერტილებში, საჭიროა დროის ყოველ შუალედში ჯერ ამოვხსნათ ამოცანა (u_1, v_1) -ს მიმართ, ხოლო შემდეგ (u_2, v_2) -ს მიმართ, ამასთან (0.19) ამოცანაში საწყის პირობას ვსაზღვრავთ (0.18) ამოცანის ამონახსნის მიხედვით. საწყისი ამოცანის საბოლოო მიახლოებით ამონახსნს წარმოადგენს (u_2, v_1, v_2) .

აღნიშნული მეთოდი არის მიმდევრობითი ტიპის დეკომპოზიციის მეთოდი.

მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად შეიძლება გამოყენებულ იქნას აგრეთვე პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის მეთოდი, ანუ დროის ყოველ შუალედში პარალელურად ამოიხსნას ამოცანა როგორც (u_1, v_1) -ს, ისე (u_2, v_2) -ს მიმართ და საბოლოო ამონახსნად გამოცხადდეს მათი საშუალო არითმეტიკული.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.4.1. (0.18), (0.19) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (0.12)-(0.14) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ და იგი კრებადია (0.12)-(0.14) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

აგებული გამოთვლითი (0.18), (0.19) ალგორითმების საფუძველზე ჩატარებულია მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი და მოცემულია შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები.

მესამე თავში შესწავლილია ცვალებადი მიმართულების სქემის მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები (0.12), (0.13) სისტემის შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის.

სადისერტაციო ნაშრომში ორგანოზომილებიანი (0.12), (0.13) სისტემისათვის აგებულია ცვალებადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემის ერთი ვარიანტი. დამტკიცებულია აგებული სქემის აბსოლუტურად მდგრადობის და კრებადობის თეორემები. მოცემულია მიახლოებითი ამონახსნების აგების ალგორითმების აღწერა და ჩატარებული მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტის გრაფიკული ილუსტრაციები.

გავეცნოთ მესამე თავის შინაარსს უფრო დაწვრილებით.

არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებათა (0.12),(0.13) სისტემისათვის განხილულია შემდეგი ამოცანა:

$$\begin{aligned} U(x, y, 0) &= U_0(x, y), & V_1(x, y, 0) &= V_{10}(x, y), \\ V_2(x, y, 0) &= V_{20}(x, y), & (x, y) &\in \bar{\Omega}, \\ U(x, y, t) &= 0, & (x, y, t) &\in \partial\Omega \times [0, T], \end{aligned} \quad (0.20)$$

სადაც $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\partial\Omega$ არის Ω -ს საზღვარი $\{0,1\}$, T ფიქსირებული დადებითი რიცხვია, $U_0, V_{\alpha 0}, g_\alpha$ არიან მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} V_{\alpha 0}(x) &\geq \delta_0 \geq 0, & x &\in \bar{\Omega}, \\ \gamma_0 &< g_\alpha(\xi_\alpha) \leq G_0, & |g'_\alpha(\xi_\alpha)| &\leq G_1, & \xi_\alpha &\in R, & \alpha &= 1,2, \end{aligned} \quad (0.21)$$

სადაც $\delta_0, \gamma_0, G_0, G_1$ დადებითი მუდმივებია.

ჩამოყალიბებული (0.12), (0.13), (0.20), (0.21) ამოცანისათვის აგებულია ცვალებადი მიმართულების შემდეგი სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (v_2 u_{2\bar{y}})_y, \quad (0.22)$$

$$u_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}})_y, \quad (0.23)$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}), \quad (0.24)$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}), \quad (0.25)$$

$$u_1(x, y, 0) = u_2(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_h, \quad (0.26)$$

$$v_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad (0.27)$$

$$v_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau, \quad (0.28)$$

სადაც (0.22)-(0.28) ტოლობებში დისკრეტული u_1 და u_2 ფუნქციები განსაზღვრულია მთელკვანძებიან $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, ხოლო v_α ფუნქცია კი შუაკვანძებიან $\bar{\omega}_{\alpha h\tau}$ ბადეზე ($\alpha = 1, 2$).

სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

თეორემა 3.3.1. თუ (0.12), (0.13), (0.20), (0.21) დიფერენციალურ ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2 , მაშინ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი რომ ყოველი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის (0.24) - (0.30) სქემა აბსოლიტურად მდგრადია საწყისი პირობების მიმართ.

თეორემა 3.4.1. თუ (0.12), (0.13), (0.20), (0.21) დიფერენციალურ ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2 , მაშინ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი რომ ყოველი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის (0.24) - (0.30) სქემა კრებადია როცა, $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$, და სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|u_{1\bar{x}} - U_{1\bar{x}}\|_1 + \|u_{2\bar{y}} - U_{2\bar{y}}\|_2 + \|v_1 - V_1\|_1 + \|v_2 - V_2\|_2 = O(\tau + h^2).$$

აგებული სქემის მიხედვით ჩატარებულია მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი. მათი შედეგები მოცემულია გრაფიკებისა და ცხრილების საშუალებით.

დისერტაციის ბოლოში მოყვანილია დანართი, სადაც მოცემული და აღწერილია სხვადასხვა პროგრამული კოდების ერთობლიობა, რომელთა საშუალებითაც ჩატარებულია გათვლები.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებში [31, 41-45, 49, 61-66] და მოხსენებული იყო რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოცენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარების სხდომებზე (2008-2014 წწ.) [41-43, 49, 62, 63, 66], საქართველოს მათემატიკოსთა მეხუთე ყრილობაზე (ბათუმი, 2009) [61], საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის IV და VI საერთაშორისო კონფერენციებზე (ბათუმი, 2013 და 2015 წწ.) [31, 64], შედეგები ასევე მოხსენებულ იქნა WSEAS-ის მე-15 საერთაშორისო კონფერენციაზე [44], რომელიც ჩატარდა საბერძნეთის დედაქალაქ ათენში 2010 წლის 29-31 დეკემბერს.

თავი I

ერთგანზომილებიანი მოდელი და მისი მიახლოებითი ამოხსნა

ამ თავში მოცემულია ერთი დიფუზიური მოდელის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა, რომელიც წარმოიშვება სხვადასხვა რეალური პროცესის მათემატიკური მოდელირებისას. ერთ-ერთ ასეთ პროცესს წარმოადგენს მცენარეთა ფოთლებში ძარღვების ფორმირება, რომლის მათემატიკური მოდელი შემოთავაზებულ იქნა ინგლისელი მეცნიერის ჯ. მიჩისონის მიერ [57].

არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა შესაბამისი სისტემისათვის გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანის დისკრეტული ანალოგების კრებადობა ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ და C_h ნორმების აზრით.

მოცემულია რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. მოყვანილია მრავალი ტესტური გათვლის გრაფიკული და ცხრილური ილუსტრაცია და ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების ანალიზი.

§1. ამოცანის დასმა

მიჩისონის მიერ შემოთავაზებული დიფუზიური მოდელის [57] შესაბამისი ერთგანზომილებიანი ანალოგისათვის [9] $\bar{Q} = [0,1] \times [0,T]$ არეში განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V + g \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right). \quad (1.1.2)$$

$$U(0; t) = 0, \quad V \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi, \quad t \in [0, T], \quad (1.1.3)$$

$$U(x; 0) = U_0(x), \quad V(x; 0) = V_0(x) \geq \delta_0, \quad x \in [0, 1],$$

სადაც U_0, V_0, g მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია, ამასთან $g_0 \leq g(\xi) \leq G_0$; $T, g_0, G_0, \delta_0, \psi$ - მოცემული დადებითი მუდმივებია.

(1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ თეორემები დამტკიცებულია [9]-ში. დისერტაციის შესავალშიც აღინიშნა, რომ ამისათვის [9]-ის ავტორებმა გამოიყენეს ცვლადთა გარდაქმნა და იტერაციული სქემა.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $W = V \frac{\partial U}{\partial x}$, (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანა მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = V \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left[\frac{g(W)}{V} - 1 \right] W, \quad (1.1.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V + g(W), \quad (1.1.5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad W(1; t) = \psi,$$

$$W(x; 0) = W_0(x) = V_0(x) \frac{dU_0(x)}{dx}, \quad V(x; 0) = V_0(x). \quad (1.1.6)$$

შესაბამისი იტერაციული სქემა:

$$\frac{\partial W^n}{\partial t} = V^{n-1} \frac{\partial^2 W^n}{\partial x^2} + \left[\frac{g(W^{n-1})}{V^{n-1}} - 1 \right] W^{n-1}, \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial V^n}{\partial t} = -V^n + g(W^{n-1}),$$

$$\frac{\partial W^{n-1}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad W^n(1, t) = \psi,$$

$$W^n(x, 0) = W_0(x), \quad V^n(x, 0) = V_0(x). \quad (1.1.8)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

(1.1.7)-(1.1.8) იტერაციული პროცესის შესაბამისი დისკრეტული ანალოგები ადვილად რეალიზებადია კომპიუტერზე, რადგან შეიცავს ორ დამოუკიდებელ წრფივ განტოლებას.

აღნიშნოთ, რომ (1.1.1)-(1.1.3) სისტემის და მისი მრავალგანზომილებიანი ანალოგების შესწავლასა და მიახლოებითი ამოხსნის საკთხებს ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო გამოკვლევა (იხ., მაგალითად, [9, 11, 20-23, 25, 37, 39-45, 49, 58, 60-66, 69, 70, 76-78, 84, 85] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული ციტირებები).

§ 2. ნახევრად-დისკრეტული სქემა და მისი კრებადობა

ამ პარაგრაფში მოცემულია ერთგანზომილებიანი (1.1.1)-(1.1.3) მოდელის შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული სქემა და შესწავლილია მისი კრებადობა ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ და C_h სივრცეთა ნორმების აზრით.

შემოვიტანოთ თანაბარი ბადე $[0,1]$ არეზე, კვანძითი წერტილებით $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, M$, და $h = 1/M$ ბიჯით, საზღვრები კი განსაზღვრულია $i = 0$ და $i = M$ წერტილებით. ნახევრად-დისკრეტული მიახლოება (x_i, t) წერტილში აღვნიშნოთ $u_i = u_i(x)$, $v_i = v_i(x)$ ბადური ფუნქციებით, ხოლო ამოცანის ზუსტი ამონახსნი იმავე წერტილში კი $U_i = U_i(t)$ და $V_i = V_i(t)$ ფუნქციებით, ასევე შემოვიღოთ შემდეგი ცნობილი აღნიშვნები:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^M u_i v_i h,$$

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|] = (u, u]]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{C_h} = \max_i |u_i|,$$

$$u_{x,i}(t) = \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h}, \quad u_{\bar{x},i}(t) = \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h}.$$

შევუსაბამოთ (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანას შემდეგი ნახევრად-დისკრეტული სქემა:

$$\frac{du}{dt} - (vu_{\bar{x}})_x = 0, \quad (1.2.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -v + g(vu_{\bar{x}}), \quad (1.2.2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad v_M u_{\bar{x}, M} = \psi, \quad t \in [0, T], \quad (1.2.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \omega_h.$$

(1.2.1)-(1.2.3) ტოლობებში $u(t)$ და $v(t)$ დისკრეტული ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{\omega}_h$ ბადეზე.

არ არის ძნელი იმის ჩვენება, რომ (1.2.1)-(1.2.3) სქემის აპროქსიმაცია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(h)$ რიგის.

(1.2.1) გავამრავლოთ სკალარულად u , ხოლო (1.2.2) v ფუნქციებზე. თუ გამოვიყენებთ გრინის პირველ სხვაობიან ფორმულას, ჩადგმის თეორემების სხვაობიან ანალოგებს [81], ε -უტოლობას და v ფუნქციის შემოსაზღვრულობას, რომელიც გამომდინარეობს (1.2.2)-დან და რომლის შესახებაც ორგანო-ზომილებიან შემთხვევაში მესამე თავში არის ყურადღება გამახვილებული, მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ დამოკიდებულებას

$$\frac{d}{dt} (\|u\|^2 + \|v\|^2) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + C.$$

ამ პარაგრაფში და შემდგომშიც C სიდიდე აღნიშნავს სხვადასხვა დადებითი მუდმივს, რომელიც არ არის დამოკიდებული h -ზე.

ბოლო უტოლობიდან გრონუოლის ლემის თანახმად, მივიღებთ

$$\max_{t \in [0; T]} (\|u\|^2 + \|v\|^2) \leq C,$$

რომელიც უზრუნველყოფს (1.2.1)-(1.2.3) ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის კოშის ამოცანის გლობალურ ამოხსნადობას $[0, T]$ სეგმენტზე.

(1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ზუსტი U და V ამონახსნებისთვის გვაქვს შემდეგი ნახევრად-დისკრეტული სქემა:

$$\frac{dU}{dt} = (VU_{\bar{x}})_x + \varphi_1, \quad (1.2.4)$$

$$\frac{dV}{dt} = -V + g(VU_{\bar{x}}) + \varphi_2, \quad (1.2.5)$$

$$U(0; t) = 0, \quad \psi = V_M U_{\bar{x}, M} + \chi, \quad t \in [0, T], \quad (1.2.6)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in \omega_h,$$

სადაც $\varphi_k = O(h)$, $k = 1, 2$; $\chi = O(h)$.

ცდომილებებისათვის $z = u - U$, $s = v - V$ (1.2.4), (1.2.5) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$\frac{dz}{dt} = (uv_{\bar{x}} - UV_{\bar{x}})_x + \varphi_1, \quad (1.2.7)$$

$$\frac{ds}{dt} = -v + V + g(vu_{\bar{x}}) - g(VU_{\bar{x}}) + \varphi_2, \quad (1.2.8)$$

$$z(0; t) = 0, \quad v_M u_{\bar{x}, M} - V_M U_{\bar{x}, M} = \chi, \quad t \in [0, T], \quad (1.2.9)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad s(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h.$$

გავამრავლოთ (1.2.7) დამოკიდებულება სკალარულად z -ზე, ხოლო (1.2.8) კი s -ზე, მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ

$$\|z\|_{L_\infty(0, T, L_2(\bar{\omega}_h))}^2 + \|s\|_{L_\infty(0, T, L_2(\omega_{1h}))}^2 + \int_0^T \|z_{\bar{x}}\|^2 dt \sim O(h^2).$$

ამრიგად, სამართლიანია შედეგი დებულება.

თეორემა 1.2.1. ნახევრად-დისკრეტული (1.2.1)-(1.2.3) სქემის $(u(t), v(t))$ ამონახსნი კრებადია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის (U, V) ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ სივრცის ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს და არის $O(h)$ -ის ტოლი.

შენიშვნა 1.2.1. თუ $v(t)$ დისკრეტულ ფუნქციას განვსაზღვრავთ შემდეგ ბადეზე

$$\omega_h^* = \{x_i = (i - 1/2)h, \quad i = 1, \dots, M\}.$$

და სასაზღვრო პირობის აპროქსიმაციას, როცა $x = 1$, მოვახდენთ შემდეგნაირად

$$v_{M-1/2}u_{\bar{x},M} + \frac{h}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)_M = \psi, \quad (1.2.10)$$

მივიღებთ შემდეგ ნახევრად-დისკრეტულ სქემას:

$$\frac{du}{dt} - (vu_{\bar{x}})_x = 0, \quad (1.2.11)$$

$$\frac{dv}{dt} = -v + g(vu_{\bar{x}}), \quad (1.2.12)$$

$$u(0, t) = 0, \quad v_{M-1/2}u_{\bar{x},M} + \frac{h}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)_M = \psi, \quad t \in [0, T], \quad (1.2.13)$$

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad v(x, 0) = V_0(x), \quad x \in \omega_h^*,$$

რომლის აპროქსიმაცია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(h^2)$ რიგის და შესაბამისად, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.2.2. (1.2.11)-(1.2.13) ნახევრად-დისკრეტული სქემის აპროქსიმაცია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(h^2)$ და იგი კრებადია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ სივრცის ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

ახლა დავამტკიცოთ (1.2.1)-(1.2.3) ამოცანის ამონახსნის კრებადობა უფრო ძლიერ ნორმაში. როცა $x = 1$, სასაზღვრო პირობის აპროქსიმაცია მოვახდინოთ (1.2.10) ფორმულის მიხედვით. (1.2.8) განტოლება ვაინტეგრირებთ t -თი, მაშინ მარტივი გარდაქმნების შედეგად, თუ გამოვიყენებთ ჩადგმის თეორემის სხვაობიან ანალოგს [81], მივიღებთ

$$\max_t |s_{i-1/2}| \leq \frac{C}{h} \int_0^t \|z_{\bar{x}}\| d\tau + \int_0^t |\varphi_2| d\tau \sim O(h).$$

(1.2.7) გავამრავლოთ სკალარულად $\frac{dz}{dt}$ -ზე, მივიღებთ შეფასებას

$$\left\| \frac{dz}{dt} \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v, z_{\bar{x}}^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dt}, z_{\bar{x}}^2 \right) + (\varphi_1, z_t).$$

აქედან თუ გამოვიყენებთ გრონუოლის ლემასა და ჩადგმის თეორემის სხვაობიან ანალოგს [81], მივიღებთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 1.2.3. (1.2.1)-(1.2.3) ამოცანის ამონახსნი კრებადია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა C_h სივრცის ნორმის აზრით და კრებადობის რიგი არის $O(h)$ -ის ტოლი.

§ 3. ერთი არაცხადი სხვაობიანი სქემა

ამ პარაგრაფში შესწავლილია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის შესაბამისი კიდევ ერთი დისკრეტული ანალოგი, კერძოდ, მოცემული ამოცანისთვის აგებულია არაცხადი სხვაობიანი სქემა და დამტკიცებულია მისი თანაბარად კრებადობა ბადურ ფუნქციათა C_h სივრცის ნორმის აზრით.

გამოვიყენოთ ცნობილი აღნიშვნები და კვლავ შემოვიტანოთ $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$ ბადე $\bar{Q} = [0,1] \times [0, T]$ არეზე, სადაც

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, M; \quad h = \frac{1}{M} \right\},$$

$$\omega_\tau = \left\{ t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad \tau = \frac{T}{N} \right\},$$

და შემდეგი სკალარული ნამრავლები და ნორმები:

$$(y, z) = \sum_{i=1}^{M-1} y_i z_i h, \quad (y, z] = \sum_{i=1}^M y_i z_i h,$$

$$\|y\| = (y, y)^{1/2}, \quad \|y\| = (y, y]^{1/2}.$$

აქ, ისევე როგორც ადრე, h არის ბიჯი x -ის მიმართულებით, ხოლო τ კი დროითი ბიჯი $[0, T]$ შუალედზე.

შემოვიღოთ აგრეთვე შემდეგი ცნობილი აღნიშვნები:

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \hat{y} = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1}),$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h}, \quad y_x = \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h},$$

$$y_{\bar{x}x} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2},$$

შევუსაბამოთ (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანას სხვაობიანი სქემა:

$$u_t = (\hat{v}\hat{u}_{\bar{x}})_x, \quad (1.3.1)$$

$$v_t = -\hat{v} + g(\hat{v}\hat{u}_{\bar{x}}), \quad (1.3.2)$$

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad v(x, 0) = V_0(x), \quad (1.3.3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad v_M u_{\bar{x}, M} = \psi.$$

აქ u და v ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.3.1. (1.3.1)-(1.3.3) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h)$ და იგი კრებადია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა C_h სივრცის ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

დამტკიცება. (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ნაცვლად (1.3.1)-(1.3.3) ამოცანის ამოხსნისას ვუშვებთ ცდომილებებს $z = u - U$, $s = v - V$, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$z_t = (\hat{v}\hat{u}_{\bar{x}} - \hat{V}\hat{U}_{\bar{x}})_x + \hat{\phi}_1 \quad (1.3.4)$$

$$s_t = -\hat{s} + g(\hat{v}\hat{u}_{\bar{x}}) - g(\hat{V}\hat{U}_{\bar{x}}) + \hat{\phi}_2, \quad (1.3.5)$$

$$z(0; t) = 0, \quad v_M u_{\bar{x}, M} - V_M U_{\bar{x}, M} = \chi, \quad t \in [0, T], \quad (1.3.6)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad s(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h,$$

სადაც

$$\phi_1 = U_t - (\hat{V}\hat{U}_{\bar{x}})_x = O(\tau + h),$$

$$\phi_2 = -V_t - \hat{V} + g(\hat{V}\hat{U}_{\bar{x}}) = O(\tau + h),$$

$$\chi = O(h).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\Lambda = \nu u_{\bar{x}} - V U_{\bar{x}}$ და (1.3.4) გავამრავლოთ სკალარულად $2\tau\Lambda_{xt}$ -ზე, მივიღებთ

$$(z_t, 2\tau\Lambda_{xt}) = (\widehat{\Lambda}_x, 2\tau\Lambda_{xt}) + (\widehat{\varphi}_1, 2\tau\Lambda_{xt}).$$

უკანასკნელ ტოლობაში, თუ გამოვიყენებთ გრინის პირველ სხვაობიან ფორმულას [81] და გავითვალისწინებთ (1.3.5) და (1.3.6) ტოლობებს, მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ

$$\begin{aligned} & 2\tau(z_{t\bar{x}}, \widehat{\nu}z_{t\bar{x}}] + 2\tau(z_{t\bar{x}}, \nu_t z_{\bar{x}}] + 2\tau(z_{t\bar{x}}, \widehat{s}U_{\bar{x}}] + \\ & + 2\tau(z_{t\bar{x}}, g'(\xi)(\widehat{\nu}\widehat{z}_{\bar{x}} + \widehat{s}U_{\bar{x}})U_{\bar{x}}] - 2\tau(z_{t\bar{x}}, \widehat{s}U_{\bar{x}}] + \\ & + 2\tau(z_{t\bar{x}}, \varphi_2 U_{\bar{x}}] + 2\tau(\widehat{\Lambda}_x, \Lambda_{xt}) + 2\tau(\widehat{\varphi}_1, \Lambda_{xt}) = 2\tau z_{t,M} \chi_t. \end{aligned}$$

ბოლო ტოლობაში, თუ გამოვიყენებთ კოშის უტოლობას, ε - უტოლობას და ავჯამავთ j -ს მიმართ მიღებულ დამოკიდებულებას, მივიღებთ შეფასებას

$$\|\Lambda_x^N\|^2 + \|z_{\bar{x}}^N\|^2 \leq \sum_{j=0}^{N-1} \tau C (\|\Lambda_x\|^2 + \|z_{\bar{x}}\|^2 + |\chi_t|^2 + \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2) \quad (1.3.7)$$

აქ C -ით აღნიშნულია დადებითი კონსტანტა, რომელიც არ არის დამოკიდებული τ და h ბიჯებზე.

თუ (1.3.5) ტოლობაში გამოვიყენებთ ჩადგმის თეორემის სხვაობიან ანალოგს [81]

$$\|R_c\|^2 \leq C(R_M^2 + \|R_x\|^2),$$

რომელიც სამართლიანია ნებისმიერი ბადური ფუნქციისათვის, მივიღებთ შემდეგ უტოლობას

$$|\widehat{s}| \leq |s| + \tau C \sqrt{\Lambda_M^2 + \Lambda_x^2} + \tau |\varphi_2|. \quad (1.3.8)$$

(1.3.7) და (1.3.8) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს **თეორემა 1.3.1-ის** სამართლიანობა.

შენიშვნა 1.3.1. თუ ν დისკრეტულ ფუნქციას განვსაზღვრავთ შემდეგ ბადეზე

$$\omega_h^* = \{x_i = (i - 1/2)h, \quad i = 1, \dots, M\}$$

და სასაზღვრო პირობის აპროქსიმაციას, როცა $x = 1$, მოვახდენთ შემდეგნაირად

$$v_{M-1/2}u_{\bar{x},M} + \frac{h}{2}u_{t,M} = \psi ,$$

მივიღებთ შემდეგ სხვაობიან სქემას:

$$u_t = (\hat{v}\hat{u}_{\bar{x}})_x , \quad (1.3.9)$$

$$v_t = -\hat{v} + g(\hat{v}\hat{u}_{\bar{x}}) , \quad (1.3.10)$$

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad v(x, 0) = V_0(x) , \quad (1.3.11)$$

$$u(0, t) = 0, \quad v_{M-1/2}u_{\bar{x},M} + \frac{h}{2}u_{t,M} = \psi .$$

(1.3.9)-(1.3.11) აპროქსიმაცია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ რიგის და შესაბამისად სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.3.2. (1.3.9)-(1.3.11) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ და იგი კრებადია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა C_h სივრცის ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

ასევე მიჩისონის მიერ შემოთავაზებული დიფუზიური მოდელის [57] ერთგანზომილებიანი (1.1.1), (1.1.2) ანალოგის [9] შესაბამისი პირველი სასაზღვრო ამოცანისათვის აგებულია სხვაობიანი სქემა და შესწავლილია მისი კრებადობის საკითხი ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ სივრცის ნორმის აზრით.

არაწრფივ კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა (1.1.1), (1.1.2) სისტემისათვის $\bar{Q} = [0,1] \times [0,T]$ არეში განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t \in [0, T] , \quad (1.3.12)$$

$$U(x, 0) = U_0(x) , V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in [0,1].$$

ავაგოთ (1.1.1), (1.1.2), (1.3.12) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა სტანდარტული აღნიშვნების გათვალისწინებით [81] :

$$u_t = (vu_{\bar{x}})_x , \quad v_t = -v + g(vu_{\bar{x}}) , \quad (1.3.13)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau, \quad (1.3.14)$$

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \omega_h, \quad v(x, 0) = V_0(x), \quad x \in \omega_h^*$$

(1.3.13) ტოლობებში u ბადური ფუნქცია განსაზღვრულია $\omega_{h\tau}$ ბადეზე, v კი - $\omega_{h\tau}^*$ ბადეზე.

(1.3.13) სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ სკალარულად u -ზე, ხოლო მეორე v -ზე, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ ვღებულობთ შეფასებას, რომელიც ბრაუერის ლემის (უძრავი წერტილის შესახებ) გამოყენებით უზრუნველყოფს (1.3.13), (1.3.14) არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობას. შევნიშნოთ, რომ აგრეთვე ადვილი დასამტკიცებელია თანაფარდობა $\sigma_0 < v < V_0$.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.3.3. (1.3.13), (1.3.14) სხვაობიანი სქემის ამონახსნი $\{u, v\}$ კრებადია (1.1.1), (1.1.2), (1.3.12) ამოცანის $\{U, V\}$ ამონახსნისაკენ $O(\tau + h^2)$ რიგით ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ სივრცის ნორმის აზრით.

დამტკიცება. (1.1.1), (1.1.2), (1.3.12) ამოცანის ნაცვლად (1.3.13), (1.3.14) ამოცანის ამოხსნისას ვუშვებთ ცდომილებებს $z = u - U$, $s = v - V$, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$z_t = (vu_{\bar{x}} - VU_{\bar{x}})_x + \varphi_1, \quad (1.3.15)$$

$$s_t = -s + g(vu_{\bar{x}}) - g(VU_{\bar{x}}) + \varphi_2,$$

$$z(0, t) = z(1, t) = 0, \quad t \in \omega_\tau \quad (1.3.16)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad s(x, 0) = 0, \quad x \in \omega_h^*,$$

სადაც

$$\varphi_1 = U_t + (VU_{\bar{x}})_x = O(\tau + h^2),$$

$$\varphi_2 = -V_t - V + g(VU_{\bar{x}}) = O(\tau + h^2).$$

თუ (1.3.15) სისტემის პირველ განტოლებას გავამრავლებთ სკალარულად z ფუნქციაზე, მეორეს კი s ფუნქციაზე, რამდენიმე მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$(z_t, z) + (s_t, s) \leq C \|s\|^2 + (\varphi_1, z) + (\varphi_2, s),$$

საიდანაც გამომდინარეობს უტოლობა

$$\|z(t)\|^2 + \|s(t)\|^2 \leq C [\|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2].$$

ამით თეორემა 1.3.3 დამტკიცებულია.

§ 4. იტერაციულ მეთოდზე დაფუძნებული სხვაობიანი სქემის შესახებ

მოცემულ პარაგრაფში აგებულია (1.1.7), (1.1.8) იტერაციული პროცესის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა და შესწავლილია მისი კრებადობის საკითხი ბადურ ფუნქციათა C_h სივრცის ნორმის აზრით.

ავაგოთ (1.1.7)-(1.1.8) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა სტანდარტული აღნიშვნების გათვალისწინებით [81]:

$$w_t^n = v^{n-1} + \left[\frac{g(w^{n-1})}{v^{n-1}} - 1 \right] w^{n-1}, \quad (1.4.1)$$

$$v_t^n = -v^n + g(w^{n-1}), \quad (1.4.2)$$

$$w_{x,0}^n = 0, \quad w^n(1, t) = \psi, \quad (1.4.3)$$

$$w^n|_{t=0} = W_0(x), \quad v^n|_{t=0} = V_0(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

(1.4.1)-(1.4.3) იტერაციული ალგორითმი ადვილად რეალიზებადია კომპიუტერზე, რადგან შეიცავს ორ დამოუკიდებელ წრფივ განტოლებას. მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა დროის ყოველ $t = t_{j+1}$ შრეზე ამოიხსნას (1.4.2) განტოლება v ფუნქციის მიმართ, შემდეგ კი (1.4.1)-დან ვიპოვოთ w ფუნქცია სამდიაგონალური მატრიცის მქონე წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.4.1. (1.4.1)-(1.4.3) ამოცანის w^n, v^n ამონახსნი მიისწრაფვის (1.1.7), (1.1.8) ამოცანის W, V ამონახსნისაკენ, როცა $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

§5. დიფუზიური მოდელის პარაბოლური რეგულარიზაცია

მოცემულ პარაგრაფში შესწავლილია პირველ პარაგრაფში განხილული ამოცანის პარაბოლური რეგულარიზაცია [49,66].

აღნიშნულ ამოცანას აქვს სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.5.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V + g \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.5.2)$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1.5.3)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x) \geq \text{Const} > 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

სადაც g, U_0, V_0 მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია, ამასთან $g_0 \leq g(\xi) \leq G_0$; T, g_0, G_0, ε მოცემული დადებითი კონსტანტებია; $\Omega = (0,1)$.

თუ $f \equiv \varphi \equiv 0, \varepsilon = 0$, მაშინ (1.5.1)-(1.5.3) ამოცანაში შემავალი არაწრფივი განტოლებები წარმოადგენს მცენარეთა ფოთლებში ძარღვების ფორმირების მათემატიკურ მოდელის ერთგანზომილებიან ანალოგს [57].

არეზე $[0,1] \times [0, T]$ კვლავ შემოვიტანოთ ბადე, რომლის კვანძითი წერტილებია $(x_i, t_j) = (ih, j\tau)$, სადაც $i = 0, 1, \dots, M$; $j = 0, 1, \dots, N$; $h = \frac{1}{M}$, $\tau = \frac{T}{N}$.

დისკრეტული მიახლოება (x_i, t_j) წერტილში ისევ აღვნიშნოთ u_i^j, v_i^j ბადური ფუნქციებით, ხოლო ამოცანის ზუსტი ამონახსნი იმავე წერტილში კი U_i^j და V_i^j ფუნქციებით.

თუ გამოვიყენებთ სხვაობიანი სქემების აგების სტანდარტულ მეთოდს [81], მივიღებთ (1.5.1)-(1.5.3) ამოცანის შესაბამის დისკრეტულ ანალოგს:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \{v_i^{j+1} u_{i-1}^{j+1} - (v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}) u_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1} u_{i+1}^{j+1}\} + f_i^{j+1}, \quad (1.5.4)$$

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = -v_i^{j+1} + g \left(v_i^j \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \right) + \varepsilon \frac{v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^{j+1}, \quad (1.5.5)$$

$$u_0^j = u_M^j = 0, \quad v_{x,0}^j = v_{x,M}^j \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (1.5.6)$$

$$u_i^0 = U_0(x_i), \quad v_i^0 = V_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (1.5.7)$$

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.5.1. (1.5.4)-(1.5.7) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (1.5.1)-(1.5.3) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h)$ და იგი კრებადია (1.5.1)-(1.5.3) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა C_h სივრცის ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

პარაბოლურად რეგულარიზებული (1.5.1)-(1.5.3) ამოცანის ამონახსნის კრებადობა მიჩისონის ერთგანზომილებიანი მოდელის შესაბამისი ამოცანის ამონახსნისაკენ შესწავლილია [29, 49] ნაშრომებში. ჩვენი მიზანია შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება და მისი ანალიზი.

§ 6. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები

ზემოთ მოყვანილი (1.3.1)-(1.3.3), (1.3.9)-(1.3.11), (1.5.4)-(1.5.7) სქემების გამოყენებით ჩატარებულია მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი. მიღებული ექსპერიმენტების შედეგები შესაბამისობაშია თეორიულ კვლევებთან. ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი მათგანი.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ტესტი, რომელიც შეესაბამება (1.3.1)-(1.3.3) სქემას (ნახ. 1-6).

ტესტურ ექსპერიმენტში ზუსტი ამონახსნი არის:

$$U(x, t) = x^2(1-x)^2 e^t + \psi x e^{-t},$$
$$V(x, t) = x^2 e^t,$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ საწყის და სასაზღვრო პირობებს:

$$U_0(x) = x^2(1-x)^2 + \psi x,$$
$$V_0(x) = x^2,$$
$$U(0, t) = 0, \quad V(1, t) \frac{\partial U}{\partial x}(1, t) = \psi.$$

ტესტში რიცხვითი გათვლები ჩატარებულია მოცემული არაცხადი (1.3.1)-(1.3.3) სქემის გამოყენებით. ამოცანა ამოხსნილია ნიუტონის იტერაციული მეთოდით [72]. შრიდან შრეზე გადავდივართ მაშინ, როცა მომდევნო ორ იტერაციას შორის სხვაობა ნაკლებია ε -ზე.

მაგალითი 2. განვიხილოთ ტესტი, რომელიც შეესაბამება (1.3.9)-(1.3.11) სქემას (ნახ 7-12).

ტესტურ ექსპერიმენტში ზუსტი ამონახსნი არის:

$$u(x, t) = x(1-x)e^{-t} + x^2\psi,$$
$$v(x, t) = \psi \left(x + \frac{h}{2}\right)^2 \frac{1}{2\psi - e^{-t}}.$$

ტესტში რიცხვითი გათვლები ჩატარებულია მოცემული არაცხადი (1.3.9)-(1.3.11) სქემის გამოყენებით. აქაც წინა ტესტის მსგავსად, ამოცანა ამოხსნილია ნიუტონის იტერაციული მეთოდით [72]. შრიდან შრეზე გადავდივართ მაშინ, როცა მომდევნო ორ იტერაციას შორის სხვაობა ნაკლებია ε -ზე.

ორივე ტესტისთვის პარამეტრების მნიშვნელობები შემდეგია:

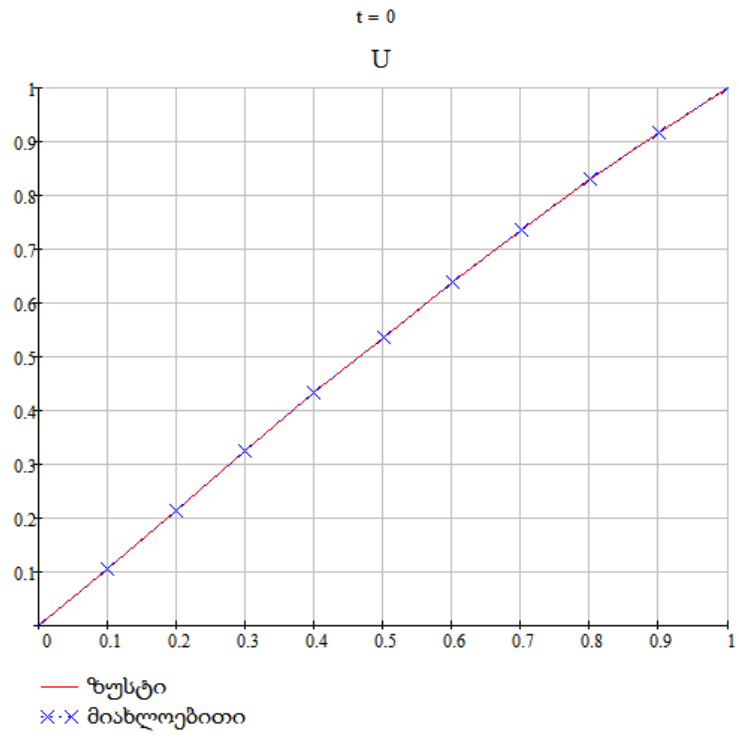
$$M = 10, \quad N = 250, \quad \psi = 0.9, \quad \varepsilon = 0.005.$$

მაგალითი 3. განვიხილოთ ტესტი, რომელიც შეესაბამება (1.5.4)-(1.5.7) სქემას (ნახ 13,14).

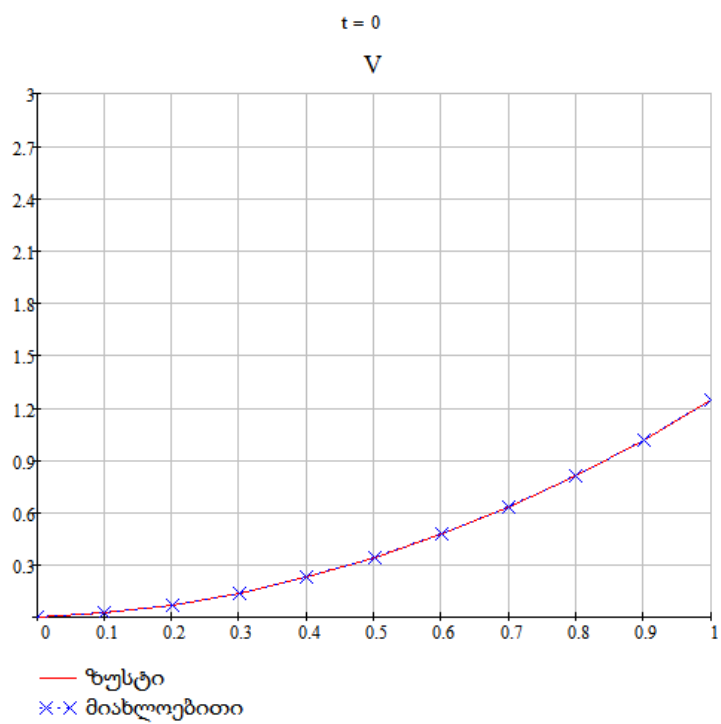
ტესტურ ექსპერიმენტში ზუსტი ამონახსნი არის:

$$u(x, t) = 10x(1 - x)(1 + t)$$

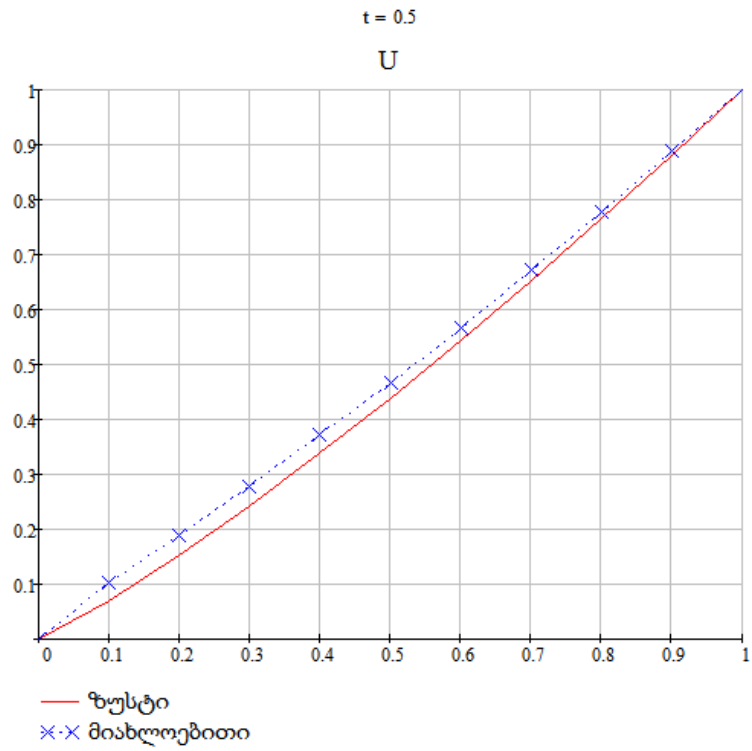
$$v(x, t) = 10(1 - x)x(1 + t + t^2).$$



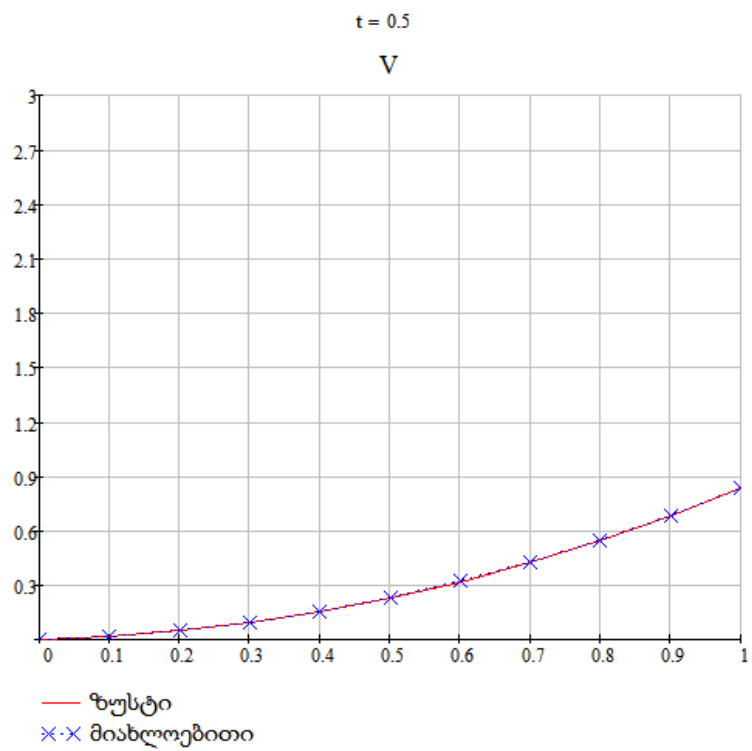
ნახ.1



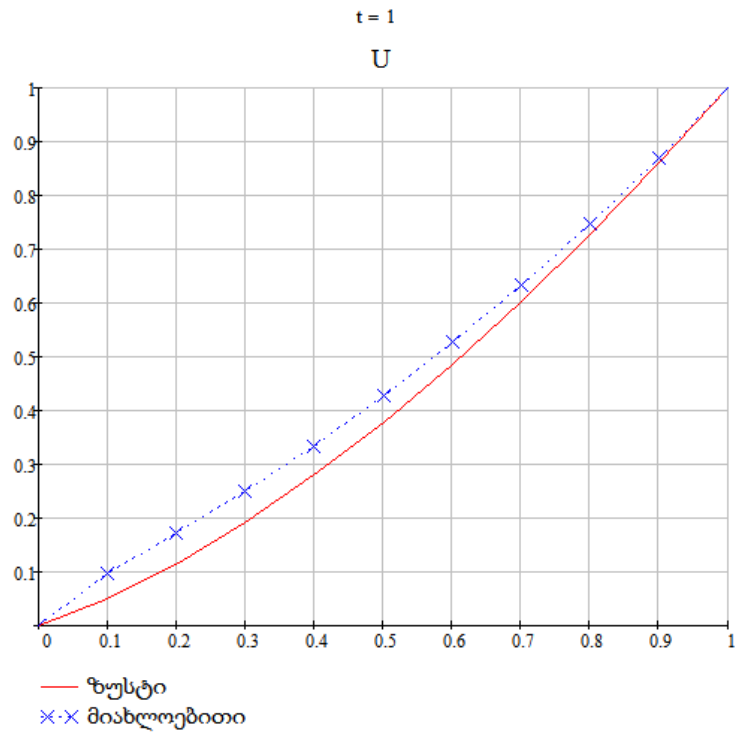
ნახ.2



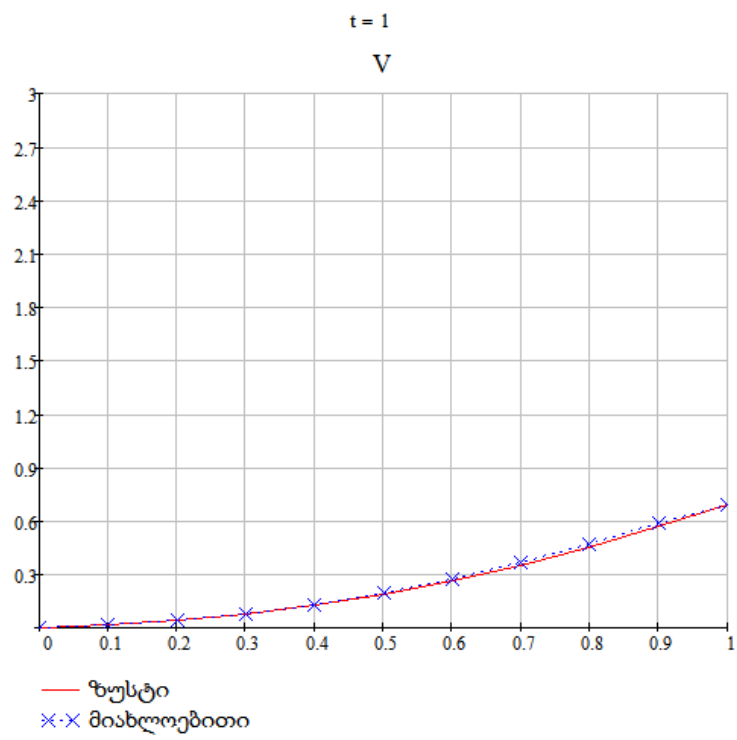
ნახ.3



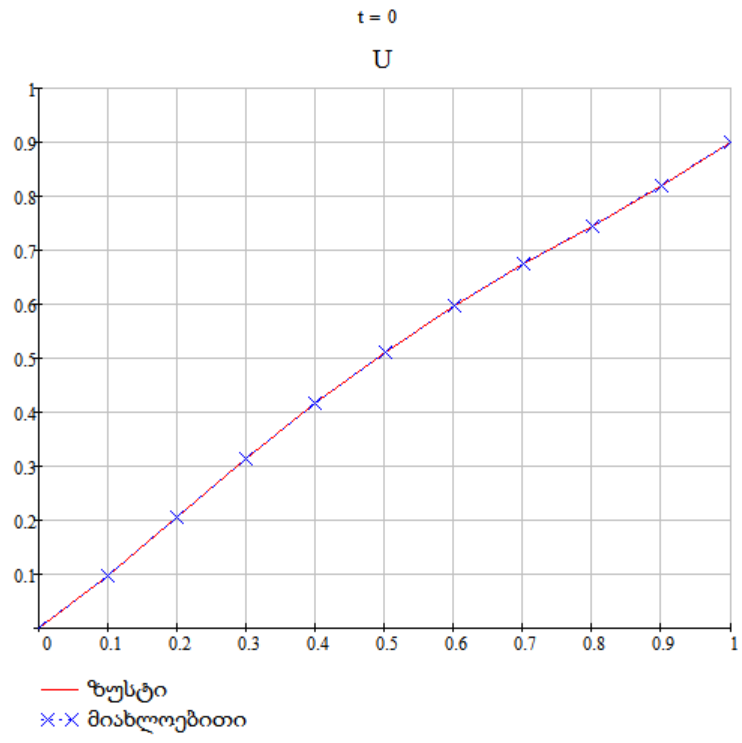
ნახ.4



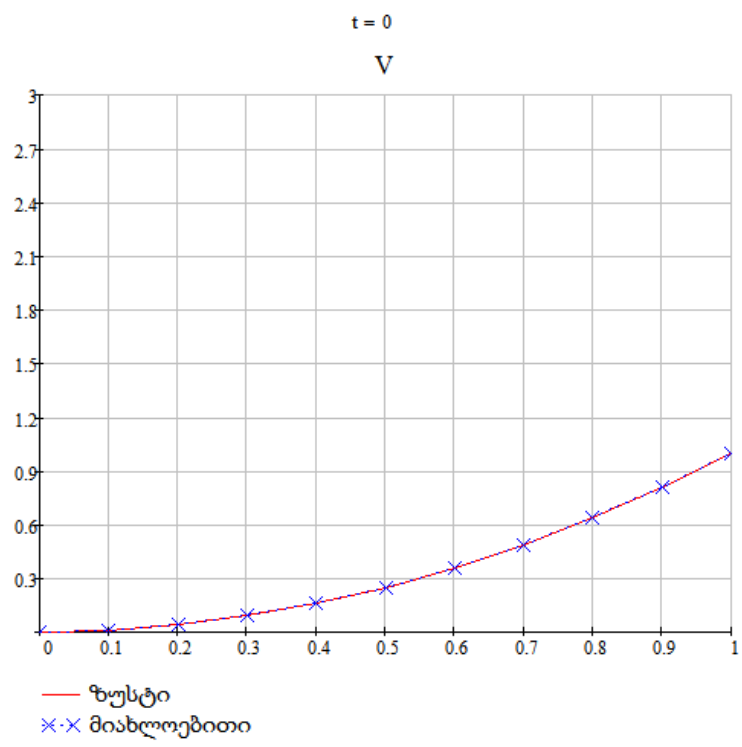
ნახ.5



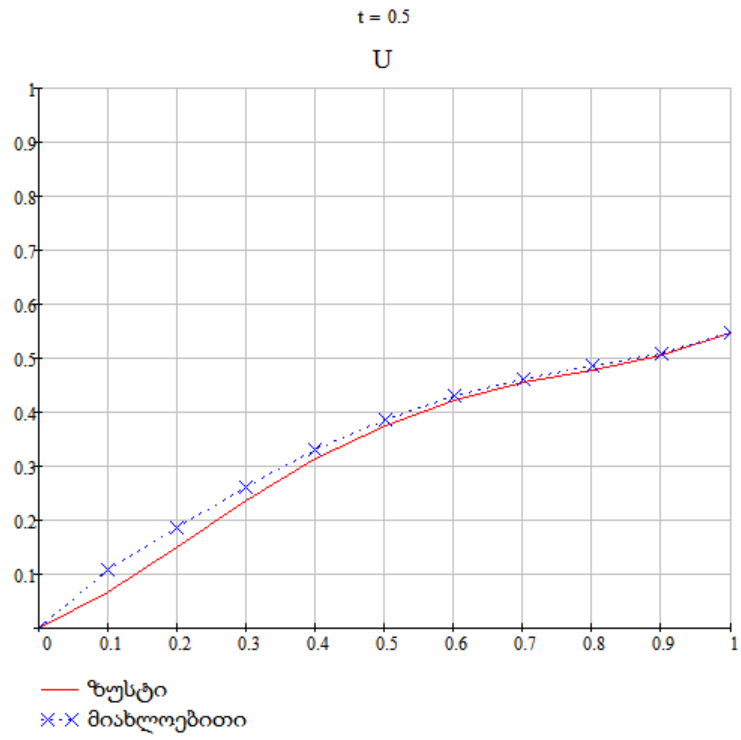
ნახ.6



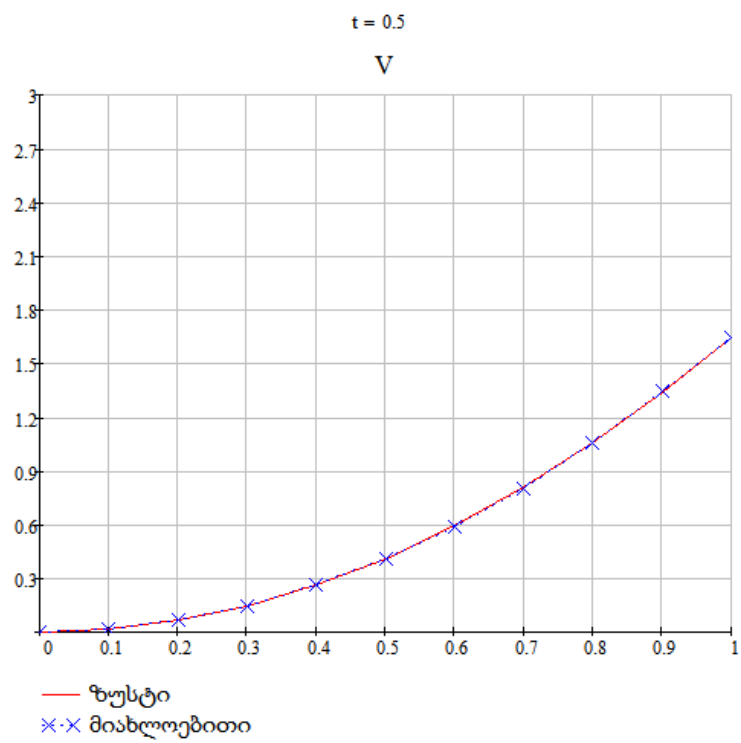
ნახ.7



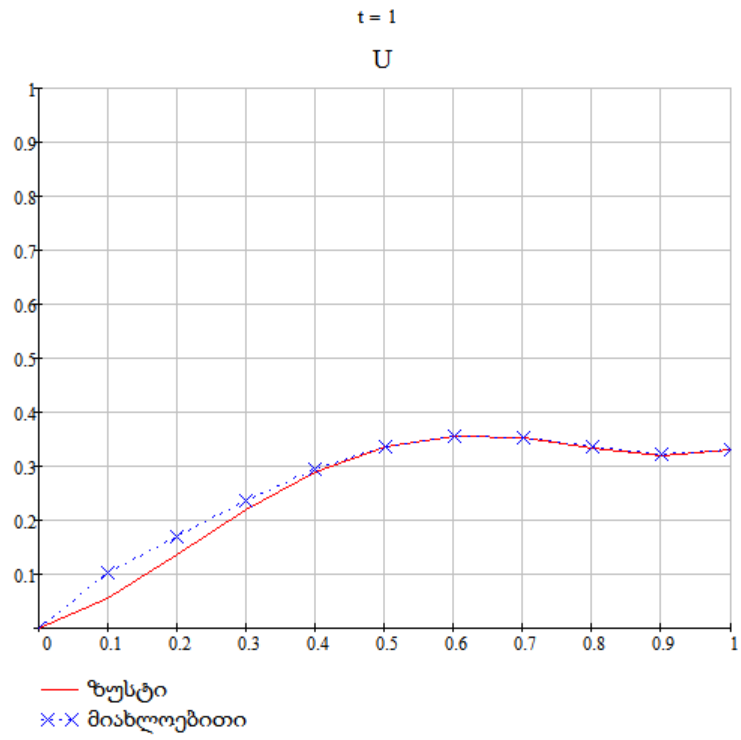
ნახ.8



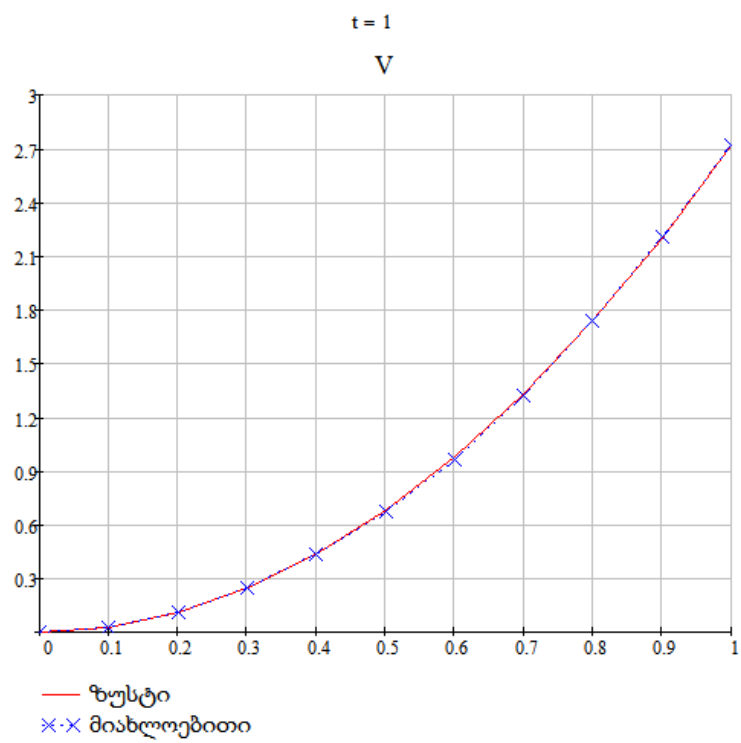
ნახ.9



ნახ.10



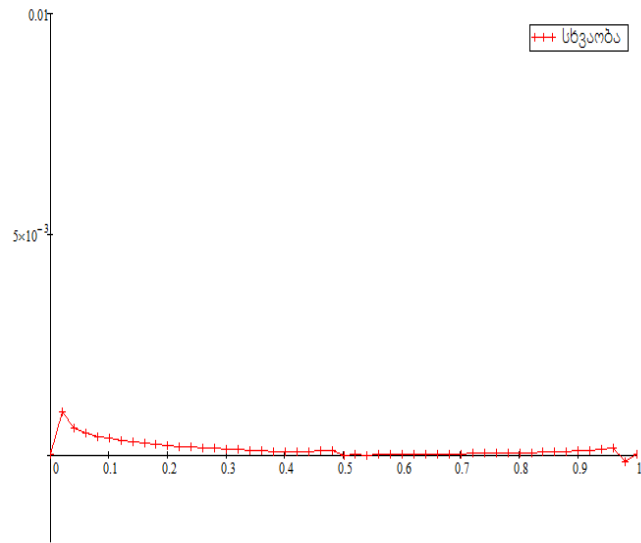
ნახ.11



ნახ.12

$$\varepsilon = 0,001$$

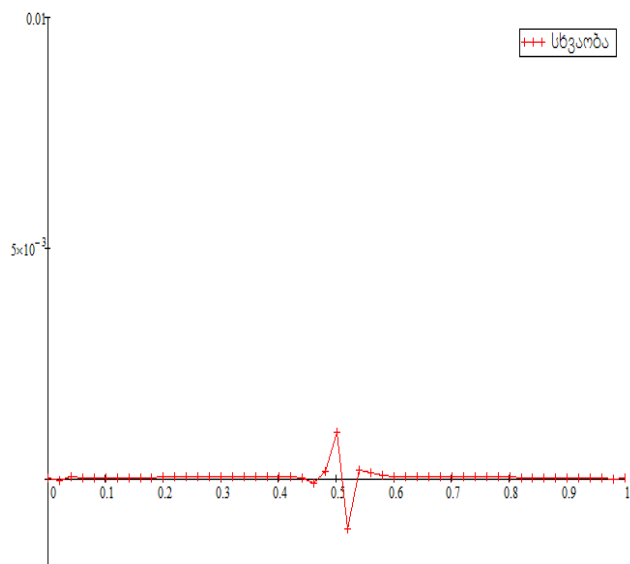
U ფუნქციისათვის სხვაობის გრაფიკი



ნახ. 13

$$\varepsilon = 0,001$$

V ფუნქციისათვის სხვაობის გრაფიკი



ნახ. 14

თავი II

ორი დეკომპოზიციური მოდელი არაწრფივი ორგანზომილებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის

ამ თავში განიხილება სისტემა, რომლის საშუალებითაც აღიწერება ბევრი მნიშვნელოვანი დიფუზიური პროცესი ბიოლოგიაში ფიზიკაში, და მეცნიერებათა სხვა დარგებში. აღნიშნული სისტემისათვის გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანა, აგებულია ჯამური აპროქსიმაციის გასაშუალოებული მოდელი, რომელიც გვევლინება ამ სისტემისთვის ეკონომიური ალგორითმის აგების ერთ-ერთ საუკეთესო მეთოდად. მოცემულია ამოხსნის ალგორითმები და ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და ანალიზი.

§ 1. ამოცანის დასმა

არაწრფივ კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა ორგანზომილებიანი სისტემისათვის

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = -V_2 + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა: $Q = \Omega \times (0, T)$ არეში ვიპოვოთ (2.1.1), (2.1.2) სისტემის ისეთი ამონახსნი (U, V_1, V_2) რომელიც აკმაყოფილებს საწყის და სასაზღვრო პირობებს:

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad V_i(x, y, 0) = V_{i0}(x, y), \quad i = 1, 2, \quad (2.1.3)$$

$$U(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \quad (2.1.4)$$

აქ $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, T - ნებისმიერი ფიქსირებული დადებითი რიცხვია, ხოლო g_i, U_0, V_{i0} მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$V_{i0} \geq \delta_0 = \text{const} > 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2.1.5)$$

$$g_0 \leq g_i(\xi_i) \leq G_0, \quad |g'_i(\xi_i)| \leq G_1, \quad \xi_i \in R, \quad i = 1, 2, \quad (2.1.6)$$

სადაც δ_0, g_0, G_0, G_1 დადებითი მუდვივებია.

ვთქვათ, შესრულებულია შეთანხმებულობის პირობები და არსებობს (2.1.1)–(2.1.4) ამოცანის საკმაოდ გლუვი ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ (2.1.6) დამოკიდებულების გამოყენებით (2.1.2) განტოლებიდან ვღებულობთ შეფასებას [20]

$$\begin{aligned} V_1(x, y, t) &= e^{-t}V_{01}(x, y) + e^{-t} \int_0^t e^\tau g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) d\tau \geq \\ &\geq e^{-t}\delta_0 + e^{-t} \int_0^t g_0 e^\tau d\tau > \sigma_0 > 0, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\begin{aligned} V_2(x, y, t) &= e^{-t}V_{02}(x, y) + e^{-t} \int_0^t e^\tau g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) d\tau \geq \\ &\geq e^{-t}\delta_0 + e^{-t} \int_0^t g_0 e^\tau d\tau > \sigma_0 > 0. \end{aligned}$$

ანალოგიურად გამოდის V_i ფუნქციების ზემოდან შემოსაზღვრულობაც

$$V_i(x, y, t) < V_0 = \text{const}. \quad (2.1.8)$$

§ 2. ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ

მოცემულ პარაგრაფში [20] ნაშრომზე დაყრდნობით დამტკიცებულია თეორემა (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ.

თეორემა 2.1. თუ (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანას გააჩნია კლასიკური ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. დავუშვათ, არსებობს (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის ორი ამონახსნი (U, V_1, V_2) და $(\tilde{U}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$, მაშინ მათი სხვაობებისთვის (Z, S_1, S_2) , სადაც

$$Z = U - \tilde{U}, \quad S_i = V_i - \tilde{V}_i, \quad i = 1, 2$$

გვაქვს

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial Z}{\partial x} + S_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2 \frac{\partial Z}{\partial y} + S_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right), \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -S_1 + \bar{g}_1(x, t) \left(V_1 \frac{\partial Z}{\partial x} + S_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right), \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = -S_2 + \bar{g}_2(x, t) \left(V_2 \frac{\partial Z}{\partial y} + S_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right),$$

$$Z(x, y, 0) = 0, \quad S_i(x, y, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2.2.3)$$

$$Z(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T].$$

აქ

$$\bar{g}_1(x, t) = \int_0^1 g'_1 \left(\theta V_1 \frac{\partial U}{\partial x} + (1 - \theta) \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right) d\theta,$$

$$\bar{g}_2(x, t) = \int_0^1 g'_2 \left(\theta V_2 \frac{\partial U}{\partial y} + (1 - \theta) \tilde{V}_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right) d\theta.$$

გავამრავლოთ (2.2.1), (2.2.2) ტოლობები შესაბამისად Z და S_i ფუნქციებზე და ვაინტეგრირებთ Ω არეზე

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z\|^2 + \left(V_1, \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(V_2, \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right) = - \left(S_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - \left(S_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial y} \right),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_1\|^2 + \|S_1\|^2 &= \left(\bar{g}_1(x, y, t) S_1, V_1 \frac{\partial Z}{\partial x} + S_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_2\|^2 + \|S_2\|^2 &= \left(\bar{g}_2(x, y, t) S_2, V_2 \frac{\partial Z}{\partial y} + S_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

სადაც

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}, \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv dx.$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ [20] ვღებულობთ:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z\|^2 + C \left(\left\| \frac{\partial Z}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial Z}{\partial y} \right\|^2 \right) \leq C(\|S_1\|^2 + \|S_2\|^2),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_1\|^2 + \|S_1\|^2 \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial Z}{\partial x} \right\|^2 + C \|S_1\|^2,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_2\|^2 + \|S_2\|^2 \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial Z}{\partial y} \right\|^2 + C \|S_2\|^2,$$

სადაც ε არის საკმარისად მცირე დადებითი მუდმივი, ხოლო C აქ და შემდგომ აღნიშნავს საზოგადოდ განსხვავებულ მუდმივებს (შემდეგ პარაგრაფებშიც ისინი არ იქნებიან დამოკიდებული τ და h სიდიდეებზე).

მიღებული უტოლობებიდან ბოლო ორი ავჯამოთ და შევკრიბოთ პირველ უტოლობასთან, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} (\|Z\|^2 + \|S_1\|^2 + \|S_2\|^2) \leq K(\|S_1\|^2 + \|S_2\|^2).$$

აქედან (2.2.3) პირობის ძალით და გრონუოლის ლემის გამოყენებით საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$Z \equiv 0, \quad S_1 \equiv 0, \quad S_2 \equiv 0.$$

ამრიგად, (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა დამტკიცებულია.

§ 3. ჯამური აპროქსიმაციის გასაშუალოებული მოდელი

ვთქვათ, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. კვლავ შემოვიტანოთ $[0, T]$ სეგმენტზე ბადე: $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, \dots, N; \tau = \frac{T}{N}\}$ და ყოველ $\Delta_k = [k\tau, (k+1)\tau]$ შუალედში განვიხილოთ U_i^k და V_i^k ($i = 1, 2$) ფუნქციები, რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი გასაშუალოებული ადიტიური მოდელის ამონახსნებს [20]:

$$\eta_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1^k \frac{\partial U_1^k}{\partial x} \right), \quad (2.3.1)$$

$$\eta_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2^k \frac{\partial U_2^k}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial V_1^k}{\partial t} = -V_1^k + g_1 \left(V_1^k \frac{\partial U_1^k}{\partial x} \right), \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial V_2^k}{\partial t} = -V_2^k + g_2 \left(V_2^k \frac{\partial U_2^k}{\partial y} \right),$$

$$U_1^k|_{x=0} = U_1^k|_{x=1} = 0, \quad U_2^k|_{y=0} = U_2^k|_{y=1} = 0, \quad U_i^0(x, 0) = U_0(x), \quad (2.3.3)$$

$$U_i^k(x, y, t_k) = U^{k-1}(x, y, t_k), \quad V_i^k(x, y, t_k) = V_i^{k-1}(x, y, t_k),$$

$$i = 1, 2,$$

სადაც

$$U^k(x, y, t) = \eta_1 U_1^k(x, y, t) + \eta_2 U_2^k(x, y, t), \quad \eta_1, \eta_2 > 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 1.$$

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.3.1. თუ (2.3.1)-(2.3.3) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი (U^k, V_1^k, V_2^k) , მაშინ იგი კრებადია (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის ამონახსნისაკენ (U, V_1, V_2) , როცა $\tau \rightarrow 0$ და ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|U^k(t) - U(t)\|^2 + \|V_1^k(t) - V_1(t)\|^2 + \|V_2^k(t) - V_2(t)\|^2 = O(\tau^{1/2}).$$

დამტკიცება. შემოვიტანოთ ცდომილებები:

$$Z = U^k - U, \quad Z_i = U_i^k - U, \quad S_i = V_i^k - V_i, \quad i = 1, 2.$$

ცხადია, რომ $Z = \eta_1 Z_1 + \eta_2 Z_2$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა : $x_1 = x$, $x_2 = y$.

Z_i და S_i ფუნქციებისთვის გვაქვს ტოლობები:

$$\eta_i \frac{\partial Z_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} - V \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) + A_i U - \eta_i A U, \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = -S_i + g_i \left(V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} \right) - g_i \left(V_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), \quad (2.3.5)$$

სადაც

$$A_i U = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), \quad A U = A_1 U + A_2 U.$$

გავამრავლოთ (2.3.4), (2.3.5) ტოლობები შესაბამისად Z_i და S_i ფუნქციებზე. მარტივი გარდაქმნების შედეგად ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\frac{1}{2} \eta_i \frac{d}{dt} \|Z_i\|^2 = J_i^1 + (A_i U, Z_i) - \eta_i (A U, Z), \quad (2.3.6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_i\|^2 = -\|S_i\|^2 + J_i^2, \quad (2.3.7)$$

სადაც

$$J_i^1 = - \left(V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} - V_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right),$$

$$J_i^2 = \left(g_i \left(V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} \right) - g_i \left(V_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), S_i \right).$$

თუ გავითვალისწინებთ იგივეობას

$$Z_i = Z + \sum_{j=1}^2 \eta_j (U_i^k - U_j^k),$$

(2.3.6) შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{1}{2} \eta_i \frac{d}{dt} \|Z_i\|^2 = J_i^1 - \eta_i (A U, Z_i) + (A_i U, Z) + \left(A_i U, \sum_{j=1}^2 \eta_j (U_i^k - U_j^k) \right). \quad (2.3.8)$$

ახლა შევაფასოთ J_i^1 , J_i^2 და

$$I_i = \sum_{j=1}^2 \eta_i (A_i U, U_i^k - U_j^k)$$

გამოსახულებები.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ V_i^k ფუნქციებისათვის სამართლიანია (2.1.7), (2.1.8)-ის ანალოგიური შეფასებები, მივიღებთ

$$\begin{aligned} J_i^1 + J_i^2 = & - \left(V_i^k, \left(\frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right)^2 \right) - \left(S_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right) + \left(\overline{g_i^k}(x, t) V_i^k, S_i \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right) + \\ & + \left(\overline{g_i^k}(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_i}, S_i^2 \right) \leq -\sigma_0 \left\| \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right\|^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right\|^2 + C \|S_i\|^2. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

აქ შემოტანილია აღნიშვნა

$$\overline{g_i^k}(x, t) = \int_0^1 g_i' \left(\theta V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} + (1 - \theta) V_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) d\theta$$

და რამდენიმეჯერ გამოყენებულია ε - უტოლობა.

თუ ავჯამავთ (2.3.8) და (2.3.9) ტოლობებს i ინდექსის მიმართ ($i = 1, 2$) და ავიღებთ $\varepsilon < \sigma_0$, მაშინ (2.3.9) უტოლობის ძალით მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 (\eta_i \|Z_i\|^2 + \|S_i\|^2) + \sum_{i=1}^2 \|S_i\|^2 \leq K \sum_{i=1}^2 (\|S_i\|^2 + \varphi_i + I_i), \quad (2.3.10)$$

სადაც

$$\varphi_i = (A_i U, Z_i) - \eta_i (A U, Z_i).$$

აღვნიშნოთ, რომ

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0.$$

შევაფასოთ I_i გამოსახულება.

თუ გავითვალისწინებთ იგივეობას

$$U_i^k - U_j^k = \int_{t_k}^t \frac{\partial}{\partial t'} (U_i^k - U_j^k) dt'$$

და დავუშვებთ, რომ $\|A_i U\| < C$, $\|\partial U_i^k / \partial t\| < C$, გვექნება

$$(A_i U, U_i^k - U_j^k) = \left(A_i U, \int_{t_k}^t \frac{\partial}{\partial t^1} (U_i^k - U_j^k) dt \right) \leq C \tau^{1/2}.$$

(2.3.10) უტოლობიდან $t \in \Delta_k$ ცვლადით ინტეგრების შემდეგ, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (\eta_i \|Z_i\|^2 + \|S_i\|^2) &\leq C \sum_{i=1}^2 \int_{t_k}^t \|S_i(t^1)\| dt^1 + \\ &+ \|Z(t_k)\|^2 + \sum_{i=1}^2 \|S_i(t_k)\|^2 + C \tau^{3/2}. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ ნორმის ამოზნექილობას

$$\sum_{i=1}^2 \eta_i \|Z_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^2 \|\eta_i Z_i\|^2 = \|Z\|^2,$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} \|Z(t)\|^2 + \sum_{i=1}^2 \|S_i(t)\|^2 &\leq C \sum_{i=1}^2 \int_{t_k}^t \|S_i(t^1)\|^2 dt^1 + \\ &+ \|Z(t_k)\|^2 + \sum_{i=1}^2 \|S_i(t_k)\|^2 + C \tau^{3/2}. \end{aligned}$$

აქედან ადვილად მიიღება შეფასება

$$\|Z(t)\|^2 + \|S_1(t_k)\|^2 + \|S_2(t_k)\|^2 \leq C \tau^{1/2}.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2.3.1. აღვნიშნოთ, რომ კრებადობის რიგის $O(\tau^{1/4})$ შეფასების გაუმჯობესება თეორემა 2.3.1-ში შესაძლებელია [20]. კერძოდ, თუ დავუშვებთ, რომ $\left| \frac{\partial U_i^k}{\partial t} \right| < C$, მაშინ კრებადობის რიგი იქნება $O(\tau^{1/2})$.

§ 4. ერთი დეკომპოზიციური სხვაობიანი სქემა

გამოვიყენოთ ცნობილი აღნიშვნები [81] და კვლავ ავაგოთ ზადე \bar{Q} არეზე:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad \bar{\omega}_{\alpha h\tau} = \bar{\omega}_{\alpha h} \times \omega_\tau, \quad \alpha = 1, 2, \text{ სადაც}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{(x_i, y_j) = (ih, jh), \quad i, j = 0, 1, \dots, M, \quad Mh = 1\}, \\ \bar{\omega}_{1h} &= \{(x_i, y_j) = ((i - 1/2)h, jh), \quad i, j = 1, \dots, M, \quad Mh = 1\}, \\ \bar{\omega}_{2h} &= \{(x_i, y_j) = (ih, (j - 1/2)h), \quad i, j = 1, \dots, M, \quad Mh = 1\}, \\ \bar{\omega}_\tau &= \{t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad N\tau = T\}, \\ u_x^k &= \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h}, \quad u_{\bar{x}}^k = \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h}, \quad u_t = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau}. \end{aligned}$$

(2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის დისკრეტული ანალოგის ასაგებად და რიცხვითი ექსპერიმენტის ჩასატარებლად ვიყენებთ დეკომპოზიციის მეთოდს.

კერძოდ, უწყვეტი ამოცანის სხვაობიანი ამონახსნის მისაღებად

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad N\tau = T\},$$

ზადის ყოველ ბიჯზე ვხსნით ორ სისტემას:

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{k+1} - u_1^k}{\tau} &= \sigma_1 (v_1^{k+1} u_{1\bar{x}}^{k+1})_x + (1 - \sigma_1) (v_1^k u_{1\bar{x}}^k)_x, \\ \frac{v_1^{k+1} - v_1^k}{\tau} &= -v_1^{k+1} + g_1 (v_1^k u_{1\bar{x}}^k), \end{aligned}$$

$$u_1(x_i, y_j, t_k) = u_2(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad u_1(x_i, y_j, 0) = U_0(x_i, y_j), \quad (2.4.1)$$

$$(x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h, \quad v_1(x_i, y_j, 0) = V_{01}(x, y), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{1h},$$

$$\begin{aligned} u_1(0, y_j, t_{k+1}) &= 0, \quad u_1(1, y_j, t_{k+1}) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \\ k &= 0, 1, \dots, N - 1; \end{aligned}$$

$$\frac{u_2^{k+1} - u_2^k}{\tau} = \sigma_2 (v_2^{k+1} u_{2\bar{y}}^{k+1})_y + (1 - \sigma_2) (v_2^k u_{2\bar{y}}^k)_y,$$

$$\frac{v_2^{k+1} - v_2^k}{\tau} = -v_2^{k+1} + g_2(v_2^k u_{2y}^k),$$

$$u_2(x_i, y_j, t_k) = u_1(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h, \quad (2.4.2)$$

$$v_2(x_i, y_j, 0) = V_{02}(x, y), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$u_2(x_i, 0, t_{k+1}) = 0, \quad u_1(x_i, 1, t_{k+1}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, M, \\ k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

აქ $\sigma_1, \sigma_2 \in]0, 1]$; u_1 და u_2 ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, v_1 და v_2 კი $\bar{\omega}_{1h\tau}$ და $\bar{\omega}_{2h\tau}$ ბადეებზე შესაბამისად.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ საწყისი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნების მნიშვნელობები $t = t_k$ შრის წერტილებში, საჭიროა დროის ყოველ შუალედში ჯერ ამოვხსნათ (2.4.1) ამოცანა (u_1, v_1) -ს მიმართ, ხოლო შემდეგ (2.4.2) ამოცანა (u_2, v_2) -ს მიმართ, ამასთან (2.4.2) ამოცანაში საწყის პირობას ვსაზღვრავთ (2.4.1) ამოცანის ამონახსნის მიხედვით. საწყისი ამოცანის საბოლოო მიახლოებით ამონახსნს წარმოადგენს (u_2, v_1, v_2) .

აღნიშნული მეთოდი არის მიმდევრობითი ტიპის დეკომპოზიციის მეთოდი.

მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად შეიძლება გამოყენებულ იქნას აგრეთვე პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის მეთოდი, ანუ დროის ყოველ შუალედში პარალელურად ამოიხსნას ამოცანა როგორც (u_1, v_1) -ს, ისე (u_2, v_2) -ს მიმართ და საბოლოო ამონახსნად გამოცხადდეს მათი საშუალო არითმეტიკული.

სამართლიანია შემდეგი დებულება [41].

თეორემა 2.4.1. (2.4.1), (2.4.2) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ და იგი კრებადია (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ სივრცის ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

ჩვენი მიზანია (2.1.1)-(2.1.4) ამოცანისათვის აგებული დისკრეტული ანალოგისათვის შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება და მისი ანალიზი.

§ 5. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები

(2.1.1)-(2.1.4) ამოცანის დისკრეტული ანალოგის ასაგებად და რიცხვითი ექსპერიმენტის ჩასატარებლად გამოვიყენეთ დეკომპოზიციისა და ჯამური აპროქსიმაციის გასაშუალოებული მეთოდები. მიღებული ექსპერიმენტების შედეგები სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ კვლევებთან. გაკეთებულია ორივე მეთოდის შედარებითი ანალიზი. ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი მათგანი.

ორივე სქემისათვის ჩვენ შევარჩიეთ მარჯვენა მხარე ისე, რომ ზუსტი ამონახსნი იყოს:

$$U(x_1, x_2, t) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t),$$

$$V_1(x_1, x_2, t) = 1 + (\sin(2\pi x_1))^2 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t + t^2),$$

$$V_2(x_1, x_2, t) = 1 + x_1 (\sin(2\pi x_2))^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t + t^3),$$

და

$$g_\alpha(\xi) = \frac{2 + \xi^2}{1 + \xi^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

პარამეტრის მნიშვნელობები შემდეგია: $M_1 = M_2 = 20$, $N = 800$.

ცხრილი 1. ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები დროის სხვადასხვა

მნიშვნელობებისათვის (შეესაბამება ჯამური აპროქსიმაციის მეთოდით დათვლილ ტესტურ ექსპერიმენტს).

t	ცდომილება u ფუნქციისთვის	ცდომილება v_1 ფუნქციისთვის	ცდომილება v_2 ფუნქციისთვის
0.2	0,00006973950435170	0,00001634140038553	0,00001662571352523
0.4	0,00007422011594080	0,00003786305693865	0,00003781271060488
0.5	0,00007639471824901	0,00004965015524427	0,00004799728057736
0.6	0,00007890208614024	0,00006202878270467	0,00005790906416947
0.8	0,00008480943243865	0,00008875495749039	0,00007978157763566
1.0	0,00009205402490850	0,00011818090303972	0,00010625023389577

ცხრილი 2. ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები დროის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის (შეესაბამება დეკომპოზიციის მეთოდით დათვლილ ტესტურ ექსპერიმენტს).

t	ცდომილება u ფუნქციისთვის	ცდომილება v_1 ფუნქციისთვის	ცდომილება v_2 ფუნქციისთვის
0.2	0,00026282891931262	0,00015043941254533	0,00015942341679875
0.4	0,00030779909582776	0,00033288205500392	0,00031116318510116
0.5	0,00033020062465502	0,00043651095308284	0,00040913243852891
0.6	0,00035248643202719	0,00054919496691519	0,00051581215077778
0.8	0,00039670184735482	0,00097361502202231	0,00089524191758539
1.0	0,00045611662620182	0,00180353622641105	0,00171215438856742

ასევე აღვნიშნოთ, რომ ცდომილების ენერგეტიკული ნორმა კლებულებს მეორე რიგით სივრცითი ბიჯის მიმართ და წრფივად დროითი ბიჯის მიმართ, როგორც ეს თეორიული კვლევებიდან იყო მოსალოდნელი. ცხრილებში 3-8 მოცემულია კრებადობის რიგები სივრცითი და დროითი ცვლადების

სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის ჯამური აპროქსიმაციის მეთოდით დათვლილი ტესტური ექსპერიმენტისთვის ($h_1 = h_2 = h$).

ცხრილი 3. u ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა $t = 0.5$.

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,0003049579762	1,99706564824331	0,99853282412166
0.05	0.00125	0,0000763947182	1,99329673448354	0,99664836724177
0.04	0.0008	0,0000489658075	1,99900718063099	0,99950359031549
0.025	0.0003125	0,0000191361959	2,00040184921273	1,00020092460637
0.02	0.0002	0,0000122460672		

ცხრილი 4. v_1 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა $t = 0.5$.

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00020510126667	2,04646626785852	1,02323313392926
0.05	0.00125	0,00004965015524	2,08926869651192	1,04463434825596
0.04	0.0008	0,00003114939057	2,04194122988735	1,02097061494367
0.025	0.0003125	0,00001193022257	2,04305120660462	1,02152560330231
0.02	0.0002	0,00000756234396		

ცხრილი 5. v_2 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა

$$t = 0.5.$$

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00020355131770	2,08436798762681	1,04218399381340
0.05	0.00125	0,00004799728058	2,04811055150060	1,02405527575030
0.04	0.0008	0,00003039024573	2,01743166712515	1,00871583356257
0.025	0.0003125	0,00001177432705	1,99948484961962	0,99974242480981
0.02	0.0002	0,00000753643559		

ცხრილი 6. u ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა

$$t = 1.$$

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,0003648648115	1,98680931328549	0,99340465664275
0.05	0.00125	0,0000920540249	1,99260708814319	0,99630354407159
0.04	0.0008	0,0000590118463	1,99808656880015	0,99904328440008
0.025	0.0003125	0,0000230722424	2,00073405466239	1,00036702733120
0.02	0.0002	0,0000147638166		

ცხრილი 7. v_1 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა

$$t = 1.$$

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
-----	-----	-----------	----------------------------------	-------------------------------------

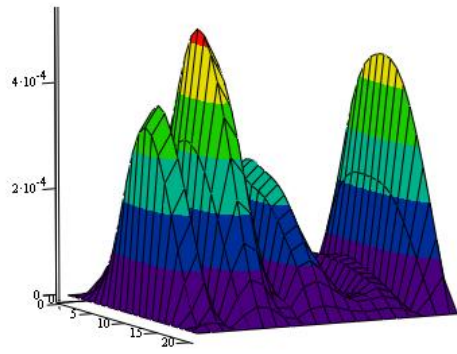
0.1	0.005	0,00049365131676	2,06249544749296	1,03124772374648
0.05	0.00125	0,00011818090304	2,03180813649124	1,01590406824562
0.04	0.0008	0,00007510083250	2,05539272685836	1,02769636342918
0.025	0.0003125	0,00002858235595	2,01332811602830	1,00666405801415
0.02	0.0002	0,00001823838459		

ცხრილი 8. v_2 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა $t = 1$.

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00043667280043	2,03908665384607	1,01954332692304
0.05	0.00125	0,00010625023389	2,03770242155969	1,01885121077985
0.04	0.0008	0,00006743046065	2,02049926827801	1,01024963413901
0.025	0.0003125	0,00002608746329	2,02948734438797	1,01474367219398
0.02	0.0002	0,00001658647911		

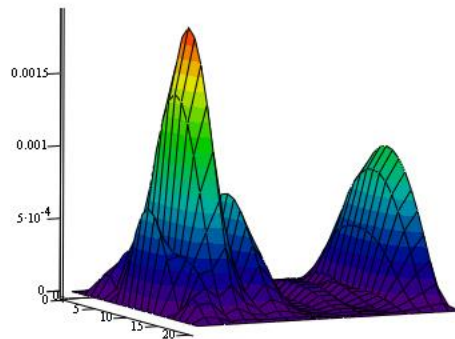
ნახაზი 1-3 შეესაბამება U , V_1 და V_2 ფუნქციებისათვის ჯამური აპროქსიმაციისა და დეკომპოზიციის მეთოდით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტისათვის მიღებული მიახლოებითი ამონახსნების სხვაობებს.

U



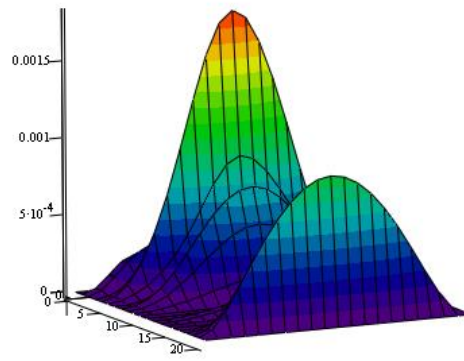
бсб. 1

V1



бсб. 2

V2



бсб. 3

თავი III

ცვალებადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემის აგება და გამოკვლევა ორგანზომილებიანი მოდელისთვის

ამ თავში მოყვანილია მცენარეთა ფოთლებში მიმდინარე მარღვოვანი განვითარების ბიოლოგიური პროცესის აღმწერი მათემატიკური მოდელის ორგანზომილებიანი სისტემა. აგებული და გამოკვლეულია ცვალებადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემა. აქვე არის გადმოცემული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი. მოყვანილია მრავალი ტესტური გათვლის გრაფიკული და ცხრილური ილუსტრაცია და ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების ანალიზი. ანალოგიური კუთხით საკითხის გამოკვლევა დაწყებულია [40] შრომაში. მას მოყვა მრავალი გაგრძელება [41-45, 49, 61-65]. ამ თავში გადმოცემულია მასალა, რომელიც ძირითადად დაფუძნებულია დისერტაციის ავტორის თანაავტორობით შესრულებულ [45] ნაშრომზე.

§1. მცენარეთა ფოთლების მარღვოვანი განვითარების მათემატიკური მოდელი

ცილინდრში $\Omega \times (0, T)$ განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(V_1) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_2(V_2) \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = -V_2 + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (3.1.3)$$

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad V_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad V_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (3.1.4)$$

$$U(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3.1.5)$$

სადაც $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\partial\Omega$ არის Ω არის საზღვარი, T ფიქსირებული დადებითი რიცხვია, $U_0, V_{\alpha 0}, g_\alpha$ არიან მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$V_{\alpha 0}(x) \geq \delta_0 \geq 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (3.1.6)$$

$$\gamma_0 < g_\alpha(\xi_\alpha) \leq G_0, \quad |g'_\alpha(\xi_\alpha)| \leq G_1, \quad \xi_\alpha \in R, \quad \alpha = 1,2, \quad (3.1.7)$$

სადაც $\delta_0, \gamma_0, G_0, G_1$ დადებითი მუდმივებია.

ვთქვათ, შესრულებულია შეთანხმებულობის პირობები და არსებობს (3.1.1)-(3.1.5) ამოცანის საკმაოდ გლუვი ამონახსნი. აღვნიშნოთ, რომ (3.1.1)-(3.1.5) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა შესწავლილია [20] შრომაში.

ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტებს [20, 40]: (3.1.4) და (3.1.6) დამოკიდებულებების გამოყენებით (3.1.2) და (3.1.3) განტოლებებიდან, როგორც წინა თავში იყო განხორციელებული, ვღებულობთ

$$V_\alpha(x, y, t) \geq \sigma_0 = const, \quad (x, y, t) \in \bar{Q}, \quad \alpha = 1,2. \quad (3.1.8)$$

ანალოგიურად ადგილი აქვს ასევე V_α ფუნქციების ზემოდან შემოსაზღვრულობასაც

$$V_\alpha(x, y, t) \leq \Delta_0 = const, \quad (x, y, t) \in \bar{Q}, \quad \alpha = 1,2. \quad (3.1.9)$$

და ბოლოს (3.1.2), (3.1.3), (3.1.7), (3.1.9) თანაფარდობების გამოყენებით გვაქვს

$$\left| \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} \right| \leq C, \quad (x, y, t) \in \bar{Q}, \quad \alpha = 1,2. \quad (3.1.10)$$

აღვნიშნოთ, რომ (3.1.8) უტოლობა გარანტირებს (3.1.1) განტოლების პარაბოლურობას U ფუნქციის მიმართ. (3.1.8) და (3.1.9) შეფასებები გვაძლევს V_1 და V_2 ფუნქციების სტაბილურობას. ასევე აღსანიშნავია, რომ (3.1.8) - (3.1.10)

შეფასებები საჭიროა თეორემა 3.3.1-ში მოცემული აპროქსიმაციის ცდომილებების შესაფასებლად. ქვემოთ ანალოგიური თვისებები მოყვანილია ასევე დისკრეტული ფუნქციებისთვისაც.

§2. ცვალეზადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემა

ამ პარაგრაფში მოცემულია და შემდეგ შესწავლილია ორგანზომილებიანი (3.1.1)-(3.1.3) მოდელის შესაბამისი ცვალეზადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემა.

აღვნიშნოთ, რომ (3.1.1)-(3.1.3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი მეორე სასაზღვრო ამოცანისათვის [43]-ში აგებულია ცვალეზადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემა და შესწავლილია მისი კრებადობის საკითხი.

გამოვიყენოთ ცნობილი აღნიშვნები და შემოვიტანოთ ზადეები \bar{Q} არეზე:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad \bar{\omega}_{\alpha h\tau} = \bar{\omega}_{\alpha h} \times \omega_\tau, \quad \alpha = 1, 2, \text{ სადაც:}$$

$$\bar{\omega}_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh), \quad i, j = 0, 1, \dots, M, \quad Mh = 1\},$$

$$\bar{\omega}_{1h} = \{(x_i, y_j) = ((i - 1/2)h, jh), \quad i, j = 1, \dots, M, \quad Mh = 1\},$$

$$\bar{\omega}_{2h} = \{(x_i, y_j) = (ih, (j - 1/2)h), \quad i, j = 1, \dots, M, \quad Mh = 1\},$$

$$\omega_h = \Omega \cap \bar{\omega}_h, \quad \gamma_h = \bar{\omega}_h / \omega_h, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau, \quad k = 0, \dots, N, \quad N\tau = T\}.$$

განვსაზღვროთ შემდეგი სკალარული ნამრავლები და ნორმები y და z დისკრეტული ფუნქციებისთვის $\bar{\omega}_h$ ზადეზე:

$$(y, z) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} y_{ij} z_{ij} h^2,$$

$$(y, z]_1 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{M-1} y_{ij} z_{ij} h^2,$$

$$(y, z]_2 = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^M y_{ij} z_{ij} h^2,$$

$$\|y\| = (y, y)^{1/2}, \quad \|y\|_1 = (y, y]_1^{1/2}, \quad \|y\|_2 = (y, y]_2^{1/2}.$$

შესაბამისი სკალარული ნამრავლები და ნორმები $\bar{\omega}_{ah}$ ბადეზე განისაზღვრება ანალოგიურად.

ასევე შემოვიღოთ შემდეგი ცნობილი აღნიშვნები:

$$u = u_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_k), \quad \hat{u} = u_{i,j}^{k+1} = u(x_i, y_j, t_{k+1}),$$

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h}, \quad u_{\bar{y}} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{h},$$

$$u_x = \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h}, \quad u_y = \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h},$$

$$u_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2}, \quad u_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2}.$$

სასრული სხვაობები $\bar{\omega}_{ah}$ ბადეზე მოცემული ფუნქციებისთვის განისაზღვრება ანალოგიურად.

შევუსაბამოთ (3.1.1) - (3.1.5) ამოცანას შემდეგი ცვალებადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (v_2 u_{2\bar{y}})_y, \quad (3.2.1)$$

$$u_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}})_y, \quad (3.2.2)$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}), \quad (3.2.3)$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}), \quad (3.2.4)$$

$$u_1(x, y, 0) = u_2(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_h, \quad (3.2.5)$$

$$v_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad (3.2.6)$$

$$(x, y) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad v_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau, \quad (3.2.7)$$

სადაც (3.2.1)-(3.2.4) ტოლობებში დისკრეტული u_1 და u_2 ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, ხოლო v_α ფუნქცია კი - $\bar{\omega}_{\alpha h\tau}$ ბადეზე.

(3.1.1)-(3.1.5) ამოცანის ზუსტი ამონახსნებისათვის გვაქვს შემდეგი სხვაობიანი სქემა:

$$U_t = (\hat{V}_1 \hat{U}_{1\bar{x}})_x + (V_2 U_{2\bar{y}})_y + \varphi_1, \quad (3.2.8)$$

$$U_t = (\hat{V}_1 \hat{U}_{1\bar{x}})_x + (\hat{V}_2 \hat{U}_{2\bar{y}})_y + \varphi_2, \quad (3.2.9)$$

$$V_{1t} = -\hat{V}_1 + g_1(V_1 U_{1\bar{x}}) + \chi_1, \quad (3.2.10)$$

$$V_{2t} = -\hat{V}_2 + g_2(V_2 U_{2\bar{y}}) + \chi_2, \quad (3.2.11)$$

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_h, \quad (3.2.12)$$

$$V_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad (3.2.13)$$

$$V_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), \quad x \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$U(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau. \quad (3.2.14)$$

(3.2.1) - (3.2.7) სხვაობიანი სქემა ეკონომიურია, ვინაიდან $t = t_{j+1}$ შრეზე მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა მიმდევრობით ამოიხსნას (3.2.1), (3.2.3) განტოლებათა სისტემა \hat{v}_1, \hat{u}_1 ფუნქციების მიმართ, შემდეგ კი (3.2.2), (3.2.4) განტოლებათა სისტემა \hat{v}_2, \hat{u}_2 ფუნქციების მიმართ უკვე ნაპოვნი \hat{v}_1, \hat{u}_1 ფუნქციების გამოყენებით. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ მოყვანილი ალგორითმი არ საჭიროებს იტერაციულ პროცესის გამოყენებას, რადგან \hat{v}_α ფუნქციას (3.2.3) და (3.2.4) ტოლობებიდან ცხადად, შემდეგ კი \hat{u}_α ფუნქციას ვპოულობთ სამდიაგონალური მატრიცის მქონე წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით.

თეორემა 3.2.1. (3.2.1) - (3.2.4) სხვაობიანი სქემა (3.1.1) - (3.1.3) სისტემას საკმაოდ გლუვ U, V_1, V_2 ამონახსნებზე უკეთეს აპროქსიმაციას და აპროქსიმაციის რიგია:

$$\varphi_1 = O(\tau + h^2), \quad \varphi_2 = O(\tau + h^2),$$

$$\chi_1 = O(\tau + h^2), \quad \chi_2 = O(\tau + h^2).$$

φ_1 და φ_2 ცდომილებებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\varphi_1 = U_t - (\hat{V}_1 \hat{U}_{1\bar{x}})_x - (V_2 U_{2\bar{y}})_y = \varphi_2 + (\hat{V}_2 \hat{U}_{2\bar{y}})_y - (V_2 U_{2\bar{y}})_y. \quad (3.2.15)$$

ცნობილი მეთოდოლოგიის გამოყენებით არ არის ძნელი თეორემა 3.2.1-ის დამტკიცება. რაც შეეხება (3.2.15) გამოსახულებას, ის პირდაპირ მიიღება (3.2.8) და (3.2.9) ტოლობებიდან.

§ 3. ცვალებადი მიმართულებების (3.2.1)-(3.2.7) სქემის მდგრადობა

მოცემულ პარაგრაფში დამტკიცებულია (3.1.1)-(3.1.5) დიფერენციალური ამოცანის შესაბამისი (3.2.1)-(3.2.7) ცვალებადი მიმართულებების სქემის მდგრადობა.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3.3.1. თუ (3.1.1) - (3.1.5) დიფერენციალურ ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2 , მაშინ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი რომ ყოველი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის (3.2.1) - (3.2.7) სქემა აბსოლიტურად მდგრადია საწყისი პირობების მიმართ და სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \leq e^{CT} \left\{ \|(V_{10} U_{0\bar{x}})_x\|^2 + \|U_{0\bar{x}}\|_1^2 + \left\| (V_{20} U_{0\bar{y}})_y \right\|^2 + \|U_{0\bar{y}}\|_2^2 \right\},$$

$$0 < c < v_\alpha(x, y, t) \leq C, \quad (x, y, t) \in \bar{\omega}_{\alpha h\tau}, \quad \alpha = 1, 2,$$

სადაც c და C აქ და შემდგომშიც აღნიშნავს დადებით მუდმივებს, რომლებიც არ არიან დამოკიდებულნი τ, h სიდიდეებზე.

დამტკიცება. (3.2.3), (3.2.4) დიფერენციალური განტოლებებიდან, $V_{\alpha 0}$ და g_α ფუნქციებზე (3.1.6), (3.1.7) შეზღუდვების გამოყენებით, ადვილად ვღებულობთ (3.1.8)–(3.1.10) შეფასებების ანალოგიურ შეფასებებს:

$$c < v_\alpha(x, y, t) \leq C, \quad |v_{\alpha t}(x, y, t)| \leq C, \quad (x, y, t) \in \bar{\omega}_{\alpha h\tau}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.3.1)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $A_1 = (v_1 u_{1\bar{x}})_x$, $A_2 = (v_2 u_{2\bar{y}})_y$ და გავამრავლოთ (3.2.1) და (3.2.2) ტოლობები სკალარულად τA_{1t} და τA_{2t} ფუნქციებზე შესაბამისად. x და y ცვლადების მიმართ ნაწილობითი ინტეგრების დისკრეტული ანალოგისა და შემდეგი მარტივი ტოლობის გამოყენებით,

$$\begin{aligned} & \tau[(\hat{A}_1, A_{1t}) + (A_2, A_{1t}) + (\hat{A}_1, A_{2t}) + (\hat{A}_2, A_{2t})] \\ &= \frac{1}{2} \|\hat{A}_1 + \hat{A}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) - \frac{1}{2} \|A_1 + A_2\|^2, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

(3.2.7) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_1 + \hat{A}_2\|^2 + \tau^2 (\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) + \tau(\hat{v}_1 u_{1\bar{x}t}, u_{1\bar{x}t}]_1 + (\hat{v}_2 u_{2\bar{y}t}, u_{2\bar{y}t}]_2 \\ & + \tau(v_1 u_{1\bar{x}t}, u_{1\bar{x}t}]_1 + (v_2 u_{2\bar{y}t}, u_{2\bar{y}t}]_2 = \|A_1 + A_2\|^2. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

(3.3.1) შეფასებებისა და ε -უტოლობის გამოყენებით (3.3.3) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_1 + A_2\|^2 + \tau^2 (\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) + \tau(c - \varepsilon C) \left(\|u_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) \\ & \leq \|A_1 + A_2\|^2 + \frac{\tau C}{\varepsilon} \left(\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

მიღებული უტოლობის ორივე მხარეში

$$\tau(u_{1t\bar{x}}, \hat{u}_{1\bar{x}} + u_{1\bar{x}})_1 + \tau(u_{2t\bar{y}}, \hat{u}_{2\bar{y}} + u_{2\bar{y}})_2$$

წევრის მიმატებით გვექნება

$$\begin{aligned}
& \|\hat{A}_1 + A_2\|^2 + \tau^2(\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) + \tau(c - \varepsilon C) \left(\|u_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \|\hat{u}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{u}_{2\bar{y}}\|_2^2 \\
& \leq \|A_1 + A_2\|^2 + \left(\frac{\tau C}{\varepsilon} + 1 \right) \left(\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) + \tau \varepsilon \left(\|u_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) \\
& \quad + \frac{\tau}{2\varepsilon} \left(\|\hat{u}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{u}_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right).
\end{aligned}$$

მსგავსი წევრების შეკრება გვაძლევს

$$\begin{aligned}
& \|\hat{A}_1 + \hat{A}_2\|^2 + \tau^2(\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) + \tau(c - \varepsilon - \varepsilon C) \left(\|u_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) \\
& \quad + \left(1 - \frac{\tau}{2\varepsilon} \right) \left(\|\hat{u}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{u}_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \tag{3.3.4} \\
& \leq \|A_1 + A_2\|^2 + \left(1 + \frac{\tau}{2\varepsilon} + \frac{\tau C}{\varepsilon} \right) \left(\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right).
\end{aligned}$$

ავიღოთ $\varepsilon > 0$ ისე, რომ $c - \varepsilon - \varepsilon C > 0$ და ავირჩიოთ დროითი τ ბიჯი $0 < 1 - \frac{\tau}{2\varepsilon} < 1$ ე.ი. $0 < \tau < 2\varepsilon$ პირობის თანახმად. მაშინ (3.3.4) უტოლობა გვაძლევს

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\tau}{2\varepsilon} \right) \left(\|\hat{A}_1 + \hat{A}_2\|^2 + \tau^2\|A_{1t}\|^2 + \tau^2\|A_{2t}\|^2 + \|\hat{u}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{u}_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \\
& \leq \|A_1 + A_2\|^2 + \left(1 + \frac{\tau}{2\varepsilon} + \frac{\tau C}{\varepsilon} \right) \left(\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right). \tag{3.3.5}
\end{aligned}$$

შემდეგი აღნიშვნის შემოტანით

$$\begin{aligned}
P(u, \vartheta) &= \|A_1 + A_2\|^2 + \|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2, \\
C_1 &= \frac{1}{2\varepsilon}, \quad C_2 = \frac{C}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon},
\end{aligned}$$

(3.3.5) დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ

$$P(\hat{u}, \hat{v}) + \tau^2\|A_{1t}\|^2 + \tau^2\|A_{2t}\|^2 \leq \frac{1 + C_2\tau}{1 - C_1\tau} P(u, v) = \left(1 + \frac{C_1 + C_2}{1 - C_1\tau} \right) P(u, v). \tag{3.3.6}$$

ცხადია, რომ არსებობს τ_0 , ისეთი რომ ნებისმიერი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\frac{C_1 + C_2}{1 - C_1\tau} < C,$$

სადაც

$$C = \frac{C_1 + C_2}{1 - \tau_0 C_1}, 1 - \tau_0 C_1 > 0.$$

(3.3.6) გამოსახულების გათვალისწინებით გვაქვს

$$P(u^{k+1}, v^{k+1}) \leq (1 + \tau C)P(u^k, v^k) \leq \dots \leq (1 + \tau C)^{k+1}P(u^0, v^0) \leq e^{CT}P(u^0, v^0). \quad (3.3.7)$$

როგორც უკვე (3.3.1) შეფასებებში ავღნიშნეთ, დისკრეტული ფუნქციები v_1 და v_2 არიან შემოსაზღვრულები. მაშასადამე, (3.3.1) და (3.3.7) შეფასებებიდან ვღებულობთ თეორემა 3.3.1-ის სამართლიანობას.

§4. ცვალებადი მიმართულებების (3.2.1)-(3.2.7) სქემის კრებადობა

მოცემულ პარაგრაფში დამტკიცებულია (3.1.1)-(3.1.5) დიფერენციალური ამოცანის შესაბამისი (3.2.1)-(3.2.7) ცვალებადი მიმართულებების სქემის კრებადობა.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3.4.1. თუ (3.1.1) - (3.1.5) დიფერენციალურ ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2 , მაშინ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი რომ ყოველი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის (3.2.1) - (3.2.7) სქემა კრებადია როცა, $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ და სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|u_{1\bar{x}} - U_{\bar{x}}\|_1 + \|u_{2\bar{y}} - U_{\bar{y}}\|_2 + \|v_1 - V_1\|_1 + \|v_2 - V_2\|_2 \leq C(\tau + h^2).$$

დამტკიცება. ცდომილებებისთვის $z_\alpha = u_\alpha - U$ და $z_\alpha = v_\alpha - V_\alpha, \alpha = 1, 2,$, (3.2.1) -(3.2.4) და (3.2.8) - (3.2.11) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$z_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}} - \hat{V}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x + (v_2 u_{2\bar{y}} - V_2 U_{\bar{y}})_y - \varphi_1,$$

$$z_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}} - \hat{V}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x + (\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}} - V_2 U_{\bar{y}})_y - \varphi_2,$$

$$s_{1t} = -\hat{v}_1 + \hat{V}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}) - g_1(V_1 U_{\bar{x}}) - \chi_1,$$

$$s_{2t} = -\hat{v}_2 + \hat{V}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}) - g_2(V_2 U_{\bar{y}}) - \chi_2.$$

შემდეგი დამოკიდებულებების გათვალისწინებით

$$v_1 u_{1\bar{x}} - V_1 U_{\bar{x}} = v_1 z_{1\bar{x}} + s_1 U_{\bar{x}},$$

$$v_2 u_{2\bar{y}} - V_2 U_{\bar{y}} = v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}},$$

$$g_1(v_1 u_{1\bar{x}}) - g_1(V_1 U_{\bar{x}}) = g'_1(\xi_1)(v_1 z_{1\bar{x}} + s_1 U_{\bar{x}}),$$

$$g_2(v_2 u_{2\bar{y}}) - g_2(V_2 U_{\bar{y}}) = g'_2(\xi_2)(v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}}),$$

გვაქვს

$$\xi_1 = \eta v_1 u_{1\bar{x}} + (1 - \eta) V_1 U_{\bar{x}}, \quad 0 < \eta < 1,$$

$$\xi_2 = \eta v_2 u_{2\bar{y}} + (1 - \eta) V_2 U_{\bar{y}}, \quad 0 < \eta < 1.$$

ზემოთ მოყვანილი ტოლობებისა და (3.2.5) - (3.2.7), (3.2.12) - (3.2.14) პირობების გათვალისწინებით z_α, s_α ცდომილებებისთვის ვღებულობთ შემდეგ სხვაობიან სქემას:

$$z_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}} + \hat{s}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x + (v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}})_y - \varphi_1, \quad (3.4.1)$$

$$z_{2t} = (\hat{v}_2 \hat{z}_{2\bar{y}} + \hat{s}_2 \hat{U}_{\bar{y}})_y + (\hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}} + \hat{s}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x - \varphi_2, \quad (3.4.2)$$

$$s_{1t} = -\hat{s}_1 + g'_1(\xi_1)(v_1 z_{1\bar{x}} + s_1 U_{\bar{x}}) - \chi_1, \quad (3.4.3)$$

$$s_{2t} = -\hat{s}_2 + g'_2(\xi_2)(v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}}) - \chi_2, \quad (3.4.4)$$

$$z_1(x, y, 0) = z_2(x, y, 0), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_h, \quad (3.4.5)$$

$$s_1(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad s_2(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{2h}, \quad (3.4.6)$$

$$z_1(x, y, t) = z_2(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_h, \quad (3.4.7)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$B_1 = (v_1 z_{1\bar{x}} + s_1 U_{\bar{x}})_x, \quad B_2 = (v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}})_y,$$

მაშინ (3.4.1), (3.4.2) სხვაობიანი განტოლებები შესაძლებელია გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$z_{1t} = \hat{B}_1 + B_1 - \varphi_1, \quad (3.4.8)$$

$$z_{2t} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 - \varphi_2. \quad (3.4.9)$$

გავამრავლოთ (3.4.8), (3.4.9) განტოლებები სკალარულად τB_{1t} და τB_{2t} სიდიდეებზე შესაბამისად. მიღებული ტოლობების აჯამვით და (3.3.2) დამოკიდებულების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \tau(z_{1t}, B_{1t}) + \tau(z_{2t}, B_{2t}) &= \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 - \tau(\varphi_1, B_{1t}) - \tau(\varphi_2, B_{2t}). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

თუ გავითვალისწინებთ B_α ფუნქციის სახეს, ნამრავლის გაწარმოებისა და ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულების დისკრეტულ ანალოგებს და (3.4.7) ერთგვაროვან სასაზღვროპირობებს, (3.4.10) ტოლობიდან გვექნება

$$\begin{aligned} &\tau\{(z_{1\bar{x}t}, \hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}t}]_1 + (z_{1\bar{x}t}, v_1 z_{1\bar{x}t}]_1 + (z_{2\bar{y}t}, \hat{v}_2 \hat{z}_{2\bar{y}t}]_2 + (z_{2\bar{y}t}, v_2 z_{2\bar{y}t}]_2 + \\ &\quad (z_{1\bar{x}t}, s_{1t} \hat{U}_{\bar{x}t}]_1 + (z_{1\bar{x}t}, s_{1t} U_{\bar{x}t}]_1 + (z_{2\bar{y}t}, s_{2t} \hat{U}_{\bar{y}t}]_2 + (z_{2\bar{y}t}, s_{2t} U_{\bar{y}t}]_2\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) \\ &\quad = \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \tau(\varphi_1, B_{1t}) + \tau(\varphi_2, B_{2t}). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

შევაფასოთ (3.4.11) უტოლობის მარცხენა მხარეში მყოფი სკალარული ნამრავლი. ზუსტი U, V_1, V_2 ამონახსნების საკმარისად გლუვობის, (3.3.1) დამოკიდებულების და ε -უტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$(z_{1\bar{x}t}, \hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}t}]_1 \geq c \|z_{1\bar{x}t}\|_1^2, (z_{2\bar{y}t}, \hat{v}_2 \hat{z}_{2\bar{y}t}]_2 \geq c \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2, \quad (3.4.12)$$

$$(z_{1\bar{x}t}, v_1 z_{1\bar{x}t}]_1 \leq \varepsilon C \|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \|z_{1\bar{x}}\|_1^2, \quad (3.4.13)$$

$$(z_{2\bar{y}t}, v_2 z_{2\bar{y}t}]_2 \leq \varepsilon C \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \|z_{2\bar{y}}\|_2^2,$$

$$(z_{1\bar{x}t}, s_{1t} U_{\bar{x}t}]_1 \leq \varepsilon C \|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \|s_{1t}\|_1^2, \quad (3.4.14)$$

$$(z_{2\bar{y}t}, s_2 U_{\bar{y}t}]_2 \leq \varepsilon C \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \|s_2\|_2^2.$$

გამოვიყენოთ (3.4.3), (3.4.4) ტოლობები $(z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, s_\alpha U_{\bar{x}_\alpha t}]_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, სკალარული ნამრავლის შესაფასებლად (აქ შემოტანილი გვაქვს აღნიშვნები: $x_1 = x$, $x_2 = y$):

$$\begin{aligned} (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, \hat{v}_\alpha \hat{z}_{\alpha\bar{x}_\alpha t}]_\alpha &= (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, \hat{s}_\alpha \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha - (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, g'_\alpha(\xi_\alpha) v_\alpha z_{\alpha\bar{x}_\alpha} \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha \\ &\quad - (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, g'_\alpha(\xi_\alpha) s_\alpha U_{\bar{x}_\alpha} \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha - (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, \varphi_\alpha \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

$$\leq \varepsilon C \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}\|_\alpha^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \left(\|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|\varphi_\alpha\|_\alpha^2 \right).$$

(3.4.12)–(3.4.15) უტოლობების გამოყენებით, (3.4.11) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \tau C \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) \\ \leq \tau \varepsilon C \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) \\ + \frac{C}{4\varepsilon} \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{s}_1\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|\hat{s}_2\|_2^2 + \|s_1\|_1^2 + \|\varphi_1\|_1^2 \right. \\ \left. + \|s_2\|_2^2 + \|\varphi_2\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \tau(\varphi_1, B_{1t}) + \tau(\varphi_2, B_{2t}). \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

დავუმატოთ (3.4.16) უტოლობის ორივე მხარეს შემდეგი გამოსახულება

$$\tau(z_{1\bar{x}t}, \hat{z}_{1\bar{x}} + z_{1\bar{x}}]_1 + \tau(z_{2\bar{y}t}, \hat{z}_{2\bar{y}} + z_{2\bar{y}}]_2,$$

გავქვს

$$\begin{aligned} \tau C \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) \\ + \|\hat{z}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{z}_{2\bar{y}}\|_2^2 \leq \|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \tau(z_{1\bar{x}t}, \hat{z}_{1\bar{x}} + z_{1\bar{x}}]_1 \\ + \tau(z_{2\bar{y}t}, \hat{z}_{2\bar{y}} + z_{2\bar{y}}]_2 + \tau \varepsilon C \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

$$+ \frac{\tau C}{4\varepsilon} \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{s}_1\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|\hat{s}_2\|_2^2 + \|s_1\|_1^2 + \|\varphi_1\|_1^2 + \|s_2\|_2^2 \right. \\ \left. + \|\varphi_2\|_2^2 \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \frac{\tau C}{4\varepsilon} \left(\|\chi_1\|_1^2 + \|\chi_2\|_2^2 \right) + \tau(\varphi_1, B_{1t}) + \tau(\varphi_2, B_{2t}).$$

შევაფასოთ (3.4.17) უტოლობაში სკალარული ნამრავლი

$$(z_{\alpha\bar{x}_{\alpha t}}, \hat{z}_{\alpha\bar{x}_{\alpha}} + z_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha} \leq \varepsilon \|z_{\alpha\bar{x}_{\alpha t}}]_{\alpha}\|^2 + \frac{1}{2} \left(\|\hat{z}_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 + \|z_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 \right). \quad (3.4.18)$$

თუ გავითვალისწინებთ B_{α} ფუნქციის სახეს, (3.2.15) კორელაციას და (3.4.3), (3.4.4) ტოლობებს, გვექნება

$$\begin{aligned} (\varphi_{\alpha}, B_{\alpha}) &= \left(\varphi_{\alpha}, (v_{\alpha} z_{\alpha\bar{x}_{\alpha}} + s_{\alpha} U_{\bar{x}_{\alpha}})_{\bar{x}_{\alpha t}} \right) \\ &= -(\varphi_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}, \hat{\vartheta}_{\alpha} z_{\alpha\bar{x}_{\alpha t}} + \vartheta_{\alpha} z_{\alpha\bar{x}_{\alpha}} + s_{\alpha t} \hat{U}_{\bar{x}_{\alpha}} + s_{\alpha} U_{\bar{x}_{\alpha t}}]_{\alpha} \\ &\leq \varepsilon C \left\{ \|z_{\alpha\bar{x}_{\alpha t}}]_{\alpha}\|^2 + \|z_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 + \|s_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 \right\} + \frac{C}{4\varepsilon} \|\varphi_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 \\ &= -(\varphi_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}, (-\hat{s}_{\bar{x}_{\alpha}} + g'_{\alpha}(\xi_{\alpha})(\vartheta_{\alpha} z_{\alpha\bar{x}_{\alpha}} + s_{\alpha} U_{\bar{x}_{\alpha}}) - \varphi_{\alpha}) \hat{U}_{\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha} \\ &\leq \varepsilon C \left\{ \|z_{\alpha\bar{x}_{\alpha t}}]_{\alpha}\|^2 + \|z_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 + \|\hat{s}_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 + \|s_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 \right\} \\ &\quad + \frac{C}{4\varepsilon} \|\varphi_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi_{\alpha\bar{x}_{\alpha}}]_{\alpha}\|^2. \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

(3.4.18) და (3.4.19) დამოკიდებულებების გამოყენებით (3.4.17) შეფასება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned} &\tau(c - \varepsilon C) \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 \\ &+ \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) + \left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \left(\|\hat{z}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{z}_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \\ &\leq \left[1 + \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \right] \\ &+ \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\|\hat{s}_1\|_1^2 + \|s_1\|_1^2 + \|\hat{s}_2\|_2^2 + \|s_2\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 \\ &+ \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\|\chi_1\|_1^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\chi_2\|_2^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}\|_2^2 \right). \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

გავმრავლოთ (3.4.3), (3.4.4) განტოლებები სკალარულად τs_1 და τs_2 სიდიდეებზე შესაბამისად რათა მივიღოთ დამატებითი აპრიორული შეფასებები s_α , $\alpha = 1, 2$, ბადური ფუნქციისთვის. გვაქვს

$$\begin{aligned} \tau(s_{\alpha t}, \hat{s}_\alpha]_\alpha + \tau \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 &= \tau(g'_\alpha(\xi_\alpha) v_\alpha z_{\alpha \bar{x}_\alpha}, \hat{s}_\alpha]_\alpha + \tau(g'_\alpha(\xi_\alpha) s_\alpha U_{\bar{x}_\alpha}, \hat{s}_\alpha]_\alpha \\ &- \tau(\chi_\alpha, \hat{s}_\alpha]_\alpha \leq \frac{\tau C}{\varepsilon} \left\{ \|z_{\alpha \bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|s_\alpha\|_\alpha^2 \right\} + \tau \varepsilon C \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau}{4\varepsilon} \|\chi_\alpha\|_\alpha^2. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

შემდეგი მარტივი იგივეობის გამოყენებით

$$\tau(s_{\alpha t}, \hat{s}_\alpha]_\alpha = \frac{1}{2} \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 - \frac{1}{2} \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau}{2} \|s_{\alpha t}\|_\alpha^2,$$

(3.4.21) მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau}{2} \|s_{\alpha t}\|_\alpha^2 + \tau \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 &\leq \frac{1}{2} \|s_\alpha\|_\alpha^2 \\ &+ \frac{\tau C}{\varepsilon} \left\{ \|z_{\alpha \bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \tau \varepsilon C \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau}{4\varepsilon} \|\chi_\alpha\|_\alpha^2 \right\}, \end{aligned}$$

ან

$$\begin{aligned} (1 - \tau \varepsilon C) \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \tau^2 C \|s_{\alpha t}\|_\alpha^2 \\ \leq \left(1 + \frac{\tau C}{\varepsilon} \right) \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau C}{\varepsilon} \|z_{\alpha \bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \frac{\tau C}{\varepsilon} \|\chi_\alpha\|_\alpha^2. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

(3.4.20) და (3.4.22) შეფასებების გათვალისწინებით, საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \tau(c - \varepsilon C) \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 \\ + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) + \left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon} \right) \left(\|\hat{z}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{z}_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \\ + \left[1 - \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \left(\|\hat{s}_1\|_1^2 + \|\hat{s}_2\|_2^2 \right) + \tau^2 C \left(\|s_{1t}\|_1^2 + \|s_{2t}\|_2^2 \right) \\ \leq \left[1 + \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|s_1\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|s_2\|_2^2 \right) \\ + \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \tau C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left\{ \|\chi_1\|_1^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\chi_2\|_2^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}\|_2^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

ავიღოთ $\varepsilon > 0$, ისე, რომ $c - \varepsilon C > 0$, ხოლო τ შევარჩიოთ შემდეგი უტოლობებიდან

$$0 < 1 - \frac{\tau}{\varepsilon} < 1, 0 < 1 - \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) < 1.$$

მარტივი გარდაქმნების გამოყენებით, (3.4.23) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი, რომ ნებისმიერი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\begin{aligned} J(z^{j+1}, s^{j+1}) &\leq (1 + \tau C)J(z^j, s^j) \\ &+ \tau \left(\|\chi_1\|_1^2 + \|\chi_2\|_2^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}\|_2^2 \right), \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

სადაც

$$J(z, s) = \|B_1 + B_2\|^2 + \|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|s_1\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|s_2\|_2^2.$$

ერთგვაროვანი (3.4.5), (3.4.6) საწყისი მონაცემების გათვალისწინებით (3.4.24) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$\begin{aligned} (z^{j+1}, s^{j+1}) &\leq (1 + \tau C)^j \left\{ J(z^0, s^0) + \tau \sum_{k=0}^j \left(\|\chi_1^k\|_1^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}^k\|_1^2 + \|\chi_2^k\|_2^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}^k\|_2^2 \right) \right\} \\ &\leq T e^{\tau C} \max_{t_k \in \omega_\tau} \left(\|\chi_1^k\|_1^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}^k\|_1^2 + \|\chi_2^k\|_2^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}^k\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

მაშასადამე თეორემა 3.4.1 დამტკიცებულია.

§5. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები

ცვალეზადი მიმართულეზებზის (3.2.1)-(3.2.7) სქემის გამოყენებით ჩატარებულზა მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი. მიღებული ექსპერიმენტების შედეგები შესაბამისობაშია თეორიულ კვლევებთან. ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი მათგანი.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) = F(x_1, x_2, t), \quad (3.5.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 - g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) = F_1(x_1, x_2, t), \quad (3.5.2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 - g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) = F_2(x_1, x_2, t), \quad (3.5.3)$$

შესაბამისი საწყისი და სასაზღვრო (3.1.4), (3.1.5) პირობებით. რიცხვითი ექსპერიმენტებისთვის, რომლებიც ჩატარებულზა სხვადასხვა g_1, g_2 ფუნქციებისთვის და ზუსტი ამონახსნებისთვის, გამოყენებულია შესატყვისი მარჯვენა მხარეებიანი (3.1.4), (3.1.5), (3.5.1) - (3.5.3) ამოცანის შესაბამისი (3.2.1)-(3.2.7) სქემა.

პირველ ტესტურ ექსპერიმენტში (მაგალითი 1), ჩვენ შევარჩიეთ მარჯვენა მხარე ისე, რომ ზუსტი ამონახსნი იყოს

$$U(x_1, x_2, t) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t),$$

$$V_1(x_1, x_2, t) = 1 + x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t + t^2),$$

$$V_2(x_1, x_2, t) = 1 + x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t + t^3)$$

და

$$g_\alpha(\xi) = \frac{2 + \xi^2}{1 + \xi^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

პარამეტრების მნიშვნელობები შემდეგია $M_1 = M_2 = 20$ და $N = 800$. ნახაზებზე 1-3 მოცემულია ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნები მაგალითი 1-ის შემთხვევისთვის. ნახაზებიდან ჩანს, რომ ზუსტი და მიახლოებით ამონახსნები თითქმის ერთნაირია. ჩვენ ასევე მოვიყვანეთ ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვაობის გრაფიკული ილუსტრაცია $t = 1$ მომენტისათვის (ნახ. 4 და 5). აღნიშნული სხვაობები, დროის სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის მოცემულია ცხრილი 1-ში.

ცხრილი 1. ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები დროის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

t	ცდომილება u ფუნქციისთვის	ცდომილება v_1 ფუნქციისთვის	ცდომილება v_2 ფუნქციისთვის
0.2	0,00013912790131447	0,00000712766408961	0,00002916084998672
0.4	0,00022425859907783	0,00001730244454379	0,00009005618525060
0.5	0,00026788886636797	0,00003071735463567	0,00013047635153840
0.6	0,00031286373416026	0,00004804529821700	0,00017715471240609
0.8	0,00040788793632886	0,00009668298990784	0,00028758192640277
1.0	0,00051151056363487	0,00016425091499817	0,00041715052893787

მეორე რიცხვით ექსპერიმენტში (მაგალითი 2) ავიღეთ შემდეგი ზუსტი ამონახსნი

$$U(x_1, x_2, t) = x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t),$$

$$V_1(x_1, x_2, t) = 1 + (\sin(2\pi x_1))^2 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t + t^2),$$

$$V_2(x_1, x_2, t) = 1 + x_1 (\sin(2\pi x_2))^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 + t + t^3),$$

ხოლო g_1 და g_2 იგივეა, რაც წინა მაგალითში. ამ შემთხვევაში შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები მოცემულია ნახაზებზე 6-8. ისევე როგორც წინა მაგალითში, ამ შემთხვევაშიც, ნახაზებიდან ჩანს, რომ ზუსტი და მიახლოებით

ამონახსნები თითქმის ერთნაირია. ჩვენ ასევე ამ მაგალითისთვისაც მოვიყვანეთ ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვაობის გრაფიკული ილუსტრაცია $t = 1$ მომენტისათვის (ნახ. 9 და 10). აღნიშნული სხვაობები, დროის სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის მოცემულია ცხრილი 2-ში.

ცხრილი 2. ზუსტ და მიახლოებით მნიშვნელობებს შორის სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები დროის სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის.

t	ცდომილება u ფუნქციისთვის	ცდომილება v_1 ფუნქციისთვის	ცდომილება v_2 ფუნქციისთვის
0.2	0,00014661708257345	0,00000858860780295	0,00002819048875824
0.4	0,00024069311877702	0,00003905932932668	0,00009488170874228
0.5	0,00029021401410578	0,00007350962013164	0,00014380878249165
0.6	0,00034283200258897	0,00012215877941224	0,00020490641481352
0.8	0,00045951015527633	0,00027435059771430	0,00037050947230477
1.0	0,00059397024728217	0,00053030802607124	0,00060758620251811

ასევე აღვნიშნოთ, რომ ცდომილების ენერგეტიკული ნორმა კლებულებს მეორე რიგით სივრცითი ბიჯის მიმართ და წრფივად დროითი ბიჯის მიმართ, როგორც ეს თეორიული კვლევებიდან იყო მოსალოდნელი. ცხრილებში 3-8 მოცემულია კრებადობის რიგები სივრცითი და დროითი ცვლადების სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის ($h_1 = h_2 = h$) მაგალითი 1-ის შემთხვევაში. ანალოგიური შედეგები მიღებულია ასევე მაგალითი 2-თვისაც. ჩატარებულია აგრეთვე მრავალი სხვა რიცხვითი ექსპერიმენტი, რომლებიც ადასტურებენ (3.2.1)-(3.2.7) სქემის მდგრადობას და კრებადობას.

ცხრილი 3. u ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა

$$t = 0.5.$$

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,0010471549271	1,96676837742577	0,98338418871288
0.05	0.00125	0,0002678888667	1,99870174081678	0,99935087040839
0.04	0.0008	0,0001714985501	1,98750127536620	0,99375063768310
0.025	0.0003125	0,0000673863179	1,99647190610677	0,99823595305338
0.02	0.0002	0,0000431612097		

ცხრილი 4. v_1 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა

$$t = 0.5.$$

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00010928004378	1,83090408449112	0,91545204224556
0.05	0.00125	0,00003071735464	1,99140675530180	0,99570337765089
0.04	0.0008	0,00001969684000	1,97465014379733	0,98732507189866
0.025	0.0003125	0,00000778629769	1,98220363146506	0,99110181573253
0.02	0.0002	0,00000500305899		

ცხრილი 5. v_2 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა

$$t = 0.5.$$

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
-----	-----	-----------	----------------------------------	-------------------------------------

0.1	0.005	0,00048078723049	1,88161023298955	0,94080511649477
0.05	0.00125	0,00013047635154	1,95582788893755	0,97791394446877
0.04	0.0008	0,00008433201902	1,96380259087501	0,98190129543250
0.025	0.0003125	0,00003350743218	1,98061203482352	0,99030601741176
0.02	0.0002	0,000021537734012		

ცხრილი 6. u ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა $t = 1$.

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00199264232466	1,96184683282478	0,98092341641239
0.05	0.00125	0,00051151056363	1,99602530925643	0,99801265462822
0.04	0.0008	0,00032765723981	1,98647046601262	0,99323523300631
0.025	0.0003125	0,00012880758903	1,99575068232756	0,99787534116378
0.02	0.0002	0,00008251506133		

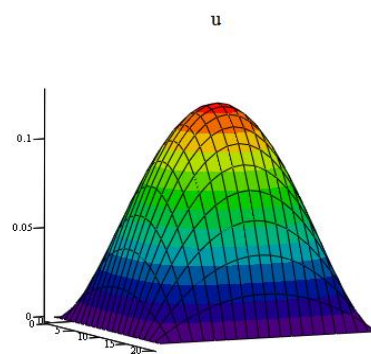
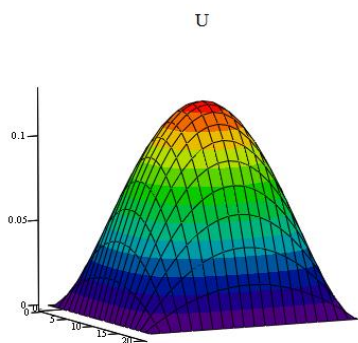
ცხრილი 7. v_1 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა $t = 1$.

h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00063887313209	1,95962806069178	0,97981403034588
0.05	0.00125	0,00016425091499	2,00020393071454	1,00010196535727
0.04	0.0008	0,00010511580210	2,00746582360909	1,00373291180454

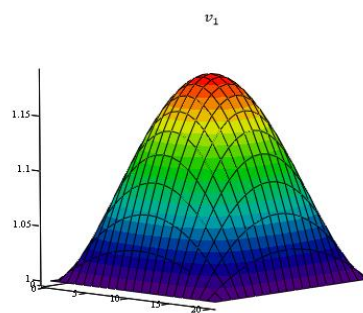
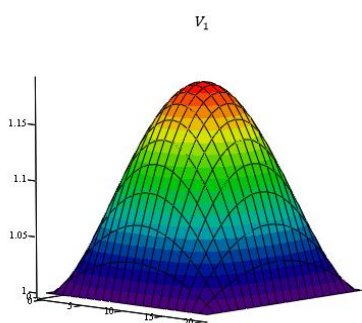
0.025	0.0003125	0,0000409170316	2,00921870635031	1,00460935317516
0.02	0.0002	0,00002613308665		

ცხრილი 8. v_2 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები ენერგეტიკულ ნორმაში როცა $t = 1$.

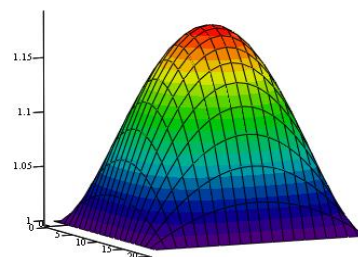
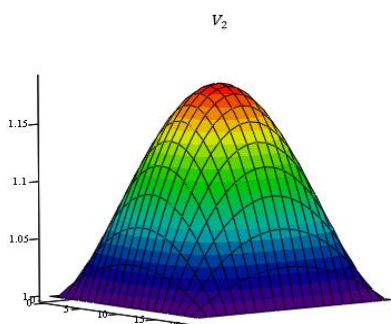
h	t	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00160656149698	1,94533622643524	0,97266811321762
0.05	0.00125	0,00041715052894	1,99721475369074	0,99860737684537
0.04	0.0008	0,00026714231849	1,99748437582204	0,99874218791102
0.025	0.0003125	0,00010447592253	2,00402151874007	1,00201075937003
0.02	0.0002	0,00006680461466		



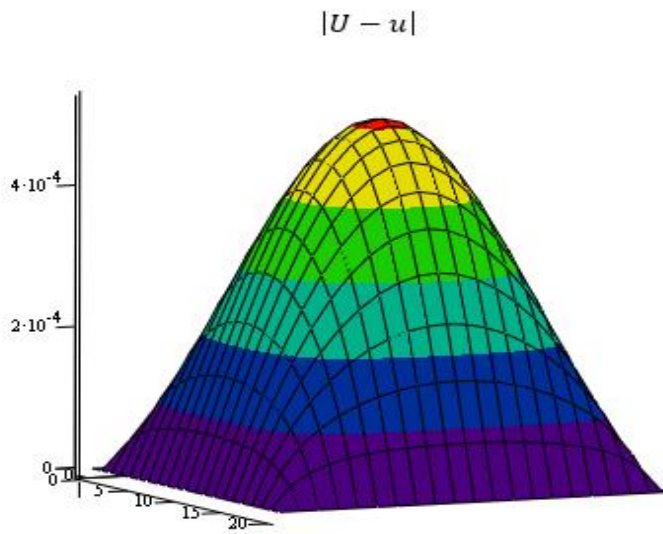
ნახ. 1.მაგალითი 1. ზუსტი U (მარცხენა), მიახლოებით u (მარჯვენა)



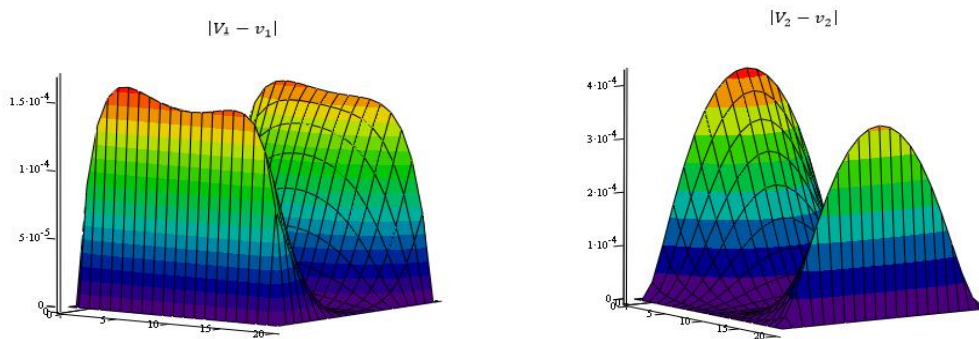
ნახ. 2.მაგალითი 1. ზუსტი V_1 (მარცხენა), მიახლოებით v_1 (მარჯვენა)



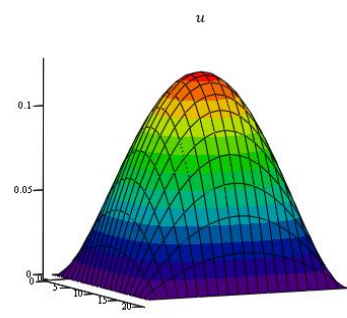
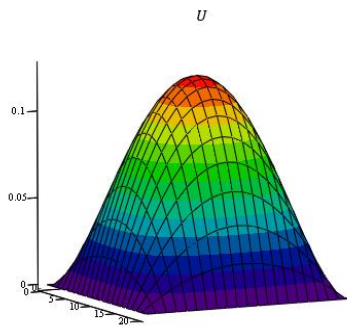
ნახ. 3.მაგალითი 1. ზუსტი V_2 (მარცხენა), მიახლოებით v_2 (მარჯვენა)



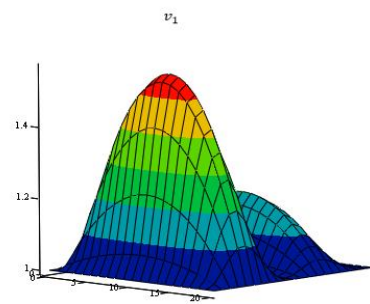
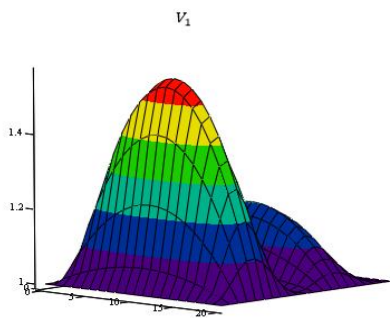
ნახ. 4.მაგალითი 1. სხვაობა ზუსტ U და მიახლოებით u ამონახსნებს შორის



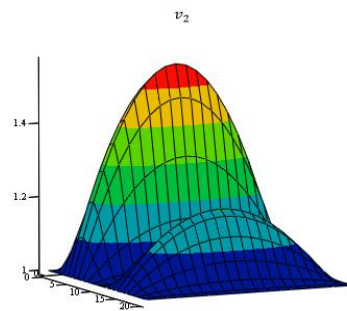
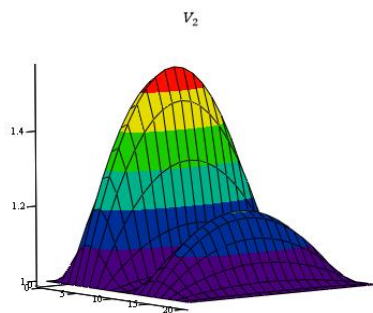
ნახ. 5.მაგალითი 1. სხვაობა ზუსტ V_1, V_2 და მიახლოებით v_1, v_2 ამონახსნებს შორის



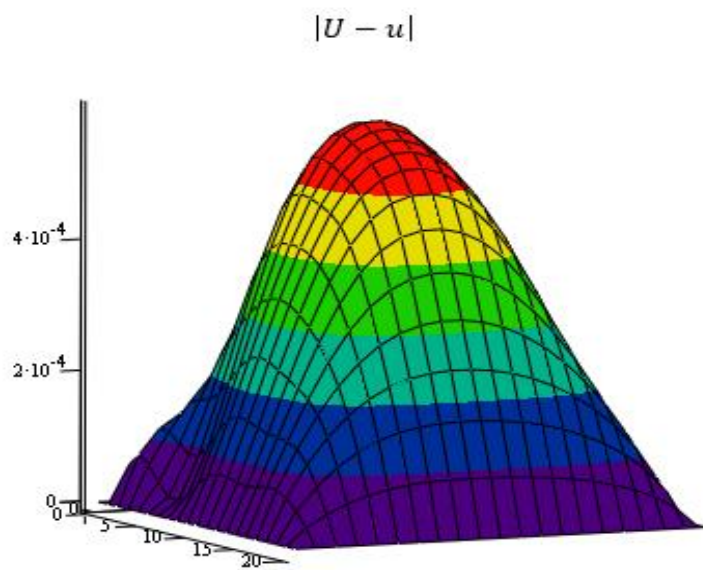
ნახ. 6. მაგალითი 2. ზუსტი U (მარცხენა), მიახლოებით u (მარჯვენა)



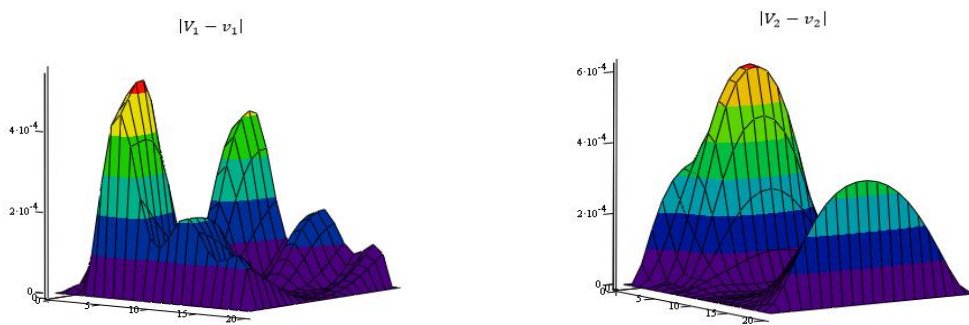
ნახ. 7. მაგალითი 2. ზუსტი V_1 (მარცხენა), მიახლოებით v_1 (მარჯვენა)



ნახ. 8. მაგალითი 2. ზუსტი V_2 (მარცხენა), მიახლოებით v_2 (მარჯვენა)



ნახ. 9. მაგალითი 2. სხვაობა ზუსტ U და მიახლოებით u ამონახსნებს შორის



ნახ. 10. მაგალითი 2. სხვაობა ზუსტ V_1, V_2 და მიახლოებით v_1, v_2 ამონახსნებს შორის

ლიტერატურა

1. Abrashin V.N., A class of additive methods for nonlinear multidimensional problems of mathematical physics. (in Russian) Diff. Uravn., 2003, V.39, N7, p.879-887. English translation: Diff. Equ., 2003, V.39, N7, p. 926-935.
2. Abrashin V.N., A variant of the method of variable directions for the solution of multi-dimensional problems in mathematical physics. I, (in Russian) Diff. Uravn., 1990, V. 26, p. 314-323 . English translation: Diff. Equ., 1990, V. 26, p. 243-250.
3. Abrashin V.N., Dzuba I.A., Difference schemes of the method of variable directions satisfying the laws of conservation. II, (in Russian) Vesti Akad. Navuk BSSR, Ser. Fiz-Mat. Nauk, 1989, V. 5, p. 3-9.
4. Abrashin V.N., Dzuba I.A., Khizhnyak A.R., Difference schemes of the method of variable directions satisfying the Laws of conservation. I, (in Russian) Vesti Akad. Navuk BSSR, Ser. Fiz-Mat. Nauk, 1986, V. 6, p. 12-20.
5. Abrashin V.N., Mukha V.A., On a class of efficient finite-difference schemes for solving multidimensional problems in mathematical physics, (in Russian) Diff. Uravn., 1992, V. 28, p. 1786-1799. English translation: Diff. Equ., 1992, V. 28, p. 1786-1799.
6. Abrashina-Zhadaeva N.G., Romanova N.S., Multicomponent vector decomposition schemes for the solution of multidimensional problems of mathematical physics, (in Russian) Diff. Uravn., 2006, V. 42, p. 883-894. English translation: Diff. Equ., 2006, V. 42, p. 941-953.
7. Abuladze I.O., Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Discrete models for a nonlinear magnetic-field scattering problem with thermal conductivity. (in Russian) Differ. Uravn., 1986, V. 22, 7, p. 1119-1129. English translation: Differ. Equ., 1986, V. 22, 7, 769-777.

8. Baxevanis Th., Katsaounis Th., Tzavaras A.E. Adaptive finite element computations of shear band formation. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 2010, V. 20, 3, p. 423-448.
9. Bell J., Cosner C., Bertiger W. Solutions for a flux-dependent diffusion model. *SIAM J. Math. Anal.*, 1982, V.13, N 5, p. 758-769.
10. Bien M. Existence of global weak solutions for a class of quasilinear equations describing Joule's heating. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1998, V. 23, p. 1275–1291.
11. Candela H., Martinez-Laborda A., Luis Micol J., Venation pattern formation in *Arabidopsis thaliana* vegetative leaves, *Develop. Biol.*, 1999, V. 205, p. 205–216.
12. Cimatti G. Existence of weak solutions for the nonstationary problem of the Joule heating of a conductor. *Ann. Mat. Pura Apl.*, 1992, V. 162, 4, p. 33-42.
13. Dafermos C.M., Stabilizing effects of dissipation. *Lect. Notes Math.*, 1983, N1017, p. 140-147.
14. Dafermos C.M., Hsiao L. Adiabatic shearing of incompressible fluids with temperature-dependent viscosity. *Quart. Appl. Math.*, 1983, V.41, N1, p. 45-58.
15. Descombes, Convergence of a splitting method of high order for reaction-diffusion systems, *Math. Comp.*, 2001, V.70, N236, p. 1481-1501.
16. Douglas J. On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods. *SIAM*, 1955, V.3, N1, p. 42-65.
17. Douglas J., Peaceman D.W., Numerical solution of two-dimensional heat flow problems, *Amer. Inst. Chem. Engin. J.*, 1955, V. 1, p. 505–512.
18. Douglas J., Peaceman D.W., Rachford H.H., A method for calculating multidimensional immiscible displacement, *Trans. of AIME*, 1959, V. 216, p. 297–308.
19. Douglas J., Rachford H.H., On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1960, V. 82, p. 421–439.

20. Dzhangveladze T.A. Averaged model of sum approximation for a system of nonlinear partial differential equations, (in Russian) Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math., 1987, V. 19, p. 60–73.
21. Dzhangveladze T.A. On the convergence of the difference scheme for one nonlinear system of partial differential equations. (in Russian) Bull. Acad. Sci. Georgian SSR, 1987, V. 126, 2, p. 257-260.
22. Dzhangveladze T.A. Stability of the Stationary Solution of a System of Nonlinear Partial Differential Equations. (in Russian) Proc. All-Union Symp. Curr. Probl. Math. Phys., Tbilisi, 1987, V. 1, p. 214-221.
23. Dzhangveladze T.A., Tagvarelia T.G., Convergence of a difference scheme for a system of nonlinear partial differential equations, that arise in biology, (in Russian) Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math., 1990, V. 40, p. 77–83.
24. Fateeva G. M., Boundary value problems for degenerate quasilinear parabolic equations. (in Russian). Math. Sbornik, 5(4), 1968, p. 509-532.
25. Freeman D.C., Graham J.H., Emlen J. M., Developmental stability in plants: symmetries, stresses and epigenesis, Genetica, 1993, vol. 89, p. 97-119.
26. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, 1964.
27. Fujita H., Mizutani A., On the finite element method for parabolic equations. I. Approximation of holomorphic semigroups, J. Math. Soc. Japan, 1976, V. 28, p. 749-771.
28. Gagoshidze M. Numerical resolution of one nonlinear parabolic system. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst Appl. Math., 2010, V. 24, p. 40-44.
29. Gagoshidze M. On Parabolic Regularization of One Nonlinear Diffusion Model. Rep. Enlarged Sess. Sem. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2012, V. 26, p. 14-17.
30. Gagoshidze M., Jangveladze T., On One Nonlinear Diffusion System. Rep. Enlarged Sess. Sem. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2011, V.25, p. 39-43.
31. Gagoshidze M., Nikolishvili M., Tabatadze B., Numerical Implementation for One System of Nonlinear Tree-Dimensional Partial Differential Equations. VI

- International Conference of the Georgian Mathematical Union. Book of Abstracts, 2015, p. 110.
32. Gegechkori Z., Rogava J., Tsiklauri M., The fourth order accuracy decomposition scheme for an evolution problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38.04, 2004, p. 707-722.
 33. Goldman D. Kaper T., Third-order operator splitting schemes and nonreversible systems, Los Alamos National Laboratory Technical Report 93-2781, 1993.
 34. Gordeziani D. G., On application of local one-dimensional method for solving parabolic type multi-dimensional problems of $2m$ -degree. *Proceeding of Science Academy of GSSR*, 3.39, 1965, p. 535-542.
 35. Gordeziani D. G., Meladze H.V., On modeling multi-dimensional quasilinear equation of parabolic type by one-dimensional ones. *Proceeding of Science Academy of GSSR*, 60.3, 1970, p. 537-540.
 36. Gordeziani D. G., Meladze G.V., Simulation of the third boundary value problem for multidimensional parabolic equations in an arbitrary domain by one-dimensional equations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 14.1 1974, p. 249-253.
 37. Hardwick R.C., Physiological consequences of modular growth in plants, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences*, 1986, V. 313, p. 161-173.
 38. Janenko N.N., *The Method of Fractional Steps for Multi-dimensional Problems of Mathematical Physics.* (in Russian). Nauka, Moscow, 1967.
 39. Jangveladze T. A., Investigation and numerical solution of some systems of nonlinear partial differential equations, *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 1991, V. 6, p. 25-28.
 40. Jangveladze T. The Difference Scheme of the Type of Variable Directions for One System of Nonlinear Partial Differential Equations. *Proc. I.Vekua Inst. Appl. Math. (Tbiliss. Gos. Univ. Inst. Prikl. Math. Trudy)*, 1992, V. 47, p. 45-66.

41. Jangveladze T., Kiguradze Z., Nikolishvili M., On Investigation and Numerical Solution of One Nonlinear Biological Model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2008, V.22, p.35-39.
42. Jangveladze T., Kiguradze Z., Nikolishvili M., On Construction and Investigation of Variable Directions Scheme for a Two-dimensional Nonlinear Diffusion Model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., V.34, 2008, p.20-29.
43. Jangveladze T., Kiguradze Z., Nikolishvili M., On Aproximate Solution of One Nonlinear Two-Dimensional Diffusion System. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2009, V.23, 42-45.
44. Jangveladze T., Nikolishvili M., Tabatadze B. On One Nonlinear Two-Dimensional Diffusion System. Recent Researches in Appl. Math., 15th WSEAS Int. Conf. Appl. Math. (MATH '10), 2010, p. 105-108.
45. Jangveladze T., Kiguradze Z., Gagoshidze M., Nikolishvili M., Stability and Convergence of the Variable Directions Difference Scheme for One Nonlinear Two-dimensional Model. International Journal of Biomathematics. DOI: 10.1142/S1793524515500576 . 2015, V. 8, N.5, (p.21)
(<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S1793524515500576>).
46. Jangveladze T.A., Lyubimov B.I., KorshiaT.K. On numerical solution of one class nonisothermic diffusion problem of electromagnetic field. (in Russian) Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math., 1986, V. 18, p. 5-47.
47. Kiguradze Z.V. The difference scheme for one system of nonlinear partial differential equations. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 1999, V. 14, N3, p. 67-70.
48. Kiguradze Z.V. On the stationary solution for one diffusion model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2001, V. 16, N1, p. 17-20.
49. Kiguradze Z., Nikolishvili M., Tabatadze B., Numerical resolution one system of nonlinear partial differential equations. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2011, V.25, p. 76-79.

50. Kirane M., Kouachi S. Global solution to a system of strongly coupled reaction-diffusion equations. *Nonlinear Anal.*, 1996, N8, p. 1387-1396.
51. Kuiper H.J. Existence and comparison theorems for nonlinear diffusion systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1977, V. 60, p. 166-181.
52. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A. Ural'ceva N.N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.* (in Russian) Moscow, 1968.
53. Lions J.L. *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non-Lineaires.* Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
54. Marchuk G.I., *The splitting-up Methods,* Nauka, Moscow, (in Russian), 1988.
55. Marsden J.E., McCracken M., *The Hopf Bifurcation and Its Applications,* Appl. Math. Sciences series, V. 19, Springer-Verlag, New York, 1976.
56. McNabb A. Comparison and existence theorems for multicomponent diffusion systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1961, V. 3, N1, p. 133-144.
57. Mitchison G.J., A model for vein formation in higher plants, *Proc. R. Soc. Lond. B.*, V. 1980, V. 207, p. 79-109.
58. Mitchison G.J., The polar transport of auxin and vein patterns in plants, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, 1981, V. 295, p. 461-471.
59. Nakao M., Ohara Y. Gradient estimates for a quasilinear parabolic equation of the mean curvature type. *J. Math. Soc. Japan*, 1996, V. 48, N3, p. 455-466.
60. Nelson T., Dengler N., Leaf vascular pattern formation, *The Plant Cell*, 1997, V. 9, p. 1121-1135.
61. Nikolishvili M. The variable directions finite scheme for one diffusion system of nonlinear partial differential equations. *Fifth Congress of Mathematical of Georgia. Book of Abstracts*, 2009, p. 81.
62. Nikolishvili M., Numerical resolution of one nonlinear partial differential system, *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2010, V.24, p. 93-96.
63. Nikolishvili M., Finite difference scheme and stability of the stationary solution for one system of nonlinear partial differential equations, *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2012, V. 26, p. 46-49.

64. Nikolishvili M., Finite Difference Scheme and Stability of the Solution for one Nonlinear Biological Model. IV International Conference of the Georgian Math. Union. Book of Abstracts, 2013, p. 50.
65. Nikolishvili M., Tabatadze B., Some properties of solution and variable directions difference scheme for one system of nonlinear three-dimensional partial differential equations. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2014, V. 28, p. 78-81.
66. Nikolishvili M., Tabatadze B., Parabolic regularization of one-dimensional analog of one nonlinear biological model, Reports of enlarged sessions of the seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 2015, V. 29, p. 95-98.
67. Peaceman D.W., Rachford H.H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Industr. Apl. Math., 1995, vol. 3, p. 28–41.
68. Protter M. H., Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.
69. Prusinkiewicz P., Crawford S., Smith R.S., Ljung K., Bennett T., Ongaro V., Leyser O., Control of bud activation by an auxin transport switch, Proc. Nat. Acad. Sci., 2009, V. 106, p. 17431–17436.
70. Prusinkiewicz P., Rolland-Lagan A.G., Modeling plant morphogenesis, Current Opin- ion in Plant Biology, 2006, V. 9, p. 83–88.
71. Raviart P.A. Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineares. J. Funct. Anal., 1970, V. 5, N2, p. 299-328.
72. Rheinboldt W.C. Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations. SIAM, Philadelphia, 1970.
73. Rogava, J. L. Semi-discrete schemes for operator differential equations. Georgian Technical University press, Tbilisi, 1995.
74. Rogava J., Gulua D., Reduction of a three-layer semi-discrete scheme for an abstract parabolic equation to two-layer schemes. Explicit estimates for the approximate solution error. Journal of Math. Sciences, 2015, V. 206, N 4, p.424-444.

75. Rogava J., Tsiklauri M., Convergence of a semi-discrete scheme for an abstract nonlinear second order evolution equation. *Appl. Numerical Mathematics* 2014, V. 75, p. 22-36.
76. Roussel C.J., Roussel M.R., Reaction–diffusion models of development with state- dependent chemical diffusion coefficients, *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 2004, V. 86, p. 113–160.
77. Roussel M.R., Slingerland M.J., A biochemically semi-detailed model of auxin-mediated vein formation in plant leaves, *Biosystems*, 2012, V. 109, p. 475–487.
78. Runions A., Fuhrer M., Lane B., Federl P., Rolland-Lagan A.G., Prusinkiewicz P., Modeling and visualization of leaf venation patterns, *ACM Transactions on Graphics*, 2005, V. 24, p. 702–711.
79. Sacks P.E. The initial and boundary value problem for a class of degenerate parabolic equations. *Commun. Part. Different. Equat.*, 1983, V. 8, N7, p. 693-733.
80. Sachs T., Polarity and the induction of organized vascular tissues, *Ann Bot* 33: 1969, p. 263-275.
81. Samarskii A.A. *The Theory of Finite-Difference Schemes*. Moscow, 1977.
82. Samarskii A.A., Matus P.P., Vabishchevich P.N., *Difference Schemes with Operator Factors*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.
83. Sun D., Manoranjan V.S., Yin H.-M. Numerical Solutions for a Coupled Parabolic Equations Arising Induction Heating Processes. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, Supplement, 2007, p. 956-964.
84. Tagvarelia T.G., Convergence of a difference scheme for a system of nonlinear partial differential equations arising in biology, (in Russian), Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 1991, V. 6, p. 109-112.
85. Tagvarelia T.G., Convergence of a semidiscrete scheme for a system of nonlinear partial differential equations, (in Russian), Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 1989, V. 4, p. 117-120.

86. Vabishchevich P.N., Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes, de Gruyter, Berlin / Boston, 2014.
87. Vishik M.I. On Solvability of the Boundary Value Problems for Higher Order Quasilinear Parabolic Equations, (in Russian) Math. Sbornik, 1962, V. 59(101), p. 189-225.

დანართი

დანართში მოცემულია პროგრამული კოდები, რომელთა საშუალებითაც ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები. პროგრამული კოდები შექმნილია C++-ის და Mathcad 15 პაკეტის გამოყენებით. გრაფიკები აგებულია ასევე Mathcad 15-ში.

განვიხილოთ თითოეული თავის პროგრამული კოდები დაწვრილებით.

I თავის (1.3.1)-(1.3.3) და (1.3.9)-(1.3.11) სხვაობიანი სქემებისათვის პროგრამული კოდი დაწერილია Mathcad 15-ში და გრაფიკებიც აგებულია Mathcad 15-ში. პროგრამაში გამოყენებულია შემდეგი ცვლადები:

- h – ბიჯი x ცვლადის მიმართულებით,
- τ – ბიჯი დროითი ცვლადის მიმართ,
- ε – ორ იტერაციას შორის სხვაობა,
- $M = \frac{1}{h}$ – წერტილთა რაოდენობა სივრცული ცვლადის მიმართ,
- $N = \frac{T}{\tau}$ – წერტილთა რაოდენობა დროითი ცვლადის მიმართ,
- η_0, η_1 – სასაზღვრო პირობები,
- k_0, k_1 – სასაზღვრო პირობები,
- $\psi = 0.9$.

ფაქტორიზაციის მეთოდები: მარცხნივ დიაგონალზე მდგომი ელემენტები მუდმივებია, ხოლო მარჯვნივ დიაგონალზე მდგომი ელემენტები ყოველ შრეზე იცვლება.

$$\begin{array}{l}
 \text{Fac}(\phi) := \left| \begin{array}{l}
 \alpha_1 \leftarrow k_0 \\
 \beta_1 \leftarrow \eta_0 \\
 \text{for } i \in 1..M-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 \alpha_{i+1} \leftarrow \frac{b}{c - \alpha_i \cdot a} \\
 \beta_{i+1} \leftarrow \frac{a \cdot \beta_i - \phi_i}{c - \alpha_i \cdot a}
 \end{array} \right. \\
 y_M \leftarrow \frac{k_1 \cdot \beta_M + \eta_1}{1 - k_1 \cdot \alpha_M} \\
 \text{for } i \in M-1..0 \\
 y_i \leftarrow \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1} \\
 \text{return } y
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Fac1}(a1, c1, b1, \phi, k, \eta) := \left| \begin{array}{l}
 \alpha_1 \leftarrow k_0 \\
 \beta_1 \leftarrow \eta_0 \\
 \text{for } i \in 1..M-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 \alpha_{i+1} \leftarrow \frac{b1_i}{c1_i - \alpha_i \cdot a1_i} \\
 \beta_{i+1} \leftarrow \frac{a1_i \cdot \beta_i - \phi_i}{c1_i - \alpha_i \cdot a1_i}
 \end{array} \right. \\
 y_M \leftarrow \frac{k_1 \cdot \beta_M + \eta_1}{1 - k_1 \cdot \alpha_M} \\
 \text{for } i \in M-1..0 \\
 y_i \leftarrow \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1} \\
 \text{return } y
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

ორ იტერაციას შორის სხვაობის დათვლა: თუ ამ იტერაციებს შორის სხვაობა ნაკლებია ε -ზე მაშინ აბრუნებს 0-ს და გადადის ახალ შრეზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში აბრუნებს 1-ს და კიდევ გააკეთებს იტერაციას.

$$\text{Epsilon}(X, Y) := \left| \begin{array}{l}
 \text{for } i \in 0..M \\
 \text{return } 0 \text{ if } |X_i - Y_i| > \varepsilon \\
 \text{return } 1
 \end{array} \right.$$

იტერაციული სქემა

```

(Yu Yv) :=
  for i ∈ 0..M
    | Yui,0 ← u0(xi)
    | Yvi,0 ← v0(-xi)
  for j ∈ 0..N - 1
    | TF ← 0
    | for i ∈ 0..M
      | U0i ← Yui,j
      | V0i ← Yvi,j
    while TF = 0
      | for i ∈ 1..M - 1
        | V1i ←  $\frac{V0_i + \tau \cdot g\left(V0_i, \frac{U0_i - U0_{i-1}}{h}\right) + \tau \cdot fv(x_i, t_j)}{1 + \tau}$ 
        | V1M ← V(xM, tj+1)
        | for i ∈ 1..M - 1
          | a1i ←  $\frac{\tau}{h^2} \cdot V1_i$ 
          | b1i ←  $\frac{\tau}{h^2} \cdot V1_{i+1}$ 
          | c1i ← 1 + (a1i + b1i)
          | Fi ← -(U0i + τ · fu(xi, tj))
        | k0 ← 0
        | k1 ← 0
        | η0 ← 0
        | η1 ← U(xM, tj+1)
        | U1 ← Fac1(a1, c1, b1, F, k, η)
        | TF ← 1 if (Epsilon(U0, U1) = 1) ∧ (Epsilon(V0, V1) = 1)
        | for i ∈ 0..M
          | U0i ← U1i
          | V0i ← V1i
        | for i ∈ 0..M
          | Yui,j+1 ← U1i
          | Yvi,j+1 ← V1i
  (Yu Yv)

```

მე-2 და მე-3 თავის პროგრამული კოდები დაწერილია C++-ზე Visual Studio-ს გამოყენებით, ხოლო გრაფიკები აგებულია Mathcad 15-ში.

პროგრამის გამშვები ფუნქციაა main, რომელიც განსაზღვრულია main.cpp ფაილში. გვაქვს შემდეგი კლასები Biological, NM2 და MethodsMath. Biological და NM2 კლასებში განსაზღვრულია Source.h და Source.cpp ფაილებში. ამ კლასის მეშვეობით ხდება მონაცემების დათვლა და შემდეგ დათვლილი მონაცემების შენახვა prin გაფართოების ფაილში. ფაილში მონაცემების შესანახად გამოიყენება PrintMethods.h და PrintMethods.cpp ფაილში არსებული ფუნქციები. Fuctions.h და Fuctions.cpp ფაილში განსაზღვრულია ამოცანის საწყისი ფუნქციები. MethodsMath კლასი განსაზღვრულია MethodsMath.h და MethodsMath.cpp ფაილში, ამ კლასში განსაზღვრულია ფაქტორიზაციის მეთოდები.

პროგრამაში გამოყენებულია შემდეგი ცვლადები:

- h – ბიჯი x ცვლადის მიმართულებით
- τ – ბიჯი დროითი ცვლადის მიმართ
- T – დრო
- $M = \frac{1}{h}$ – წერტილთა რაოდენობა სივრცული ცვლადის მიმართ
- $N = \frac{T}{\tau}$ – წერტილთა რაოდენობა დროითი ცვლადის მიმართ
- $\eta_0 = 0, \eta_1 = 0$ – სასაზღვრო პირობები
- $k_0 = 0, k_1 = 0$ – სასაზღვრო პირობები

```

/*
ფაქტორიზაციის მეთოდი
x - მასივი რომელიც უნდა დაბრუნდეს
m - მასივის სიგრძე
a - სამდიაგონალური მატრიცის ქვედა დიაგონალი
c - სამდიაგონალური მატრიცის ცენტრალური დიაგონალი
b - სამდიაგონალური მატრიცის ზედა დიაგონალი
k, niu - მარჯვენა და მარჯვენა საზღვარი
y[0] = k[0]*y[1] + niu[0]
y[m] = k[1]*y[m-1] + niu[1]
f - მარჯვენა მხარე
*/

```

```

void MethodsMath::Factorization(long double *x, int m, long double a, long double c,
long double b, long double *k, long double *niu, long double *f)
{
    int i;
    long double *alfa = new long double[m + 1];
    long double *beta = new long double[m + 1];

    alfa[1] = k[0];
    beta[1] = niu[0];

    for (i = 1; i < m; i++)
    {
        x[i] = 0;
    }

    for (i = 0; i < m + 1; i++)
    {
        alfa[i + 1] = b / (c - a*alfa[i]);
        beta[i + 1] = (a*beta[i] - f[i]) / (c - a*alfa[i]);
    }

    x[m] = (k[1] * beta[m] + niu[1]) / (1 - k[1] * alfa[m]);

    for (i = m - 1; i >= 0; i--)
    {
        x[i] = alfa[i + 1] * x[i + 1] + beta[i + 1];
    }

    delete alfa;
    delete beta;
}

```

```
};
```

```
void MethodsMath::Factorization(long double *x, int m, long double *a, long double *c,  
long double *b, long double *k, long double *niu, long double *f)
```

```
{
```

```
    int i;
```

```
    long double *alfa = new long double[m + 1];
```

```
    long double *beta = new long double[m + 1];
```

```
    alfa[1] = k[0];
```

```
    beta[1] = niu[0];
```

```
    for (i = 0; i < m + 1; i++)
```

```
    {
```

```
        x[i] = 0;
```

```
    }
```

```
    for (i = 1; i < m; i++)
```

```
    {
```

```
        alfa[i + 1] = b[i] / (c[i] - a[i] * alfa[i]);
```

```
        beta[i + 1] = (a[i] * beta[i] - f[i]) / (c[i] - a[i] * alfa[i]);
```

```
    }
```

```
    x[m] = (k[1] * beta[m] + niu[1]) / (1 - k[1] * alfa[m]);
```

```
    for (i = m - 1; i >= 0; i--)
```

```
    {
```

```
        x[i] = alfa[i + 1] * x[i + 1] + beta[i + 1];
```

```
    }
```

```
    delete alfa;
```

```
    delete beta;
```

```
};
```

ქვემოთ მოცემული კოდის ფრაგმენტით შერულებულია გათვლები მე-2 თავის (2.4.1), (2.4.2) სქემისთვის:

დეკომპოზიციური მეთოდის პროგრამული კოდის ფრაგმენტი:

```
void Biological::Calculation()
{
    printf("Start Calculation\n");
    // k შრეზე მონაცემების გამოთვლა
    for (k = 0; k < N; k++)
    {
        //
        printf("\t%d\n", k);

        for (j = 0; j < M + 1; j++)
        {
            for (i = 0; i < M + 1; i++)
            {
                u[1][i][j] = U(x[i], x[j], t[k + 1]);
                v1[1][i][j] = V1(_x[i], x[j], t[k + 1]);
                v2[1][i][j] = V2(x[i], _x[j], t[k + 1]);

                Zu[0][i][j] = U(x[i], x[j], t[k]);
                Zv1[0][i][j] = V1(_x[i], x[j], t[k]);
                Zv2[0][i][j] = V2(x[i], _x[j], t[k]);

                Zu[1][i][j] = U(x[i], x[j], t[k + 1]);

                Zv1[1][i][j] = V1(_x[i], x[j], t[k + 1]);
                Zv2[1][i][j] = V2(x[i], _x[j], t[k + 1]);

            }
        }

        // V1-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
        for (j = 1; j < M; j++)
        {
            // მარცხენა საზღვარზე V1-ს ვიღებთ ზუსტ მნიშვნელობას
            v1[1][0][j] = V1(_x[0], x[j], t[k + 1]);
            // i=1,2,...M ყოველ წერტილში გამოითვლება წინ შრიდან
            for (i = 1; i < M + 1; i++)
            {
                v1[1][i][j] = (v1[0][i][j] + tau*f1(v1[0][i][j],
                (u[0][i][j] - u[0][i - 1][j]) / h) + tau*g1(_x[i], x[j], t[k + 1])) / (1 + tau);
            }
        }

        // U1-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
        for (j = 1; j < M; j++)
        {
            for (i = 1; i < M; i++)
            {
                // მარჯვენა მხარის დათვლა
                fu[i] = -(u[0][i][j] + tau*g(x[i], x[j], t[k + 1]));
                // სამდიაგონალური მატრიცის შევსება
                a1[i] = *a * v1[1][i][j];
                b1[i] = *b * v1[1][i + 1][j];
                c1[i] = 1 + a1[i] + b1[i];
            }
        }
    }
}
```

```

    }
    // ფაქტორიზაციის მეთოდი
    _MethodsMath.Factorization(_u, (int)M, a1, c1, b1, k01, niu,
fu);

    // მიღებული შედეგის U1-ში გადაწერა
    for (i = 0; i < M + 1; i++)
    {
        u[1][i][j] = _u[i];
    }
}

// V2-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
for (i = 1; i < M; i++)
{
    // მარცხენა საზღვარზე V2-ს ვიღებთ ზუსტ მნიშვნელობას
    v2[1][i][0] = V2(x[i], _x[0], t[k + 1]);
    // j=1,2,...M-1 ყოველ წერტილში გამოითვლება წინ შრიდან
    for (j = 1; j < M + 1; j++)
    {
        v2[1][i][j] = (v2[0][i][j] + tau*f2(v2[0][i][j],
(u[1][i][j] - u[1][i][j - 1]) / h) + tau*g2(x[i], _x[j], t[k + 1])) / (1 + tau);
    }
    //
}

// U2-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
for (i = 1; i < M; i++)
{
    for (j = 1; j < M; j++)
    {
        // მარჯვენა მხარის დათვლა
        fu[j] = -(u[1][i][j] + tau*g(x[i], x[j], t[k + 1]));
        // სამდიაგონალური მატრიცის შევსება
        a2[j] = *a * v2[1][i][j];
        b2[j] = *b * v2[1][i][j + 1];
        c2[j] = 1 + a2[j] + b2[j];
    }
    // ფაქტორიზაციის მეთოდი
    _MethodsMath.Factorization(_u, (int)M, a2, c2, b2, k01, niu,
fu);

    // მიღებული შედეგის U2-ში გადაწერა
    for (j = 0; j < M + 1; j++)
    {
        u[0][i][j] = _u[j];
        u[1][i][j] = _u[j];
    }
}

for (j = 0; j < M + 1; j++)
{
    for (i = 0; i < M + 1; i++)
    {
        v1[0][i][j] = v1[1][i][j];
        v2[0][i][j] = v2[1][i][j];
    }
}

if (k == N2[0] - 1)
{
    Err(N2[0], 0);
}

```

```

        Print(1);
    }
    else if (k == N2[1] - 1)
    {
        Err(N2[1], 1);
        Print(2);
    }
}

printf("End Calculation\n");
}

```

გასაშუალებული სქემის პროგრამული კოდის ფრაგმენტი

```

void Biological::Calculation()
{
    printf("Start Calculation\n");
    // k შრეზე მონაცემების გამოთვლა
    for (k = 0; k < N; k++)
    {
        //
        printf("\t%d\n", k);

        for (j = 0; j < M + 1; j++)
        {
            for (i = 0; i < M + 1; i++)
            {
                u[1][i][j] = U(x[i], x[j], t[k + 1]);
                u1[1][i][j] = U(x[i], x[j], t[k + 1]);
                u2[1][i][j] = U(x[i], x[j], t[k + 1]);
                v1[1][i][j] = V1(_x[i], x[j], t[k + 1]);
                v2[1][i][j] = V2(x[i], _x[j], t[k + 1]);

                Zu[0][i][j] = U(x[i], x[j], t[k]);
                Zv1[0][i][j] = V1(_x[i], x[j], t[k]);
                Zv2[0][i][j] = V2(x[i], _x[j], t[k]);

                Zu[1][i][j] = U(x[i], x[j], t[k + 1]);

                Zv1[1][i][j] = V1(_x[i], x[j], t[k + 1]);
                Zv2[1][i][j] = V2(x[i], _x[j], t[k + 1]);
            }
        }

        // V1-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
        for (j = 1; j < M; j++)
        {
            // მარცხენა საზღვარზე V1-ს ვიღებთ ზუსტ მნიშვნელობას
            v1[1][0][j] = V1(_x[0], x[j], t[k + 1]);
            // i=1,2,...M ყოველ წერტილში გამოითვლება წინ შრიდან
            for (i = 1; i < M + 1; i++)
            {
                v1[1][i][j] = (v1[0][i][j] + tau*f1(v1[0][i][j],
                (u1[0][i][j] - u1[0][i - 1][j]) / h) + tau*g1(_x[i], x[j], t[k + 1])) / (1 + tau);
            }
        }
    }
}

```



```

}

// U1-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
for (j = 1; j<M; j++)
{
    for (i = 1; i<M; i++)
    {
        // მარჯვენა მხარის დათვლა
        fu[i] = -(u1[0][i][j] + tau*g(x[i], x[j], t[k + 1]));
        // სამდიაგონალური მატრიცის შევსება
        a1[i] = *a * v1[1][i][j];
        b1[i] = *b * v1[1][i + 1][j];
        c1[i] = 1 + a1[i] + b1[i];
    }
    // ფაქტორიზაციის მეთოდი
    _MethodsMath.Factorization(_u, (int)M, a1, c1, b1, k01, niu,
fu);

    // მიღებული შედეგის U1-ში გადაწერა
    for (i = 0; i<M + 1; i++)
    {
        u1[1][i][j] = _u[i];
    }
}

// V2-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
for (i = 1; i<M; i++)
{
    // მარცხენა საზღვარზე V2-ს ვიღებთ ზუსტ მნიშვნელობას
    v2[1][i][0] = V2(x[i], _x[0], t[k + 1]);
    // j=1,2,...M-1 ყოველ წერტილში გამოითვლება წინა შრიდან
    for (j = 1; j<M + 1; j++)
    {
        v2[1][i][j] = (v2[0][i][j] + tau*f2(v2[0][i][j],
(u2[0][i][j] - u2[0][i][j - 1]) / h) + tau*g2(x[i], _x[j], t[k + 1])) / (1 + tau);
    }
    //
}

// U2-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
for (i = 1; i<M; i++)
{
    for (j = 1; j<M; j++)
    {
        // მარჯვენა მხარის დათვლა
        fu[j] = -(u2[0][i][j] + tau*g(x[i], x[j], t[k + 1]));
        // სამდიაგონალური მატრიცის შევსება
        a2[j] = *a * v2[1][i][j];
        b2[j] = *b * v2[1][i][j + 1];
        c2[j] = 1 + a2[j] + b2[j];
    }
    // ფაქტორიზაციის მეთოდი
    _MethodsMath.Factorization(_u, (int)M, a2, c2, b2, k01, niu,
fu);

    // მიღებული შედეგის U2-ში გადაწერა
    for (j = 0; j<M + 1; j++)
    {
        u2[1][i][j] = _u[j];
    }
}

```

```

for (j = 0; j < M + 1; j++)
{
    for (i = 0; i < M + 1; i++)
    {
        u[1][i][j] = (u1[1][i][j] + u2[1][i][j])/2;

        u1[0][i][j] = u[1][i][j];
        u2[0][i][j] = u[1][i][j];

        v1[0][i][j] = v1[1][i][j];
        v2[0][i][j] = v2[1][i][j];
    }
}

if (k == N2[0] - 1)
{
    Err(N2[0], 0);
    Print(1);
}
else if (k == N2[1] - 1)
{
    Err(N2[1], 1);
    Print(2);
}

}

printf("End Calculation\n");
}

```

ქვემოთ მოცემული კოდის ფრაგმენტით შერულებულია გათვლები მე-3 თავის ცვალებადი მიმართულების სქემისთვის:

```

void NM2::Calculation()
{
    printf("Start Calculation\n");
    // k შრეზე მონაცემების გამოთვლა
    for(k=0; k<N; k++)
    {
        // V1-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
        for(j=1; j<M; j++)
        {
            // მარცხენა საზღვარზე V1-ს ვიღებთ ზუსტ მნიშვნელობას
            v1[k+1][0][j] = V1(_x1[0], x2[j], t[k+1]);

```

```

// i=1,2,...M ყოველ წერტილში გამოითვლება წინ შრიდან
for(i=1; i<M+1; i++)
{
    v1[k+1][i][j] = (v1[k][i][j] + tau*f1(v1[k][i][j],(u1[k][i][j]-u1[k][i-
1][j])/h) + tau*g1(_x1[i], x2[j], t[k+1])) / (1+tau);
}
}

// U1-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
for(j=1; j<M; j++)
{
    for(i=1; i<M; i++)
    {
        // მარჯვენა მხარის დათვლა
        fu1[i] = -(u1[k][i][j] + tau*VU_x_2(i, j, v2[k], u2[k])+
tau*g(x1[i],x2[j],t[k]));

        // სამდიაგონალური მატრიცის შევსება
        a1[i] = *a * v1[k+1][i][j];
        b1[i] = *b * v1[k+1][i+1][j];
        c1[i] = 1 + a1[i] + b1[i];
    }

    // ფაქტორიზაციის მეთოდი
    _MethodsMath.Factorization(_u, (int)M, a1, c1, b1, k01, niu, fu1);

    // მიღებული შედეგის U1-ში გადაწერა
    for(i=0; i<M+1; i++)
    {
        u1[k+1][i][j] = _u[i];
    }
}
}

```

```

// V2-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
for(i=1; i<M; i++)
{
    // მარცხენა საზღვარზე V2-ს ვიღებთ ზუსტ მნიშვნელობას
    v2[k+1][i][0] = V2(x1[i], _x2[0], t[k+1]);
    // j=1,2,...M-1 ყოველ წერტილში გამოითვლება წინ შრიდან
    for(j=1; j<M+1; j++)
    {
        v2[k+1][i][j] = (v2[k][i][j] + tau*f2(v2[k][i][j],(u2[k][i][j]-
u2[k][i][j-1])/h) + tau*g2(x1[i], _x2[j], t[k+1])) / (1+tau);
    }
    //
}

// U2-ის გამოთვლა ახალ შრეზე
for(i=1; i<M; i++)
{
    for(j=1; j<M; j++)
    {
        // მარჯვენა მხარის დათვლა
        fu2[j] = -(u2[k][i][j] + tau*VU_x_1(i, j, v1[k+1], u1[k+1]))+
tau*g(x1[i],x2[j],t[k]));
        // სამდიაგონალური მატრიცის შევსება
        a2[j] = *a * v2[k+1][i][j];
        b2[j] = *b * v2[k+1][i][j+1];
        c2[j] = 1 + a2[j] + b2[j];
    }
    // ფაქტორიზაციის მეთოდი
    _MethodsMath.Factorization(_u, (int)M, a2, c2, b2, k01, niu, fu2);
    // მიღებული შედეგის U2-ში გადაწერა

```

```

        for(j=0; j<M+1; j++)
        {
            u2[k+1][i][j] = _u[j];
        }
    }
    for(i=0; i<M+1; i++)
    {
        u1[k+1][i][0] = U(x1[i], x2[0], t[k+1]);
        u1[k+1][i][M] = U(x1[i], x2[M], t[k+1]);
        u2[k+1][i][0] = U(x1[i], x2[0], t[k+1]);
        u2[k+1][i][M] = U(x1[i], x2[M], t[k+1]);
        u1[k+1][i][0] = V1(_x1[i], x2[0], t[k+1]);
        u1[k+1][i][M] = V1(_x1[i], x2[M], t[k+1]);
    }
    //
    for(j=0; j<M+1; j++)
    {
        u1[k+1][0][j] = U(x1[0], x2[j], t[k+1]);
        u1[k+1][M][j] = U(x1[M], x2[j], t[k+1]);
        u2[k+1][0][j] = U(x1[0], x2[j], t[k+1]);
        u2[k+1][M][j] = U(x1[M], x2[j], t[k+1]);
        u2[k+1][0][j] = V2(x1[0], _x2[j], t[k+1]);
        u2[k+1][M][j] = V2(x1[M], _x2[j], t[k+1]);
    }
    printf("%d\n", k);
}
printf("End Calculation\n");
}

```