

# ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა  
ფაკულტეტი  
მათემატიკის დეპარტამენტი

ნანა დიხამინჯია

ოპერატორული გახლეჩის სქემები კვაზიწრფივი  
ევოლუციური ამოცანებისათვის

სადოქტორო დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის ასოცირებული  
პროფესორი, ფიზ.-მათ. მეცნ.  
დოქტორი, პროფესორი

ჯემალ როგავა



თბილისი 2013

# სარჩევი

|            |   |    |
|------------|---|----|
| შესავალი   | .....   | 3  |
| I თავი     | <b>დეკომპოზიციის სქემები<br/>მუდმივოპერატორიანი კვაზიწრფივი<br/>ევოლუციური ამოცანისათვის</b>  | 10 |
|            | §1.1 მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა<br>მრავალგანზომილებიანი კვაზიწრფივი ევოლუციური<br>ამოცანისათვის .....                      | 15 |
|            | §1.2 მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა<br>მრავალგანზომილებიანი კვაზიწრფივი ევოლუციური<br>ამოცანისათვის .....                      | 23 |
| II თავი    | <b>დეკომპოზიციის სქემა კვაზიწრფივი<br/>ჰიპერბოლური განტოლებისათვის</b>  | 32 |
|            | §2.1 მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა<br>მრავალგანზომილებიანი წრფივი ჰიპერბოლური<br>განტოლებისათვის .....                        | 33 |
|            | §2.2 მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა<br>მრავალგანზომილებიანი კვაზიწრფივი ჰიპერბოლური<br>განტოლებისათვის .....                   | 52 |
| III თავი   | <b>დეკომპოზიციის სქემები<br/>ცვლადოპერატორიანი კვაზიწრფივი<br/>ევოლუციური ამოცანისათვის</b>   | 65 |
|            | §3.1 მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა<br>ცვლადოპერატორიანი კვაზიწრფივი<br>მრავალგანზომილებიანი ევოლუციური<br>ამოცანისათვის ..... | 66 |
| IV თავი    | <b>რიცხვითი გათვლები</b> .....  | 76 |
| ლიტერატურა | .....   | 91 |

## შესავალი

### მეთოდის არსი.

ბუნებაში მიმდინარე, ისევე როგორც ეკონომიკური, სოციოლოგიური და სხვა პროცესების მათემატიკური მოდელირება ხშირად ხდება კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური, ევოლუციური განტოლებები-სათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების საშუალებით. ამ ტიპის ამოცანები შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც კოშის აბსტრაქტული ამოცანა ევოლუციური განტოლებებისათვის ჰილბერტის სივრცეში შემოუსაზღვრელი ოპერატორით. როგორც წესი, ასეთი ამოცანები, აღსაწერი მოვლენების ბუნებიდან გამომდინარე, მრავალგანზომილებიანია.

კოშის აბსტრაქტულ ამოცანას ვუწოდებთ  $m (m > 1)$  განზომილებიანს, თუ ამოცანის ძირითადი ოპერატორი წარმოდგება  $m$  ცალი შესაკრების ჯამის სახით. ამოცანა მრავალგანზომილებიანი შეიძლება იყოს როგორც სივრცითი განზომილებების გამო, ასევე იმ მიზეზით, რომ რთული ძირითადი ოპერატორი წარმოდგება მრავალი, შედარებით მარტივი ოპერატორების ჯამის სახით. როგორც წესი, მრავალგანზომილებიანი ამოცანების პირდაპირი მეთოდებით რიცხვითი გათვლა მოითხოვს დიდ გამოთვლით დროს და საკმაოდ არაეკონომიურია. მრავალგანზომილებიანი ამოცანების რიცხვითი გათვლის ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული ეფექტური (ეკონომიური) მეთოდი არის დეკომპოზიციის (ოპერატორული გახლეჩის) მეთოდი: დეკომპოზიციის მეთოდის გამოყენებით მრავალგანზომილებიანი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგება დაიყვანება ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნაზე. კერძოდ, ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამონახსნების კომბინაციის საშუალებით აიგება მრავალგანზომილებიანი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი, რაც საკმაოდ ამცირებს საჭირო კომპიუტერული რესურსების მოცულობას და რიცხვითი გამოთვლის დროს, და შესაბამისად, ალგორითმს ხდის ეკონომიურს.

დეკომპოზიციის სქემის აგებისათვის შეიძლება განვიხილოთ ორი მიდგომა:

1. მოცემული მრავალგანზომილებიანი ამოცანისათვის ავაგოთ ისეთი ერთგანზომილებიანი ამოცანების მიმდევრობა, რომელთა ამონახსნების კომბინაციაც მოგვცემს მოცემული მრავალგანზომილებიანი ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს. ამ მიდგომას ვუწოდოთ მრავალგანზომილებიანი ამოცანის გახლეჩა ერთგანზომილებიანი ამოცანების საშუალებით;
2. განვიხილოთ მოცემული მრავალგანზომილებიანი ამოცანის ამომხსნელი ოპერატორი და მოვახდინოთ მისი აპროქსიმაცია

ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამომხსნელი ოპერატორების საშუალებით. ამ მიდგომას ვუწოდოთ მრავალგანზომილებიანი ამოცანის ამომხსნელი ოპერატორის გახლეჩა;

წარმოდგენილ დისერტაციაში გამოყენებულია მეორე მიდგომა. ვიხილავთ დასმული ამოცანის ამომხსნელ ოპერატორს და ვახდენთ მის გახლეჩას ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამომხსნელი ოპერატორების კომბინაციების საშუალებით (ასეთი ტიპის დეკომპოზიციის ფორმულებს ვუწოდებთ Lie-Trotter-ის ტიპის ფორმულებს). შემდეგ ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამომხსნელი ოპერატორების აპროქსიმაცია ხდება რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციების საშუალებით (ასეთი ტიპის დეკომპოზიციის ფორმულებს ვუწოდებთ Lie-Chernoff-ის ტიპის ფორმულებს), რაც კიდევ უფრო ამარტივებს რიცხვით გამოთვლებს. საბოლოოდ მიღებული რაციონალური აპროქსიმაციებისთვის აიგება ამოხსნის ალგორითმი და ხდება მისი კომპიუტერული გათვლა.

ვიხილავთ აბსტრაქტულ პარაბოლურ და ჰიპერბოლურ განტოლებებს.

აბსტრაქტული პარაბოლური განტოლების ამომხსნელი ოპერატორი არის ექსპონენციალური ოპერატორ-ფუნქცია (ნახევარჯგუფი), შესაბამისად, ამ ამოცანისათვის დეკომპოზიციის სქემის აგება დაიყვანება ნახევარჯგუფის გახლეჩაზე.

აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციების საშუალებით. შესაბამისად, ამ ამოცანის გახლეჩა დაიყვანება სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციების გახლეჩაზე.

### **დეკომპოზიციის სქემების ისტორია.**

პირველი ოპერატორული გახლეჩის ფორმულა ექსპონენციალური მატრიცული ფუნქციისათვის აგებულია Lie-ს მიერ 1875 წელში. ეს ფორმულა განაზოგადა H. Trotter-მა 1959 წელს ექსპონენციალური ოპერატორ-ფუნქციისათვის (იხ. [1]). ამ ფორმულის რეზოლვენტური ანალოგი (რაციონალური ფუნქცია) პირველად აგებულ იქნა P. R. Chernoff-ის მიერ 1968 წელს (იხ. [2], [3]).

ოპერატორული გახლეჩის სქემების ისტორია იწყება 1955 წლიდან, J. Douglas-ის, D. Peaceman-ისა და H. Rachford-ის შრომების (იხ. [4], [5], [6]) გამოქვეყნებით.

მეოცე საუკუნის ორმოცდაათიან და სამოციან წლებში მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნისთვის

რიცხვითი მეთოდების შემუშავებისას დეკომპოზიციის მეთოდების გამოყენების საკითხი ბუნებრივად წამოიჭრა. ამ პერიოდში გამოქვეყნდა პირველი შრომები, რომლებიც მიეძღვნა დეკომპოზიციის სქემების აგებასა და გამოკვლევას (იხ. V. B. Andreev [7], G. A. Baker [8], G. A. Baker, T. A. Oliphant [9], G. Birkhoff, R. S. Varga [10], G. Birkhoff, R. S. Varga, D. Young [11], E. G. Diakonov [12], [13], M. Dryja [14], G. Fairweather, A. R. Gourlay, A. R. Mitchell [15], I. V. Fryazinov [16], D. G. Gordeziani [17], A. R. Gourlay, A. R. Mitchell [18], N. N. Ianenko [19], [20], N. N. Ianenko, G. V. Demidov [21], A. N. Kononov [22], G. I. Marchuk, N. N. Ianenko [23], G. I. Marchuk, U. M. Sultangazin [24], V. P. Ilin [25], A. A. Samarskii [26], [27], [28]), R. Temam [29]).

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ აგებული დეკომპოზიციის სქემების შედეგად მიღებული გახლეჩილი ამოცანები წარმოქმნიან Lie-Trotter-ის (იხ. [1]) ან Lie-Chernoff-ის (იხ. [2]) ტიპის ფორმულებს, ან ფორმულას, რომელიც წარმოადგენს ამ ფორმულების კომბინაციას. აქედან გამომდინარე, დეკომპოზიციის მეთოდის საშუალებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შესწავლა ტროტერისა და ჩერნოვის ტიპის ფორმულებით უწყვეტი ნახევარჯგუფის აპროქსიმაციის შესწავლის ექვივალენტურია. Lie-Trotter-ისა და Lie-Chernoff-ის ტიპის ფორმულების ცდომილების შეფასებას ეძღვნება შრომები T. Ichinose and S. Takanobu [30], T. Ichinose and H. Tamura [31], J. Rogava [32] (იხ. ასევე [33], თავი II).

რიცხვითი გათვლის ალგორითმის მიხედვით დეკომპოზიციის სქემები შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად: მიმდევრობითი თვლის სქემები (იხ.: N. N. Ianenko [19] და G. I. Marchuk [34]) და პარალელური თვლის სქემები (იხ.: D. G. Gordeziani, H. V. Meladze [35], [36], D. G. Gordeziani, A. A. Samarskii [37], და A. M. Kuzyk, V. L. Makarov [38]). დეკომპოზიციის სქემებისადმი უამრავი ნაშრომია მიძღვნილი (მაგ. იხ. [20], [34], [39] და მათში მოყვანილი ლიტერატურა).

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, დეკომპოზიციის მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია როგორც განზომილების შესამცირებლად, ასევე, რთული ოპერატორის შემთხვევაში განტოლებების გასამარტივებლად (მაგ. იხ. [40], [41], [42]).

ზემოთ მოყვანილ შრომებში აგებულია პირველი და მეორე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემები. მაღალი რიგის სიზუსტის სქემები ორგანზომილებიანი ამოცანისათვის აგებულ იქნა B. O. Dia და M. Schatzman მიერ (იხ. [43]). შევნიშნოთ, რომ ამ ნაშრომში აგებული დეკომპოზიციის სქემები არ არის ავტომატურად მდგრადი. დეკომპოზიციის ფორმულას უწოდებენ ავტომატურად მდგრადს, თუ გახლეჩის კოეფიციენტების მოდულების ჯამი უდრის ერთს. ავტომატურად მდგრადობის თვისება

მნიშვნელოვანია, რამდენადაც წინააღმდეგ შემთხვევაში სქემის მდგრადობის მისაღწევად აუცილებელი ხდება ამოცანის ძირითადი ოპერატორისთვის დამატებითი შეზღუდვების დადება. Q. Sheng-მა [44] ნაშრომში დაამტკიცა, რომ არ არსებობს ისეთი ავტომატურად მდგრადი დეკომპოზიციის ფორმულა, რომლის სიზუსტის რიგი აღემატება ორს. თუმცა ამ ნაშრომში იგი გახლეჩის კოეფიციენტებად განიხილავდა ნამდვილ რიცხვებს. კომპლექსური გახლეჩის კოეფიციენტების შემოღების გზით [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53] ნაშრომებში აგებულ იქნა მესამე, ხოლო [54], [55], [56], [57], [58], [59] ნაშრომებში მეოთხე რიგის სიზუსტის ოპერატორული გახლეჩის სქემები ავტომატურად მდგრადი დეკომპოზიციის ფორმულების გამოყენებით. კომპლექსური გახლეჩის კოეფიციენტების შემთხვევაში ავტომატურად მდგრადობა საჭიროებს, რომ კომპლექსური პარამეტრების ნამდვილი ნაწილების მოდულების ჯამი იყოს ერთის ტოლი. [60], [61], [62] ნაშრომში ავტორების მიერ შემოთავაზებულია საინტერესო ალგორითმი, რომელიც ნებისმიერი რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის ფორმულის მიღების საშუალებას იძლევა. თუმცა ალგორითმი არ იძლევა იმის გარანტიას, რომ მიღებული დეკომპოზიციის ფორმულა იქნება ავტომატურად მდგრადი.

[63], [64], [65] შრომებში აგებულია დეკომპოზიციის სქემები ჰიპერბოლური განტოლებისათვის.

## **დისერტაციის მიზანი.**

წარმოდგენილი დისერტაციის მიზანია:

- [1] [42-56] შრომებში მრავალგანზომილებიანი წრფივი ევოლუციური ამოცანისათვის აგებული მესამე და მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემების განზოგადება კვაზიწრფივი შემთხვევისათვის;
- [2] მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემის აგება და გამოკვლევა კვაზიწრფივი ცვლადოპერატორიანი ევოლუციური ამოცანისათვის;
- [3] მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემის აგება და გამოკვლევა წრფივი აბსტრაქტული მრავალგანზომილებიანი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის და შემდეგ მისი განზოგადება კვაზიწრფივი შემთხვევისათვის;
- [4] აგებული დეკომპოზიციის სქემების საფუძველზე კომპიუტერული გათვლების შესრულება სხვადასხვა მოდელური ამოცანებისათვის და მიღებული რიცხვითი შედეგების ანალიზი.

## **დისერტაციის მოკლე შინაარსი პარაგრაფების მიხედვით.**

**I თავში** განხილულია კომის ამოცანა მრავალგანზომილებიანი აბსტრაქტული ევოლუციური განტოლებისათვის ლიპშიც-უწყვეტი ოპერატორით. ჩვენ ვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც ძირითადი ოპერატორი წარმოადგენს თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორების ჯამს. ეს თავი შედგება ორი პარაგრაფისაგან.

**§1.1-ში** განხილული ამოცანისათვის აგებულია მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა. აგებული სქემისთვის დამტკიცებულია თეორემა კრებადობის შესახებ, მიღებულია ცდომილების შეფასება მიახლოებითი ამონახსნისათვის და ჩამოყალიბებულია რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმი.

**§1.2-ში** განხილული ამოცანისათვის აგებულია მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა. აგებული სქემისთვის დამტკიცებულია თეორემა კრებადობის შესახებ, მიღებულია ცდომილების შეფასება მიახლოებითი ამონახსნისათვის და ჩამოყალიბებულია რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმი.

**II თავში** განხილულია კომის ამოცანა მრავალგანზომილებიანი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის ლიპშიც-უწყვეტი მარჯვენა მხარით. პირველი თავის ანალოგიურად, აქაც განხილულია შემთხვევა, როდესაც ძირითადი ოპერატორი არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული და წარმოადგენს ასევე თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორების ჯამს. ეს თავი შედგება ორი პარაგრაფისაგან.

**§2.1-ში** განხილული ამოცანისათვის აგებულია მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემა წრფივი შემთხვევისათვის (ლიპშიც-უწყვეტი მარჯვენა მხარის გარეშე). მრავალგანზომილებიანი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლების ამონახსნის წარმოდგენა ხდება სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციების საშუალებით, სადაც არგუმენტად აღებულია კვადრატული ფესვი ძირითადი ოპერატორიდან. ამ ფორმულის გამოყენებით, დროითი ცვლადის თანაბრად დაშორებული მნიშვნელობებისათვის აიგება ზუსტი სამშრიანი სქემა, რომლის გადასვლის ოპერატორი კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციაა. მოცემული ფორმულის საფუძველზე აიგება მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა. კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციის გახლეჩა ხდება რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციის საშუალებით, ხოლო არაერთგვაროვანი წევრის შესაბამისი ინტეგრალის შეცვლა ხდება სიმპსონის კვადრატურული ფორმულით. დამტკიცებულია თეორემა კრებადობის შესახებ და მიღებულია შეფასება მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისათვის.

§2.2-ში წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები განზოგადებულია ლიპშიც-უწყვეტი მარჯვენა მხარის შემთხვევისათვის.

III თავში განზოგადებულია პირველ თავში მიღებული შედეგები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ძირითადი ოპერატორი არის დროზე დამოკიდებული. კერძოდ, განხილულია კომის ამოცანა მრავალგანზომილებიანი აბსტრაქტული ცვლადოპერატორიანი ევოლუციური განტოლებისათვის ლიპშიც-უწყვეტი მარჯვენა მხარით.

§3.1-ში ამ ამოცანისათვის აგებულია მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა, მიღებულია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება და დამტკიცებულია თეორემა კრებადობის შესახებ.

IV თავში წინა თავებში აგებული სქემების საფუძველზე განხორციელებულია რიცხვითი გათვლები სხვადასხვა ტესტური ამოცანებისათვის. ჩატარებულია ანალიზი რიცხვითი შედეგების საფუძველზე. მოყვანილია სხვა ტიპის დეკომპოზიციის სქემებთან შედარებითი ანალიზი.

**დისერტაციაში მოყვანილი შედეგების მოხსენებები და პუბლიკაციები.**

თავი I.

§1.1-ში მოყვანილი შედეგები სხვადასხვა დროს წარდგენილ იქნა შემდეგ საერთაშორისო კონფერენციებზე:

*“ENUMATH 2009 - European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications”*, 29 ივნისი-3 ივლისი, 2009 წელი, ქალაქი უპსალა, შვედეთი. მოხსენება გამოქვეყნდა აბსტრაქტების წიგნში (იხ. [66]); [http://www.it.uu.se/research/tdb/enumath2009/final/enumath\\_tuesday.pdf](http://www.it.uu.se/research/tdb/enumath2009/final/enumath_tuesday.pdf)

*ICTMC-2010, The International Scientific Conference Devoted to 80th anniversary of Academician I.V. Prangishvili “Information and Computer Technologies, Modelling, Control”*, 2010 წელი, ქ. თბილისი.

*„CMAM-4 Computational Methods in Applied Mathematics“*, 2010 წელი, ქალაქი ბედლევი, პოლონეთი. მოხსენება გამოქვეყნდა აბსტრაქტების წიგნში (იხ. [67]);

*„ICCAM 2010 - International Congress on Computational and Applied Mathematics“*, 2010 წლის 5-9 ივლისი, ქალაქი ლიუვენი, ბელგია. <http://www.iccam.ugent.be/Schedule ICCAM 2010long.pdf>



*“International Conference in Information and Computer Technologies” - Dedicated commemoration of professors Elene Dekanoidze and Murman Tsuladze, outstanding representatives of Georgian informatics scientific school, 2010 წლის 2-6 მაისი. მოხსენება გამოქვეყნდა აბსტრაქტების წიგნში (იხ. [68])*

**§1.2-**ში მოყვანილი შედეგები სხვადასხვა დროს წარდგენილ იქნა შემდეგ საერთაშორისო კონფერენციებზე:

*„10<sup>th</sup> IMACS International Symposium on Iterative Methods in Scientific Computing“*, 2011 წლის 18-21 მაისი, ქალაქი მარაკეში, მაროკო. მოხსენება გამოქვეყნდა აბსტრაქტების წიგნში (იხ. [69]);

*„RMMM - Reliable Methods of Mathematical Modeling“*, 2011 წლის 6-8 ივლისი, ქალაქი ლოზანა, შვეიცარია. <http://rmmm2011.epfl.ch/schedule.php>

*“First International Conference of the Georgian Mathematical Union 2010”*, ქალაქი ბათუმი, 2010 წლის 12-19 სექტემბერი (იხ. [70])

*“INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS ICNAAM 2011“*, 2011 წლის 19-25 სექტემბერი, ქალაქი ჰალკიდისი, საბერძნეთი. მოხსენება გამოქვეყნდა ჟურნალში “Journal of American Institute of Physics (AIP) Conference Proceedings - NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS ICNAAM 2011” (იხ. [71]).

## **თავი II.**

**§2.1-**ში მოყვანილი შედეგები გამოქვეყნებულია ჟურნალში „Numerical Functional Analysis and Optimization“ (იხ. [72])

**§2.2-**ში მოყვანილი შედეგები წარდგენილ იქნა საერთაშორისო კონფერენციაზე *“International Conference of Lie Groups, Differential Equations and Geometry”*, 2013 წლის 17-22 ივნისი, ქ. ბათუმი. მოხსენება გამოქვეყნდა შრომების კრებულში (იხ. [73]).

## **თავი III.**

**§3.1-**ში მოყვანილი შედეგები წარდგენილ იქნა კონფერენციაზე *“Second International Conference “Modern Problems in Applied Mathematics”*, 2013 წლის 4-7 სექტემბერი, ქალაქი თბილისი. მოხსენება გამოქვეყნდა აბსტრაქტების წიგნში (იხ. [74]).

# თავი I

## დეკომპოზიციის სქემები მუდმივოპერატორიანი კვაზიწრფივი ევოლუციური ამოცანისათვის

ამ თავში განხილულია კომის ამოცანა მრავალგანზომილებიანი აბსტრაქტული ევოლუციური განტოლებისათვის ლიპშიც-უწყვეტი ოპერატორით. ჩვენ ვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც ძირითადი ოპერატორი წარმოადგენს თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორების ჯამს. ამ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის შემოთავაზებულია მესამე და მეოთხე რიგის სიზუსტის ოპერატორული გახლეჩის სქემები. დამტკიცებულია თეორემები კრებადობის შესახებ და მიღებულია ცდომილების შეფასება მიახლოებითი ამონახსნისათვის. ოპერატორული გახლეჩის შედეგად, მრავალგანზომილებიანი ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ერთგანზომილებიანი ამოცანების სერიის ამოხსნაზე. სივრცითი ცვლადის დისკრეტიზაცია ხდება ასევე მაღალი რიგის სიზუსტის სხვაობიანი სქემით. მეოთხე თავში მოყვანილია სხვადასხვა ტესტური ამოცანების რიცხვითი გათვლების შედეგები ამ თავში შემოთავაზებული მეთოდების საფუძველზე.

### მეთოდის აღწერა

ჰილბერტის სივრცეში ვიხილავთ შემდეგ ამოცანას:

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) + M(u(t)) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = \varphi, \quad (1.1)$$

სადაც  $A$  არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული (ზოგადად შემოუსაზღვრელი) ოპერატორი  $D(A)$  განსაზღვრის არით, რომელიც ყველგან მკვრივია  $H$  სივრცეში,  $\overline{D(A)} = H$ ,  $A = A^*$  და

$$(Au, u) \geq a \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A), \quad a = \text{const} > 0,$$

სადაც  $\|\cdot\|$  და  $(\cdot, \cdot)$  განსაზღვრავს შესაბამისად ნორმას და სკალარულ ნამრავლს  $H$  სივრცეში;  $\varphi$  - მოცემული ვექტორია  $D(A)$  განსაზღვრის არიდან,  $f(t)$  არის უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია, არაწრფივი ოპერატორი  $M(\cdot)$  აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას.

ლიპშიც-უწყვეტი ოპერატორი გადაგვაქვს მარჯვენა მხარეში

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = \tilde{f}(t, u(t)), \quad u(0) = \varphi. \quad (1.2)$$

სადაც  $\tilde{f}(t, u(t)) = f(t) - M(u(t))$ . ამ ამოცანის ამონახსნს ვწერთ ცხადი სახით, შემდეგი ფორმულის საშუალებით (იხ. [75], [76]).

$$u(t) = U(t, A)u(0) + \int_0^t U(t-s, A)\tilde{f}(t, u(s))ds, \quad (1.3)$$

სადაც  $U(t, A) = \exp(-tA)$  არის ძლიერად უწყვეტი ნახევარჯგუფი. (1.3) ფორმულიდან ვიღებთ შემდეგი ტიპის რეკურენტულ ფორმულას.

$$u(t_k) = U(p\tau, A)u(t_{k-p}) + \int_{t_{k-p}}^{t_k} U(t_k - s)\tilde{f}(s, u(s))ds, \quad (1.4)$$

სადაც  $t_k$  არის დროითი კვანძი, ხოლო  $\tau$  - დროითი ბიჯი  $t_k = k\tau$ ,  $k = 0, 1, \dots, \tau > 0$ .

(1.4) ფორმულაში  $p$  არის მთელი რიცხვი, რომელიც უდრის 3-ს მესამე რიგის სიზუსტის სქემისთვის, ხოლო მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემისთვის კი 2-ს.

(1.4) განტოლების ინტეგრალური ნაწილისთვის ვიყენებთ სქემის შესაბამისი რიგის სიზუსტის კვადრატურულ ფორმულას. მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემისთვის გამოყენებულია სიმპსონის ფორმულა, ხოლო მესამე რიგის სიზუსტის სქემისთვის გამოყენებულია ორკვანძიანი კვადრატურული ფორმულა. რადგანაც სიმპსონის კვადრატურული ფორმულა მოითხოვს სამ კვანძს - შუალედის ბოლოებში და შუაში, ამიტომ ამ შემთხვევისთვის (1.4) ფორმულაში  $p = 2$  და შესაბამისად, სიმპსონის კვადრატურულ ფორმულაში ინტეგრების შუალედი არის  $(t_{k-2}, t_k)$  და კვანძებად გამოიყენება  $t_k, t_{k-1}$  და  $t_{k-2}$ . რაც შეეხება მესამე რიგის სიზუსტის კვადრატურულ ფორმულას, აქ გამოიყენება ორი კვანძი: შუალედის მარცხენა ბოლო და შუალედის მარჯვენა ბოლოს გამოკლებული შუალედის სიგრძის მესამედი. რადგანაც ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში შედის უცნობი ფუნქცია  $u(t)$ , რომელსაც ვპოულობთ მთელ კვანძებში, ამიტომ იძულებული ვართ მესამე რიგის სიზუსტის სქემის შემთხვევაში (1.4) ფორმულაში  $p$  ავიღოთ 3-ის ტოლი და შესაბამისად, ინტეგრების შუალედი იქნება  $(t_{k-3}, t_k)$ , ხოლო კვადრატურულ ფორმულაში კვანძები აიღება  $(t_{k-3}, t_{k-1})$ . სასურველია, რომ კვადრატურულ ფორმულაში კვანძებად არ იქნას გამოყენებული შუალედის ზედა ბოლო  $t_k$ , რადგან ამ შემთხვევაში, იმის გამო, რომ ინტეგრალი შეიცავს უცნობ ფუნქციას, მარჯვენა მხარეში გვექნება უცნობი ფუნქცია ზედა კვანძში. ამის გამო ყოველ შრეზე უცნობი ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის საპოვნელად საჭირო იქნება დამატებით იტერაციის გამოყენება. მესამე რიგის სიზუსტის სქემის შემთხვევაში ეს ხერხდება, რადგან სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის ინტეგრების კვანძებად აიღება  $t_{k-3}$  და  $t_{k-1}$ , თუმცა მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემის შემთხვევაში ვერ ხერხდება იტერაციის აცილება, რადგან სიმპსონის

კვადრატურულ ფორმულაში ინტეგრების კვანძებად აიღება  $t_k, t_{k-1}$  და  $t_{k-2}$ . თუმცა ამ პრობლემას ის ამარტივებს, რომ ზედა კვანძის შემთხვევაში ინტეგრალში შემავალი  $U(t_k - s)$  ნახევარჯგუფი ხდება იგივე ოპერატორი  $U(t_k - s)|_{s=t} = U(0) = I$  და შესაბამისად, მარჯვენა მხარეში უცნობი ფუნქცია შედის შემდეგი სახით  $\tau M(u(t_k))$ , რადგანაც  $M$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას,  $\tau$  ბიჯის სიმცირის გამო იტერაცია საკმაოდ სწრაფად იკრიბება.

კვადრატურული ფორმულის გამოყენების შემდეგ (1.4) იღებს შემდეგ სახეს :

$$u(t_k) = U(p\tau, A)u(t_{k-p}) + \tau \sum_{j=0}^p U(j\tau, A) \tilde{f}(t_{k-j}, u(t_{k-j})) + R(\tau), \quad (1.5)$$

სადაც  $R(\tau)$  კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრია. ამის შემდეგ (1.5) ფორმულაში შემავალი ნახევარჯგუფის შეცვლა ხდება შესაბამისი რიგის სიზუსტის ოპერატორული გახლეჩის ფორმულით (მესამე რიგის სიზუსტის ოპერატორული გახლეჩის სქემის შემთხვევაში გამოიყენება [47] ნაშრომში აგებული დეკომპოზიციის ფორმულა, ხოლო მეოთხე რიგის შემთხვევაში გამოიყენება [49] ნაშრომში აგებული დეკომპოზიციის ფორმულა).

(1.5) ფორმულა, ნახევარჯგუფის შესაბამისი რიგის სიზუსტის გახლეჩით ჩანაცვლების შემდეგ, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$u_k = V(p\tau)u_{k-p} + \tau \sum_{j=0}^p V(j\tau) \tilde{f}(t_{k-j}, u_{k-j}), \quad (1.6)$$

სადაც  $V(\tau)$  წარმოადგენს  $U(\tau, A)$  ნახევარჯგუფის გახლეჩას შესაბამისი რიგის სიზუსტით:

$$\|(V(\tau) - U(\tau, A))\varphi\| = O(\tau^n), \quad \varphi \in D(A^n). \quad (1.7)$$

(1.6) სქემის რიცხვითი გათვლისთვის საჭიროა  $p$  ცალი საწყისი ვექტორი. ერთი სასტარტო ვექტორი მოიცემა საწყისი პირობით, ხოლო დანარჩენი ვექტორების საპოვნელად დამატებითი გათვლების ჩატარებაა საჭირო. მესამე რიგის შემთხვევაში საჭიროა 2 დამატებით ვექტორის ( $u_1$  და  $u_2$ ) გამოთვლა, ხოლო მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემისათვის საჭიროა დამატებით ერთი სასტარტო ვექტორის ( $u_1$ ) გამოთვლა. კონკრეტული მეთოდებისთვის სასტარტო ვექტორების გამოთვლა სხვადასხვა ალგორითმებით ხდება, ეს ალგორითმები აღწერილია შესაბამისად ამ თავის 1.1 და 1.2 პარაგრაფებში.

(1.6) დეკომპოზიციის სქემით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნისთვის ხდება ცდომილების შეფასება და კრებადობის თეორემების დამტკიცება.

$V(\tau)$  ოპერატორი წარმოადგენს ერთგანზომილებიანი ოპერატორების რაციონალურ ფუნქციას. შესაბამისად, რიცხვითი რეალიზაციისას გათვლები დაიყვანება  $(I + \gamma\tau A_i)^{-1} \phi$  ვექტორის პოვნაზე, სადაც  $\phi$  მოცემული ვექტორია, ხოლო  $\gamma$  კომპლექსური რიცხვი დადებითი ნამდვილი ნაწილით. აქედან გამომდინარე, მაგალითად, როცა

$$A_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_i(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$D(A_i) = \left\{ \nu \in W_2^1([0, 1]^m) : \nu|_{x_i=0,1} = 0 \right\}.$$

$V(\tau)\phi$  ვექტორის საპოვნელად საჭიროა შემდეგი სახის ერთგანზომილებიანი ამოცანის ამოხსნა:

$$\nu'' + p\nu' - q\nu = \phi(x, \cdot), \quad x \in [0, 1]. \quad (1.8)$$

$$\nu(0, \cdot) = \nu(1, \cdot) = 0. \quad (1.9)$$

რადგან შემოთავაზებული დეკომპოზიციის სქემა მაღალი რიგის სიზუსტისაა დროითი ცვლადის მიმართ, ამიტომ მნიშვნელოვანია ასევე მაღალი რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემის გამოყენება სივრცითი ცვლადის მიმართ. რიცხვითი რეალიზაციის თვალსაზრისით, ასევე მნიშვნელოვანია, რომ სქემა იყოს სამწერტილოვანი. კარგად არის ცნობილი მაღალი რიგის სიზუსტის მეთოდები ერთგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის (იხ. მაგალითად N. S. Bakhvalov [77], T. S. Vashakmadze [78]).

(1.8) (1.9) განტოლების ამოხსნა ხდება შემდეგი მეოთხე რიგის სიზუსტის სხვაობიანი სქემით:

$$a_k \nu_{k+1} - c_k \nu_k + b_k \nu_{k-1} = \psi_k, \quad (1.10)$$

$$\nu_0 = \alpha_0, \quad \nu_N = \alpha_1,$$

სადაც

$$a_k = \left( 1 - \frac{h^3}{12} q_k' \right),$$

$$b_k = \left( 1 + \frac{h^3}{12} q_k' \right),$$

$$c_k = 2 + h^2 \left[ \left( 1 + \frac{h^3}{12} q_k \right) q_k + \frac{h^3}{12} q_k'' \right],$$

$$\psi_k = h^2 \left[ \left( 1 + \frac{h^3}{12} q_k \right) f_k + \frac{h^3}{12} f_k'' \right].$$

(1.8)-(1.9) ამოცანის ამოხსნა სივრცითი ცვლადის მიმართ მაღალი რიგის სიზუსტით ასევე შესაძლებელია თ. ვაშაყმაძის მიერ აგებული ეგრეთწოდებული (P) და (Q) ფორმულების გამოყენებით, იხ. [79].

რიცხვითი გათვლების შედეგები და შედარებითი ანალიზი მოყვანილია ბოლო თავში. რიცხვითი გათვლების შედეგების საფუძველზე ნაჩვენებია სქემის სიზუსტის რიგი და მდგრადობა. მიღებული რიცხვითი შედეგები სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ შედეგებთან.

## §1.1 მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა მრავალგანზომილებიანი კვაზიწრფივი ევოლუციური ამოცანისათვის

ამოცანის დასმა.

ამ პარაგრაფში (2.1) ამოცანისათვის აგებული იქნება მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა. აგებული სქემისთვის დავამტკიცებთ თეორემა კრებადობის შესახებ და ჩამოვყალიბებთ რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმს.

განვიხილოთ (2.1) ამოცანა. ვთქვათ,  $A$  არის თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი და წარმოდგება ასეთივე  $m$  ცალი ოპერატორის ჯამის სახით:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_m.$$

ამ პარაგრაფის მიზანს წარმოადგენს განხილული ამოცანისათვის მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემის აგება და გამოკვლევა.

შემოვიღოთ შემდეგი ბადე დროითი ცვლადის მიმართ

$$\bar{\omega}_\tau = (t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, \tau > 0).$$

(2.1) ამოცანის ამონახსნისთვის  $[0, t]$  დროით შუალედზე მართებულია შემდეგი ფორმულა (იხ. [75], [76]):

$$u(t) = U(t, A)u(0) + \int_0^t U(t-s, A)\tilde{f}(s, u(s))ds, \quad (1.1.1)$$

სადაც  $U(t, A) = \exp(-tA)$  ძლიერად უწყვეტი ნახევარჯგუფია, ხოლო მარჯვენა მხარე  $\tilde{f}(s, u(s)) = f(s) - M(u(s))$ .

$U(t, A)$  ნახევარჯგუფისთვის შემდეგი ფორმულის გამოყენებით (იხ. [75], [76])

$$A \int_r^t U(s, A)ds = U(r, A) - U(t, A), \quad 0 \leq r \leq t, \quad (1.1.2)$$

მივიღებთ შემდეგ გაშლას

$$U(t, A) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{t^i}{i!} A^i + R_k(t, A), \quad (1.1.3)$$

სადაც

$$R_k(t, A) = (-A)^k \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{k-1}} U(s, A) ds ds_{k-1}, \dots, ds_1. \quad (1.1.4)$$

თუ  $\varphi \in D(A^k)$ , მაშინ (1.1.4) ნაშთითი წევრისთვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_k(t, A)\varphi\| = O(\tau^k). \quad (1.1.5)$$

### დეკომპოზიციის სქემა.

გადავიდეთ მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემის აგებაზე. როგორც ამ თავის შესავალში აღვნიშნეთ, (1.1.1) ფორმულის ინტეგრალური წევრისთვის საჭიროა მეოთხე რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულის გამოყენება. ჩვენ ვაპირებთ გამოვიყენოთ შემდეგი ლოკალურად მეოთხე რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულა:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{4} \left( f(a) + 3f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) \right) + O((b-a)^4). \quad (1.1.6)$$

შესაბამისად, ჩვენ გვჭირდება (1.1.1) ფორმულის გადაწერა  $3\tau$  სიგრძის შუალედისთვის. ამიტომ (1.1.1) ფორმულა ჩავწეროთ  $[t_{k-1}, t_{k+2}]$  დროითი ინტერვალისთვის. ცხადია იგულისხმება, რომ საწყისი პირობა  $[t_{k-1}, t_{k+2}]$  ინტერვალის მარცხენა ბოლოში  $u(t_{k-1})$  უკვე გამოთვლილია წინა ეტაპზე.

$$u(t_{k+2}) = U(3\tau, A)u(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} U(t_{k+2} - s, A) \tilde{f}(s, u(s)) ds. \quad (1.1.7)$$

ამ ფორმულის საფუძველზე ავაგოთ მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის ფორმულა შემდეგნაირად: (1.1.7) ფორმულის ინტეგრალური ნაწილი შევცვალოთ (1.1.6) კვადრატურული ფორმულით, ხოლო  $U(t, A)$  ნახევრაჯგუფი შევცვალოთ მისი მესამე რიგის სიზუსტის რაციონალური გახლეჩით (იხ. [56], ფორმულა (2.3)). მივიღებთ შემდეგ დეკომპოზიციის სქემას:



$$u_{k+2} = V(3\tau)u_{k-1} + \frac{3}{4}\left(3V(\tau)\tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1}) + V(3\tau)\tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1})\right), \quad (1.1.8)$$

სადაც

$$\begin{aligned} V(\tau) &= T\left(\tau, \frac{\alpha}{2}\right)\bar{T}\left(\tau, \frac{\alpha}{2}\right)T\left(\tau, \frac{\bar{\alpha}}{2}\right)\bar{T}\left(\tau, \frac{\bar{\alpha}}{2}\right), \quad \alpha = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2\sqrt{3}}. \\ T(\tau, \alpha) &= W(\tau, \alpha A_1)W(\tau, \alpha A_2), \dots, W(\tau, \alpha A_m), \\ \bar{T}(\tau, \alpha) &= W(\tau, \alpha A_m)W(\tau, \alpha A_{m-1}), \dots, W(\tau, \alpha A_1), \\ W(\tau, A) &= \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)\left(I - \lambda\tau A\right)^{-1}\left(I - \bar{\lambda}\tau A\right)^{-1}, \quad \lambda = \frac{1}{3} \pm i\frac{1}{3\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

$W(\tau, A)$  ოპერატორი სკალარულ შემთხვევაში წარმოადგენს ლოკალურად მეოთხე რიგის სიზუსტის პადეს აპროქსიმაციას ექსპონენციალური ფუნქციისათვის. (1.1.9) ოპერატორული გახლეჩა გამოყენებულია [45], [46], [48], [49], და [56] შრომებში წრფივი ევოლუციური ამოცანისათვის მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემის ასაგებად. (1.1.9) ოპერატორული გახლეჩისთვის [56] ნაშრომში (იხ. გვ. 26) მიღებულია შემდეგი შეფასება:

$$\| [V(\tau) - U(\tau, A)]\varphi \| = O(\tau^4), \quad \varphi \in D(A^4). \quad (1.1.10)$$

(1.1.8) დეკომპოზიციის სქემის რიცხვითი რეალიზაციისათვის საჭიროა სამი სასტარტო ვექტორი:  $u_0, u_1$  და  $u_2$ .  $u_0 = \varphi$  განისაზღვრება საწყისი პირობიდან.  $u_1$  და  $u_2$  საწყისი ვექტორების გამოთვლა მესამე რიგის სიზუსტით ხორციელდება შემდეგი განტოლებებით:

$$u_i = V(\tau)u_{i-1} + \frac{\tau}{2}\left(V(\tau)\tilde{f}(t_{i-1}, u_{i-1}) + \tilde{f}(t_i, u_i)\right), \quad i = 1, 2. \quad (1.1.11)$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში შედის უცნობი  $u_i$  ვექტორი, ამიტომ (1.1.11) სქემის რიცხვითი რეალიზაციისთვის საჭიროა შემდეგი იტერაციის გამოყენება:

$$u_i^{(l+1)} = F_i + \frac{\tau}{2}M(u_i^{(l)}), \quad i = 1, 2, \quad (1.1.12)$$

სადაც  $l$  წარმოადგენს იტერაციის ინდექსს. (1.1.12) იტერაცია საკმაოდ სწრაფად იკრიბება, ორი მიზეზის გამო:

1. უცნობ ვექტორს მარჯვენა მხარეში აქვს მცირე პარამეტრი  $\frac{\tau}{2}$ ;

2.  $M(\cdot)$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას.

ამ ორი ფაქტის გათვალისწინებით (1.1.12)-დან ორი მომდევნო იტერაციის სხვაობისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \|u_i^{(l+1)} - u_i^{(l)}\| &= \frac{\tau}{2} \|M(u_i^{(l)}) - M(u_i^{(l-1)})\| \leq \frac{\tau}{2} q \|u_i^{(l)} - u_i^{(l-1)}\| \leq \dots \\ &\leq \left(\frac{\tau}{2} q\right)^l \|u_i^{(1)} - u_i^{(0)}\|, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

სადაც  $q$  არის ლიპშიცის მუდმივა. (1.1.13)-დან გამომდინარეობს, რომ (1.1.11) იტერაციული პროცესი იკრიბება გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით, სადაც მნიშვნელი უდრის  $\frac{\tau}{2} q$ -ს. იტერაციული პროცესის კრებადობის კიდევ უფრო დასაჩქარებლად საწყის იტერაციად აიღება წინა დროით შრეზე მიღებული ამონახსნი:  $u_i^{(0)} = u_{i-1}$ .

### კრებადობის თეორემა.

ჩამოვყალიბოთ თეორემა (1.1.8) დეკომპოზიციის სქემის კრებადობის შესახებ.

**თეორემა 1.1.1.** ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები:

I)  $A, A_1, A_2, \dots, A_m$  ოპერატორები თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორებია ჰილბერტის  $H$  სივრცეში;

II)  $M(\cdot)$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას;

III)  $u(t) \in D(A^4)$  ყოველი  $t \geq 0$ -თვის;

IV)  $\tilde{f}(t, u(t)) \in C^3([0, \infty); H)$ ;  $\tilde{f}(t, u(t)) \in D(A^3)$ ,

$\tilde{f}'(t, u(t)) \in D(A^2)$  და  $\tilde{f}''(t, u(t)) \in D(A)$  ყოველი ვიქსირებული  $t \geq 0$ -თვის.

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|u(t_k) - u_k\| = O(\tau^3). \quad (1.1.14)$$

თეორემის დამტკიცება.

(1.1.6) კვადრატული ფორმულის გამოყენებით (1.1.7) ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$u(t_{k+2}) = U(3\tau, A)u_{k-1} + \frac{3\tau}{4} \left( 3U(\tau, A)\tilde{f}(t_{k+1}, u(t_{k+1})) + U(3\tau, A)\tilde{f}(t_{k-1}, u(t_{k-1})) \right) + r_k(\tau), \quad (1.1.15)$$

სადაც  $r_k(\tau)$  არის კვადრატული ფორმულის ნაშთი, რომლისთვისაც, თუ სრულდება *თეორემა 1.1.1*-ის *IV* პირობა, მაშინ მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|r_k(\tau)\| = O(\tau^4). \quad (1.1.16)$$

(1.1.15) და (1.1.7) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$u(t_{k+2}) - u_{k+2} = r_k^{(1)}(\tau) + r_k^{(2)}(\tau) + r_k^{(3)}(\tau) + r_k(\tau), \quad (1.1.17)$$

სადაც

$$r_k^{(1)}(\tau) = U(3\tau, A)u(t_{k-1}) - V(3\tau)u_{k-1}, \quad (1.1.18)$$

$$r_k^{(2)}(\tau) = \frac{3}{4}\tau \left( U(\tau, A)\tilde{f}(t_{k+1}, u(t_{k+1})) - V(\tau)\tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1}) \right), \quad (1.1.19)$$

$$r_k^{(3)}(\tau) = \frac{9}{4}\tau \left( U(\tau, A)\tilde{f}(t_{k-1}, u(t_{k-1})) - V(\tau)\tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1}) \right). \quad (1.1.20)$$

შევაფასოთ (1.1.18)-(1.1.20) ნაშთითი წევრები. (1.1.18)-თვის (1.1.10) შეფასებისა და  $\|V(t_k)\| \leq 1$  უტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{aligned} \|r_k^{(1)}(\tau)\| &\leq \| [U(3\tau, A) - V(3\tau)]u(t_k) \| + \| V(3\tau) \| \|u(t_k) - u_k\| \\ &\leq \|u(t_k) - u_k\| + O(\tau^4). \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

აქ და ყველგან ქვემოთ  $c$ -თი აღნიშნულია აბსოლუტური კონსტანტა. (1.1.19)-თვის (1.1.10) შეფასების,  $\|V(t_k)\| \leq 1$  უტოლობისა და *თეორემა 1.1.1*-ის *II* პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\|r_k^{(2)}(\tau)\| &\leq c\tau \left( \| [U(\tau, A) - V(\tau)] \tilde{f}(t_{k+1}, u(t_{k+1})) \| \right. \\
&\quad \left. + \|V(\tau)\| \|M(u(t_{k+1})) - M(u_{k+1})\| \right) \\
&\leq c\tau \left( \|M(u(t_{k+1})) - M(u_{k+1})\| + O(\tau^4) \right) \\
&\leq c\tau \|u(t_{k+1}) - u_{k+1}\| + O(\tau^5).
\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

(1.1.19)-ის ანალოგიურად (1.1.20)-თვის მივიღებთ:

$$\|r_k^{(3)}(\tau)\| \leq c\tau \|u(t_{k-1}) - u_{k-1}\| + O(\tau^5). \tag{1.1.23}$$

ცდომილებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:  $z_k = \|u(t_k) - u_k\|$ . შესაბამისად (1.1.17)-ტოლობიდან (1.1.21)-(1.1.23) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$z_{k+2} \leq (c\tau z_{k+1} + (1 + c\tau)z_{k-1}) + O(\tau^4), \tag{1.1.24}$$

აქედან მივიღებთ

$$\begin{aligned}
z_{k+2} &\leq (1 + c\tau) \max(z_{k+1}, z_{k-1}) + O(\tau^4) \\
&\leq e^{c\tau} \max(z_{k+1}, z_{k-1}) + O(\tau^4).
\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

აქედან რეკურენტულად მივიღებთ:

$$z_{k+2} \leq e^{ct_k} \max(z_0, z_1, z_2) + O(\tau^3). \tag{1.1.26}$$

ცხადია  $z_0 = \|u(0) - u_0\| = \|\varphi - \varphi\| = 0$ . შევავსოთ  $z_1$  და  $z_2$ . (1.1.7)

ფორმულიდან ტრაპეციის კვადრატურული ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
u(t_i) &= U(\tau, A)u_{i-1} + \frac{\tau}{2} \left( U(\tau, A)\tilde{f}(t_{i-1}, u_{i-1}) + \tilde{f}(t_i, u_i) \right) \\
&\quad + r_i^{(4)}(\tau), \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

სადაც  $r_i^{(4)}(\tau)$  არის ტრაპეციის კვადრატურული ფორმულის ნაშთი და მისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|r_i^{(4)}(\tau)\| = O(\tau^3), \tag{1.1.28}$$

(1.1.27) და (1.1.11) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
z_i &= u(t_i) - u_i = U(\tau)u(t_{i-1}) - V(\tau)u_{i-1} + \frac{\tau}{2}(M(u(t_i)) - M(u_i)) \\
&\quad + U(\tau)\tilde{f}(t_{i-1}, u(t_{i-1})) - V(\tau)\tilde{f}(t_{i-1}, u_{i-1}) + r_i^{(4)}(\tau) \\
&= (U(\tau) - V(\tau))u(t_{i-1}) + V(\tau)(u(t_{i-1}) - u_{i-1}) \\
&\quad + \frac{\tau}{2}(M(u(t_i)) - M(u_i)) + \frac{\tau}{2}(U(\tau) - V(\tau))\tilde{f}(t_{i-1}, u(t_{i-1})) \\
&\quad + \frac{\tau}{2}V(\tau)(M(u(t_{i-1})) - M(u_{i-1})) + r_i^{(4)}(\tau), \quad i=1,2.
\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

(1.1.10) შეფასების,  $\|V(t_k)\| \leq 1$  უტოლობისა და თეორემა 1.1.1-ის II პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
z_i &\leq \|(U(\tau) - V(\tau))u(t_{i-1})\| + \|V(\tau)\|z_{i-1} \\
&\quad + \frac{\tau}{2}\|M(u(t_i)) - M(u_i)\| \\
&\quad + \frac{\tau}{2}\|(U(\tau) - V(\tau))\tilde{f}(t_{i-1}, u(t_{i-1}))\| \\
&\quad + \frac{\tau}{2}\|V(\tau)\| \|M(u(t_{i-1})) - M(u_{i-1})\| \\
&\leq \left(1 + c\frac{\tau}{2}\right)z_{i-1} + c\frac{\tau}{2}z_i + O(\tau^3), \quad i=1,2.
\end{aligned} \tag{1.1.30}$$

$z_i$  გადავიტანოთ უტოლობის მარცხენა მხარეში და გამოვსახოთ, მივიღებთ:

$$z_i \leq \frac{1 + c\frac{\tau}{2}}{1 - c\frac{\tau}{2}}z_{i-1} + O(\tau^3) \leq e^{c\tau}z_0 + O(\tau^3), \quad i=1,2. \tag{1.1.31}$$

აქ იგულისხმება, რომ  $c\frac{\tau}{2} < 1$ . თუ (1.1.31) ჩავსვამთ (1.1.26) უტოლობაში, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$z_{k+2} \leq e^{c\tau k}z_0 + O(\tau^3). \tag{1.1.32}$$

აქედან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობა (1.1.14).

რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმი.

(1.1.8) დეკომპოზიციის სქემის რიცხვითი რეალიზაცია ხდება შემდეგი ალგორითმით:

$$u_{k+2} = V(3\tau) \left( u_{k-1} + \frac{3}{4} \tau \tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1}) \right) + \frac{9}{4} \tau V(\tau) \tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1}). \quad (1.1.33)$$

ამ სქემიდან ჩანს, რომ რიცხვითი რეალიზაციისათვის საჭიროა  $V(t)\varphi$  ვექტორის გამოთვლა. რადგან  $V$  ოპერატორი წარმოადგენს  $W$  რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციების კომბინაციას, ხოლო თავის მხრივ  $W$  ოპერატორი გამოისახება  $(I + \gamma\tau A_i)^{-1}$ ,  $i=1,2,\dots,m$  ოპერატორების საშუალებით (აქ  $\gamma$  ზოგადად კომპლექსური რიცხვითი პარამეტრია), ამიტომ  $V(t)\varphi$  ვექტორის საპოვნელად საჭიროა შემდეგი განტოლების ამოხსნა:

$$v + \gamma\tau A_i v = \varphi. \quad (1.1.34)$$

კონკრეტული ამოცანის ამოხსნისთვის, მაგალითად, თუ  $A$  წარმოადგენს ლაპლასის ოპერატორს (მრავალგანზომილებიანს), მაშინ (1.1.34) განტოლება დაიყვანება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე. ამ განტოლების ამოხსნა ხორციელდება (1.10) მეოთხე რიგის სიზუსტის სამშრიანი სხვაობიანი სქემით. IV თავში მოყვანილია სხვადასხვა ტესტური ამოცანების რიცხვითი გათვლის შედეგები ამ პარაგრაფში შემოთავაზებული ალგორითმის საფუძველზე. რიცხვით გათვლების შედეგების საფუძველზე ნაჩვენებია სქემის სიზუსტის რიგი და მდგრადობა. მიღებული რიცხვითი შედეგები სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ შედეგებთან.

## §1.2 მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა მრავალგანზომილებიანი კვაზიწრფივი ევოლუციური ამოცანისათვის

### ამოცანის დასმა.

ამ პარაგრაფში (2.1) ამოცანისათვის აგებული იქნება მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა. აგებული სქემისთვის დავამტკიცებთ თეორემას კრებადობის შესახებ და ჩამოვყალიბებთ რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმს.

განვიხილოთ (2.1) ამოცანა. ვთქვათ,  $A$  ოპერატორი წარმოდგება  $m$  ცალი თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორის ჯამის სახით:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_m.$$

შემოვიღოთ შემდეგი ბადე დროითი ცვლადის მიმართ

$$\bar{\omega}_\tau = (t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, \tau > 0).$$

### დეკომპოზიციის სქემა.

წინა პარაგრაფის ანალოგიურად, დეკომპოზიციის სქემის აგება ეფუძნება (1.1.1) ფორმულას. ამ ფორმულაში საჭიროა ნახევარჯგუფის შეცვლა ლოკალურად მეხუთე რიგის სიზუსტის გახლეჩით, ხოლო ინტეგრალური წევრისთვის მეხუთე რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულის გამოყენება. ჩვენ ვაპირებთ სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის გამოყენებას. შესაბამისად, ჩვენ გვჭირდება (1.1.1) ფორმულის გადაწერა  $2\tau$  სიგრძის შუალედისთვის. ამიტომ (1.1.1) ფორმულა ჩავწეროთ  $[t_{k-1}, t_{k+1}]$  დროითი ინტერვალისთვის.

$$u(t_{k+1}) = U(2\tau, A)u(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s, A) \tilde{f}(s, u(s)) ds. \quad (1.2.1)$$

ამ ფორმულაში გამოვიყენოთ სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის აბსტრაქტული ანალოგი, ხოლო ნახევარჯგუფი შევცვალოთ [51] (იხ. გვ. 8-9) ნაშრომში აგებული ლოკალურად მეხუთე რიგის სიზუსტის გახლეჩით, მივიღებთ შემდეგ მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემას:

$$u_{k+1} = V(2\tau)u_{k-1} + \frac{\tau}{3} \left( \tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1}) + 4V(\tau)\tilde{f}(t_k, u_k) + V(2\tau)\tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1}) \right), \quad (1.2.2)$$

სადაც

$$V(\tau) = T\left(\tau, \frac{\bar{\alpha}}{4}\right)\bar{T}\left(\tau, \frac{\bar{\alpha}}{2}\right)T\left(\tau, \frac{\alpha}{2}\right)\bar{T}\left(\tau, \frac{\alpha}{2}\right) \\ \times T\left(\tau, \frac{\alpha}{2}\right)\bar{T}\left(\tau, \frac{\alpha}{2}\right)T\left(\tau, \frac{\bar{\alpha}}{4}\right)\bar{T}\left(\tau, \frac{\bar{\alpha}}{2}\right), \\ T(\tau, \alpha) = W(\tau, \alpha A_1)W(\tau, \alpha A_2), \dots, W(\tau, \alpha A_m), \quad \alpha = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad (1.2.3) \\ \bar{T}(\tau, \alpha) = W(\tau, \alpha A_m)W(\tau, \alpha A_{m-1}), \dots, W(\tau, \alpha A_1), \\ W(\tau, A) = \left(I - \frac{1}{3}\tau A\right)\left(I - \lambda\tau A\right)^{-1}\left(I - \bar{\lambda}\tau A\right)^{-1}, \quad \lambda = \frac{1}{3} \pm i \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

[51] ნაშრომში (იხ. გვ. 107, ფორმულა (8.55)) ნაჩვენებია, რომ  $V(\tau)$  ოპერატორი ახდენს  $U(\tau, A)$  ოპერატორის აპროქსიმაციას ლოკალურად მეხუთე რიგის სიზუსტით:

$$\| [V(\tau) - U(\tau, A)]\varphi \| = O(\tau^5), \quad \varphi \in D(A^5). \quad (1.2.4)$$

(1.2.2) დეკომპოზიციის სქემაში უცნობი  $u_{k+1}$  ვექტორი შედის ტოლობის ორივე მხარეს, ამიტომ რიცხვითი რეალიზაციისათვის დროის ყოველ  $t_{k+1}$  შრეზე გამოყენებული იქნება შემდეგი იტერაცია:

$$u_{k+1}^{(l)} = -\frac{\tau}{3} M(u_{k+1}^{(l-1)}) + F_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.2.5)$$

აქ  $l$  იტერაციის ინდექსია, ხოლო  $F_k$  არ არის დამოკიდებული იტერაციის ინდექსზე და ყოველ შრეზე მხოლოდ ერთხელ გამოითვლება:

$$F_k = V(2\tau) \left( u_{k-1} + \frac{\tau}{3} \tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1}) \right) + \frac{4\tau}{3} V(\tau) \tilde{f}(t_k, u_k) + \frac{\tau}{3} \tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1}). \quad (1.2.6)$$

წინა პარაგრაფის ანალოგიურად, (1.2.5) იტერაციაც საკმაოდ სწრაფად იკრიბება. (1.1.13)-ის ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ:



$$\|u_{k+1}^{(l+1)} - u_{k+1}^{(l)}\| \leq \left(\frac{\tau}{3}q\right)^l \|u_{k+1}^{(1)} - u_{k+1}^{(0)}\|, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.2.7)$$

სადაც  $q$  ლიპშიცის მუდმივაა. (1.2.7)-დან გამომდინარეობს, რომ (1.2.5) იტერაცია იკრიბება გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით, სადაც მნიშვნელი უდრის  $\frac{\tau}{3}q$ .

(1.2.2) დეკომპოზიციის სქემის რიცხვითი რეალიზაციისათვის საჭიროა ორი სასტარტო ვექტორი -  $u_0$  და  $u_1$ .  $u_0$  მოცემულია ( $u_0 = \phi$ ). ჩვენი მიზანია  $u_1$  ვიპოვოთ მეოთხე რიგის სიზუსტით.  $u_1$ -ის გამოსათვლელად ვიყენებთ (1.3) ფორმულას, საიდანაც გვაქვს:

$$u(t_1) = U(\tau, A)u(0) + \int_0^\tau U(\tau - s, A)f(s, u(s))ds, \quad (1.2.8)$$

ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ  $u(t_1)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა  $u_1$  მეოთხე რიგის სიზუსტით. (1.2.8) ფორმულაში პირველი შესაკრების გამოსათვლელად  $U(\tau, A)$  ნახევარჯგუფს ვცვლით  $V(\tau)$  რაციონალური გახლეჩით, ხოლო ინტეგრალური წევრისთვის საჭიროა შესაბამისი რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულის გამოყენება. ტრაპეციის ფორმულის გამოყენება არაა საკმარისი, რადგან მისი ლოკალური სიზუსტის რიგი უდრის სამს, ხოლო სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის გამოყენებისას დამატებით შემოვა  $\frac{\tau}{2}$  კვანძი. ეს ნიშნავს, რომ ფორმულის მარჯვენა მხარეში

გაჩნდება უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობა დამატებით  $\frac{\tau}{2}$  კვანძში - ეს მნიშვნელობა აღვნიშნოთ  $u_{1/2}$ -ით. (1.2.8) ფორმულის შესაბამის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$u_1 = V(\tau)u_0 + \frac{\tau}{6} \left( \tilde{f}(\tau, u_1) + 4V\left(\frac{\tau}{2}\right)\tilde{f}(\tau, u_{1/2}) + V(\tau)\tilde{f}(0, u_0) \right), \quad (1.2.9)$$

(1.2.9) განტოლებაში  $u_{1/2}$ -ს კოეფიციენტად უზის  $\frac{\tau}{6}$ , ამიტომ მისი გამოთვლა საკმარისია მესამე რიგის სიზუსტით. საბოლოოდ  $u_1$ -ს მივიღებთ მეოთხე რიგის სიზუსტით  $\tau$  პარამეტრის მიმართ და ეს საკმარისია იმისთვის, რომ (1.2.2) დეკომპოზიციის ფორმულის საშუალებით გამოვთვალოთ  $u_k$  დროის ყოველ  $k$ -ურ შრეზე მეოთხე რიგის სიზუსტით.

$u_{1/2}$ -ს ვითვლით  $u_1$ -ის ანალოგიურად (1.3) ფორმულის გამოყენებით, იმ განსხვავებით, რომ სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის ნაცვლად ვიყენებთ ტრაპეციის ფორმულას. შესაბამის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$u_{1/2} = V\left(\frac{\tau}{2}\right)u_0 + \frac{\tau}{4}\left(\tilde{f}(\tau, u_{1/2}) + V\left(\frac{\tau}{2}\right)\tilde{f}(0, u_0)\right). \quad (1.2.10)$$

(1.2.9) და (1.2.10) განტოლებები გამოითვლება იტერაციით (1.2.5)-ის მსგავსად. ორივე, (1.2.9) და (1.2.10) იტერაციული პროცესი იკრიბება გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით შესაბამისად  $\frac{\tau}{6}q$  და  $\frac{\tau}{4}q$  მნიშვნელით.

**შენიშვნა.** (1.2.2) დეკომპოზიციის სქემის რიცხვითი რეალიზაციისათვის მოხერხებულია  $W(\tau, A)$  რაციონალური ოპერატორ-ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$W(\tau, A) = \left(2\left(I + \frac{\alpha}{2}\tau A\right)^{-1} - I\right)\left(2\left(I + \frac{\bar{\alpha}}{2}\tau A\right)^{-1} - I\right). \quad (1.2.11)$$

**კრებადობის თეორემა.**

**თეორემა 1.2.1.** ვთქვათ სრულდება შემდეგი პირობები:

- I)  $A_1, A_2, \dots, A_m$  ოპერატორები თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორებია ჰილბერტის  $H$  სივრცეში;
- II)  $M(\cdot)$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას;
- III)  $u(t) \in D(A^5)$  ყოველი  $t \geq 0$ -თვის;
- IV)  $\tilde{f}(t, u(t)) \in C^3([0, \infty); H)$ ;  $\tilde{f}(t, u(t)) \in D(A^3)$  და  $\tilde{f}^{(i)}(t, u(t)) \in D(A^{3-i})$ ,  $i=1, 2$  ყოველი ფიქსირებული  $t \geq 0$ -თვის.

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|u(t_k) - u_k\| = O(\tau^4). \quad (1.2.12)$$

თეორემის დამტკიცება.

(1.1.7) ფორმულა სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის გამოყენებით ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} u(t_{k+1}) = & U(2\tau, A)u(t_{k-1}) + \frac{\tau}{3}(\tilde{f}(t_{k+1}, u(t_{k+1}))) \\ & + 4U(\tau, A)\tilde{f}(t_k, u(t_k)) + U(2\tau, A)\tilde{f}(t_{k-1}, u(t_{k-1})) + r_k(\tau), \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

სადაც  $r_k(\tau)$  არის სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრი. თუ სრულდება *თეორემა 1.2.1*-ის *IV* პირობა, მაშინ მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|r_k(\tau)\| = O(\tau^5). \quad (1.2.14)$$

(1.2.13)-ს გამოვაკლოთ (1.2.2) დეკომპოზიციის ფორმულა, მივიღებთ:

$$u(t_{k+1}) - u_{k+1} = r_k^{(1)}(\tau) + r_k^{(2)}(\tau) + r_k^{(3)}(\tau) + r_k^{(4)}(\tau) + r_k(\tau), \quad (1.2.15)$$

სადაც

$$r_k^{(1)}(\tau) = U(2\tau, A)u(t_{k-1}) - V(2\tau)u_{k-1}, \quad (1.2.16)$$

$$r_k^{(2)}(\tau) = \frac{\tau}{3}(M(u(t_{k+1})) - M(u_{k+1})), \quad (1.2.17)$$

$$r_k^{(3)}(\tau) = \frac{4\tau}{3}(U(\tau, A)\tilde{f}(t_k, u(t_k)) - V(\tau)\tilde{f}(t_k, u_k)), \quad (1.2.18)$$

$$r_k^{(4)}(\tau) = \frac{1}{8}r_{k-1}^{(3)}(2\tau). \quad (1.2.19)$$

შევაფასოთ (1.2.16)-(1.2.19) ნაშთითი წევრები. ამისათვის საჭიროა  $V(\tau)$  ოპერატორის ნორმის შეფასება, ხოლო თავის მხრივ  $V(\tau)$  ოპერატორის შესაფასებლად საჭიროა  $W\left(\tau, \frac{\alpha}{4}A\right)$  და  $W\left(\tau, \frac{\bar{\alpha}}{4}A\right)$  რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციების ნორმის შეფასება. როგორც ცნობილია, როდესაც არგუმენტი წარმოადგენს თვითშეუღლებულ ოპერატორს, ოპერატორ-პოლინომის ნორმა უდრის შესაბამისი სკალარული ფუნქციის  $C$  ნორმას

არგუმენტის სპექტრზე (მაგალითად იხ. [80], თავი VII). შესაბამისად,  $W\left(\tau, \frac{\alpha}{4} A\right)$ -თვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\left\|W\left(\tau, \frac{\alpha}{4} A\right)\right\| &\leq \max_{x \geq 0} \left( \left| \frac{1 - \frac{\alpha^2}{8} \tau x}{1 + \frac{\alpha^2}{8} \tau x} \right| \left| \frac{1 - \frac{\alpha \bar{\alpha}}{8} \tau x}{1 + \frac{\alpha \bar{\alpha}}{8} \tau x} \right| \right) \\
&= \max_{x \geq 0} \left( \left( \frac{\left(1 - \frac{\alpha^2}{8} \tau x\right) \left(1 - \frac{\bar{\alpha}^2}{8} \tau x\right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{8} \tau x\right) \left(1 + \frac{\bar{\alpha}^2}{8} \tau x\right)} \right)^{1/2} \left| \frac{1 - \frac{1}{24} \tau x}{1 + \frac{1}{24} \tau x} \right| \right) \\
&\leq \max_{x \geq 0} \left( \left( \frac{\left(1 - \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{8} \tau x + \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{64} \tau^2 x^2\right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{8} \tau x + \frac{\alpha^2 \bar{\alpha}^2}{64} \tau^2 x^2\right)} \right)^{1/2} \right) \\
&= \max_{x \geq 0} \left( \left( \frac{\left(1 - \frac{1}{24} \tau x + \frac{1}{567} \tau^2 x^2\right)}{\left(1 + \frac{1}{24} \tau x + \frac{1}{576} \tau^2 x^2\right)} \right)^{1/2} \right) = 1. \tag{1.2.20}
\end{aligned}$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$\left\|W\left(\tau, \frac{\bar{\alpha}}{4} A\right)\right\| \leq 1. \tag{1.2.21}$$

(1.2.3)-დან (1.2.20) და (1.2.21)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\|V(\tau)\| \leq 1. \tag{1.2.22}$$

დავუბრუნდეთ (1.2.16)-(1.2.19) ნაშთითი წევრების შეფასებას.  $r_k^{(1)}(\tau)$ -თვის მართებულია შემდეგი უტოლობა:

$$\|r_k^{(1)}(\tau)\| \leq \|(U(2\tau, A) - V(2\tau))u(t_{k-1})\| + \|V(2\tau)\| \|z_{k-1}\|, \tag{1.2.23}$$

სადაც  $z_k$  არის მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება  $z_k = u(t_k) - u_k$ .

(1.2.23)-დან (1.2.4) და (1.2.22) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\|r_k^{(1)}(\tau)\| \leq \|z_{k-1}\| + O(\tau^5). \quad (1.2.24)$$

თუ გავითვალისწინებთ *თეორემა 1.2.1*-ის *II* პირობას ( $M(\cdot)$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას), მაშინ  $r_k^{(2)}(\tau)$ -თვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|r_k^{(2)}(\tau)\| \leq c\tau \|z_{k+1}\|. \quad (1.2.25)$$

(1.2.24)-ის ანალოგიურად.  $r_k^{(3)}(\tau)$  და  $r_k^{(4)}(\tau)$ -თვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებებს:

$$\begin{aligned} \|r_k^{(3)}(\tau)\| &\leq c\tau \left( \| (U(\tau, A) - V(\tau)) \tilde{f}(t_k, u(t_k)) \| + \|V(\tau)\| \|z_k\| \right) \\ &\leq c\tau \left( \|z_k\| + O(\tau^5) \right). \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

$$\|r_k^{(4)}(\tau)\| \leq c\tau \left( \|z_{k-1}\| + O(\tau^5) \right). \quad (1.2.27)$$

(1.2.15) ფორმულიდან (1.2.24)-(1.2.27) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|z_{k+1}\| \leq c\tau \|z_{k+1}\| + c\tau \|z_k\| + (1 + c\tau) \|z_{k-1}\| + O(\tau^5). \quad (1.2.28)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ  $1 - c\tau > 0$ , მაშინ (1.2.28) უტოლობიდან მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned} \|z_{k+1}\| &\leq \frac{1}{1 - c\tau} \left( c\tau \|z_k\| + (1 + c\tau) \|z_{k-1}\| + O(\tau^5) \right) \\ &\leq \rho_\tau \left( \max(\|z_k\|, \|z_{k-1}\|) + O(\tau^5) \right), \quad \rho_\tau = \frac{1 + 2c\tau}{1 - c\tau}. \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

აქედან გვაქვს

$$\lambda_{k+1} \leq \rho_\tau \left( \lambda_k + O(\tau^5) \right), \quad (1.2.30)$$

სადაც  $\lambda_k = \max(\|z_k\|, \|z_{k-1}\|)$ .

თუ (1.2.30) ფორმულას რეკურენტულად დავახვევთ, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} &\leq \rho_\tau^k \lambda_1 + \rho_\tau (1 + \rho_\tau + \rho_\tau^2 \dots + \rho_\tau^k) O(\tau^5) \\ &\leq \rho_\tau^k \lambda_1 + \rho_\tau \frac{\rho_\tau^k - 1}{\rho_\tau - 1} O(\tau^5) \leq \rho_\tau^k \lambda_1 + \rho_\tau^{k+1} O(\tau^4).\end{aligned}\quad (1.2.31)$$

ვთქვათ  $\tau \leq \frac{1}{2c}$ , მაშინ (1.2.31)-დან მივიღებთ:

$$\lambda_{k+1} \leq (1 + c_0 \tau)^k \lambda_1 + (1 + c_0 \tau)^{k+1} O(\tau^4), \quad c_0 = 6c. \quad (1.2.32)$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\|z_{k+1}\| \leq e^{c_0 t_{k+1}} \left( \max(\|z_1\|, \|z_0\|) + O(\tau^4) \right), \quad (1.2.33)$$

საბოლოო შეფასების მისაღებად საჭიროა  $\|z_1\|$ -ის ნორმის შეფასება. (1.2.8) ფორმულიდან გვაქვს:

$$\begin{aligned}u(t_1) &= U(\tau, A)u(t_0) + \frac{\tau}{6} \left( \tilde{f}(\tau, u(t_1)) + 4U\left(\frac{\tau}{2}, A\right) \tilde{f}\left(\frac{\tau}{2}, u(t_{1/2})\right) \right) \\ &\quad + U(\tau, A) \tilde{f}(0, u(t_0)) + r(\tau),\end{aligned}\quad (1.2.34)$$

სადაც  $r(\tau)$  არის სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრი, რომლისთვისაც მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$r(\tau) = O(\tau^5). \quad (1.2.35)$$

(1.2.34) და (1.2.35) ფორმულებიდან, (1.2.28) უტოლობის ანალოგიურად, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|z_1\| \leq c\tau \|z_1\| + c\tau \|z_{1/2}\| + (1 + c\tau) \|z_0\| + O(\tau^5). \quad (1.2.36)$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\|z_1\| \leq \frac{1}{1 - c\tau} \left( c\tau \|z_{1/2}\| + (1 + c\tau) \|z_0\| + O(\tau^5) \right). \quad (1.2.37)$$

თუ (1.2.10)-თვის გამოვიყენებთ სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრის შეფასებას, (1.2.36)-ის ანალოგიურად მივიღებთ შემდეგ უტოლობას:

$$\|z_{1/2}\| \leq c\tau \|z_{1/2}\| + c\tau \|z_0\| + O(\tau^3). \quad (1.2.38)$$

აქედან გვაქვს:

$$\|z_{1/2}\| \leq \frac{1}{1-c\tau} (c\tau \|z_0\| + O(\tau^3)). \quad (1.2.39)$$

$\|z_1\|$ -ისთვის საბოლოო შეფასების მისაღებად ჩავსვით (1.2.39) უტოლობა (1.2.37)-ში (ასევე გავითვალისწინოთ, რომ  $\|z_0\| = 0$ , რადგან  $u_0 = u(t_0) = \varphi$ ) მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|z_1\| \leq \frac{1}{(1-c\tau)^2} O(\tau^4) + \frac{1}{1-c\tau} O(\tau^5) = O(\tau^4). \quad (1.2.40)$$

თუ ჩავსვამთ (1.2.40) უტოლობას (1.2.33)-ში და გავითვალისწინებთ, რომ  $\|z_0\| = 0$ , მაშინ მივიღებთ საძიებელ შეფასებას.

**თეორემა 1.2.1 დამტკიცებულია.**

## თავი II

### დეკომპოზიციის სქემები კვაზიწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის

ამ თავში განხილულია კომის ამოცანა მრავალგანზომილებიანი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის. პირველ თავში აგებული დეკომპოზიციის სქემები მრავალგანზომილებიანი ევოლუციური განტოლებისათვის ეფუძნებოდა ნახევარჯგუფის გახლეჩას. ანალოგიური მიდგომა შეიძლება განხორციელდეს ჰიპერბოლური განტოლებისათვისაც.

წარმოდგენილ თავში მრავალგანზომილებიანი აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლების ამონახსნის წარმოდგენა ხდება სინუს და კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციების საშუალებით, სადაც არგუმენტად აღებულია კვადრატული ფესვი ძირითადი ოპერატორიდან. ამ ფორმულის გამოყენებით, დროითი ცვლადის თანაბრად დაშორებული მნიშვნელობებისათვის აიგება ზუსტი სამშრიანი სქემა, რომლის გადასვლის ოპერატორი კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციაა.

ეს თავი შედგება ორი პარაგრაფისაგან.

წარმოდგენილი თავის პირველ პარაგრაფში ამ ფორმულის საფუძველზე აიგება მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა. კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციის გახლეჩა ხდება რაციონალური ოპერატორ-ფუნქციის საშუალებით, ხოლო არაერთგვაროვანი წევრის შესაბამისი ინტეგრალის შეცვლა ხდება სიმპსონის კვადრატურული ფორმულით. დამტკიცებულია თეორემა კრებადობის შესახებ და მიღებულია შეფასება მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისათვის.

ამ თავის მეორე პარაგრაფში მოცემულია პირველ პარაგრაფში აგებული დეკომპოზიციის სქემის განზოგადება ლიპშიც-უწყვეტი მარჯვენა მხარის შემთხვევისათვის. დამტკიცებულია თეორემა კრებადობის შესახებ განზოგადებული ამოცანისათვის და მიღებულია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება.

მესამე თავში მოყვანილია რიცხვითი გათვლის შედეგები აგებული დეკომპოზიციის სქემების საფუძველზე.



## §2.1 მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა მრავალგანზომილებიანი წრფივი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის

ამოცანის დასმა.

განვიხილოთ კომის ამოცანა აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის ჰილბერტის  $H$  სივრცეში.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.1.1)$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = \varphi_1, \quad (2.1.2)$$

სადაც  $A$  არის თვითშეუღლებული ( $A$  არ არის დროზე დამოკიდებული), დადებითად განსაზღვრული (საზოგადოდ შემოუსაზღვრელი) ოპერატორი,  $D(A)$  განსაზღვრის არით, რომელიც ყველგან მკვრივია  $H$ -ში,  $\overline{D(A)} = H$ ,  $A = A^*$  და

$$(Au, u) \geq a\|u\|, \quad \forall u \in D(A), \quad a = \text{const} > 0,$$

აქ  $(\cdot, \cdot)$  და  $\|\cdot\|$ -ით აღნიშნულია შესაბამისად ნორმა და სკალარული ნამრავლი  $H$  ჰილბერტის სივრცეში;  $\varphi_0$  და  $\varphi_1$  მოცემული ვექტორებია  $H$ -დან;  $f(t)$  მოცემული ფუნქციაა მნიშვნელობებით  $H$ -ში;  $u(t)$  უწყვეტი და ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი საძიებელი ფუნქციაა მნიშვნელობებით  $H$ -ში.

ცნობილია, რომ თუ  $\varphi_0 \in D(A)$ ,  $\varphi_1 \in D(A^{1/2})$  და  $f(t) \in C^1([0, t]; H)$ , მაშინ არსებობს ისეთი ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1.1) განტოლებას და (2.1.2) საწყის პირობებს (იხ. [80], თავი 3, § 1). ამ შემთხვევაში ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$u(t) = \cos(tA^{1/2})\varphi_0 + A^{-1/2} \sin(tA^{1/2})\varphi_1 + \int_0^t \sin((t-s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds, \quad (2.1.3)$$

აქ  $\cos(tA^{1/2})$  და  $\sin(tA^{1/2})$  ოპერატორ-ფუნქციები განისაზღვრებიან ეილერის განზოგადებული ფორმულებით:

$$\cos(tA^{1/2}) = \frac{1}{2}(e^{itA} + e^{-itA}),$$

$$\sin(tA^{1/2}) = \frac{1}{2i}(e^{itA} - e^{-itA}),$$

სადაც  $\{e^{\pm it\sqrt{A}}\}$  არის  $(iA^{1/2})$  ოპერატორის მიერ წარმოქმნილი ოპერატორთა უნიტარული ჯგუფი.

მტკიცდება, რომ არსებობს ზღვარი  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( I \pm \frac{t}{n} A \right)^n \varphi$  ( $I$  არის იგივერი ოპერატორი), ნებისმიერი  $\varphi \in D(A)$  და ეს ზღვარი აღინიშნება  $e^{\pm it\sqrt{A}} \varphi$ -ით (იხ. [81], თავი 9).

ვთქვათ,  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_m$ , სადაც  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) არიან თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორები.

შემოვიღოთ შემდეგი ბადური სიმრავლე.

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{ t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, n, \quad n > 1 \quad \tau = \frac{T}{n} \right\}.$$

(2.1.3) ფორმულიდან მიიღება შემდეგი სამწერტილოვანი რეკურენტული დამოკიდებულება:

$$u(t_{k+1}) = 2\cos(\tau A^{1/2})u(t_k) - u(t_{k-1}) + \tau^2 \psi(t_k), \quad (2.1.4)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \tau^2 \psi(t_k) = & \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \sin((t_{k+1} - s)A^{1/2})A^{-1/2} f(s) ds \\ & - 2\cos(\tau A^{1/2}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin((t_{k+1} - s)A^{1/2})A^{-1/2} f(s) ds. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

**დეკომპოზიციის სქემა.**

(2.1.5) ფორმულის გამოყენებით კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციის გახლეჩის საფუძველზე ავსვით შემდეგი დეკომპოზიციის სქემა:

$$u_{k+1} = 2V(\tau)u_k - u_{k-1} + \tau^2\psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.1.6)$$

$$u_0 = \varphi_0, \quad u_1 = \frac{1}{2} \left( V(\tau)\varphi_0 + \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)\varphi_1 \right) + \tau^2\varphi_2, \quad (2.1.7)$$

სადაც

$$V(\tau) = \frac{2}{m+2} \left[ V_0(\tau, A_1, A_2, \dots, A_m) + V_0(\tau, A_m, A_{m-1}, \dots, A_1) + \sum_{j=1}^m (I + \lambda\tau^2 A_j)^{-1} \right], \quad (2.1.8)$$

$$V_0(\tau, A_1, A_2, \dots, A_m) = (I + \alpha\tau^2 A_1)^{-1} (I + \alpha\tau^2 A_2)^{-1} \dots (I + \alpha\tau^2 A_m)^{-1} \times (I + \bar{\alpha}\tau^2 A_m)^{-1} (I + \bar{\alpha}\tau^2 A_{m-1})^{-1} \dots (I + \bar{\alpha}\tau^2 A_1)^{-1}, \quad (2.1.9)$$

$$\psi_k = \left( I + \frac{1}{12}\tau^2 A_1 \right)^{-1} \left( I + \frac{1}{12}\tau^2 A_2 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{1}{12}\tau^2 A_m \right)^{-1} f(t_k) + \frac{1}{2}\tau^2 f''(t_k), \quad (2.1.10)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}f(0) + \frac{\tau}{6}f'(0) + \frac{\tau^2}{24}f''(0) - \frac{2\tau^2}{3}Af(0), \quad (2.1.11)$$

სე  $\lambda = \frac{m+2}{2} - \frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{6}}$ ,  $\alpha = \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}} \pm i\sqrt{\frac{m+2}{96} + \frac{\lambda^2}{2}}$ ,  $\bar{\alpha}$  არის  $\alpha$  კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული;  $f(t)$  მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარეა,  $\varphi_0$  და  $\varphi_1$  საწყისი მნიშვნელობებია,  $\tau$  დროითი ბიჯია, ხოლო  $n > 1$  არის დაყოფათა რიცხვი დროითი ცვლადის მიმართ.

$u_k$ -ს ვაცხადებთ (2.1.1), (2.1.2) ამოცანის ამონახსნის  $u(t)$ -ს მიახლოებით მნიშვნელობად  $t = t_k$  წერტილში.

შევნიშნოთ, რომ (2.1.6-2.1.7) დეკომპოზიციის სქემის რიცხვითი რეალიზაციისათვის საჭიროა  $I + \gamma\tau^2 A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $\gamma = \lambda, \alpha, \bar{\alpha}$ )

ოპერატორის შეზღუდვა. ეს კი შემდეგი განტოლების ამოხსნის ექვივალენტურია:

$$\varphi + \gamma \tau^2 A_j \varphi = f,$$

სადაც  $f$  მოცემული ვექტორია.

**დეკომპოზიციის სქემის მდგრადობა.**

(2.1.1),(2.1.2) დეკომპოზიციის სქემის მდგრადობის გამოსაკვლევად გვჭირდება შემდეგი ლემა (იხ. [33]).

**ლემა 2.1.1.** ვთქვათ, მოცემულია შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულება:

$$u_{k+1} = Lu_k - Su_{k-1} + f_k, \quad (2.1.12)$$

სადაც  $L$  და  $S$  წრფივი, კომუტატორი ოპერატორებია, რომლებიც მოქმედებენ  $X$  წრფივ სივრცეში;  $u_0, u_1$  და  $f_k$  მოცემული ვექტორებია ამ სივრციდან. მაშინ მართებულია შემდეგი ფორმულა:

$$u_{k+1} = U_k(L, S)u_1 - SU_{k-1}(L, S)u_0 + \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, S)f_i, \quad (2.1.13)$$

სადაც  $U_k(L, S)$  ოპერატორ პოლინომი აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned} U_{k+1}(L, S) &= LU_k(L, S) - SU_{k-1}(L, S), \quad k = 1, 2, \dots \\ U_0(L, S) &= I, \quad U_1(L, S) = L. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

(2.1.13) რეკურენტული დამოკიდებულება მარტივად მტკიცდება ინდუქციის მეთოდით (იხ. [33]).

გავაგრძელოთ (2.1.1),(2.1.2) დეკომპოზიციის სქემის მდგრადობის გამოკვლევა. ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

**თეორემა 2.1.1.** ვთქვათ,  $A_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) არიან თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორები. მაშინ (2.1.1), (2.1.2) დეკომპოზიციის სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\begin{aligned} \|u_k\| \leq & \|\varphi_0\| + v\|\varphi_1\| + v\tau\|\varphi_2\| \\ & + vt_k \left( \max_{t \in [0,t_k]} \|f(t)\| + \frac{\tau^2}{12} \max_{t \in [0,t_k]} \|f''(t)\| \right), \quad k=1,\dots,n, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

სადაც  $v = \frac{1+\tau^2 v_0}{\sqrt{v_0}}$ , ხოლო  $v_0$  არის  $A_j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ) ოპერატორების ქვედა მინიმალური საზღვარი.

**თეორემის დამტკიცება.**

(2.1.13) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$u_{k+1} = U_k(L, I)u_1 - U_{k-1}(L, I)u_0 + \tau^2 \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)\psi_i, \quad (2.1.16)$$

სადაც  $L = V(\tau)$ . ჩავსვათ  $u_1$ -ის მნიშვნელობა (2.1.7) ფორმულიდან (2.1.16)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} u_{k+1} = & \left( \frac{1}{2} L U_k(L, I) - U_{k-1}(L, I) \right) \varphi_0 + \frac{1}{2} \tau U_k(L, I) V \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \varphi_1 \\ & + \tau^2 U_k(L, I) \varphi_2 + \tau^2 \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I) \psi_i. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$U_k(L, I)$  ოპერატორ-პოლინომის შესაფასებლად განვიხილოთ მისი შესაბამისი სკალარული პოლინომი  $U_k(x, 1)$ . შევნიშნოთ, რომ  $U_k(2x, 1)$  არიან ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომები, რომელთათვისაც მართებულია შემდეგი წარმოდგენა (იხ. მაგალითად [82], თავი II):

$$U_k(2x, 1) = \frac{\sin((k+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad (2.1.18)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $U_k(x, 1)$ -თვის გვექნება:

$$U_k(x,1) = \frac{2 \sin\left((k+1) \arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in (-2,2). \quad (2.1.19)$$

შესაბამისად მივიღებთ შემდეგ ცნობილ უტოლობას:

$$|U_k(x,1)| \leq \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in (-2,2). \quad (2.1.20)$$

ახლა შევაფასოთ  $(I + \alpha\tau^2 A_j)^{-1}$  ოპერატორის ნორმა. რადგანაც **თეორემა 2.1.1**-ის პირობის თანახმად,  $A_j$  თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორებია, ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{aligned} \|(I + \alpha\tau^2 A_j)^{-1}\| &= \sup_{x \in [v_0, \infty)} \frac{1}{|1 + \alpha\tau^2 x|} \\ &= \sup_{x \in [v_0, \infty)} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{m+2}}{2\sqrt{6}} \tau^2 x + \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{m+2}{48}\right) + \tau^4 x}} \quad (2.1.21) \\ &\leq \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{m+2}}{2\sqrt{6}} \tau^2 v_0}. \end{aligned}$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\|(I + \bar{\alpha}\tau^2 A_j)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{m+2}}{2\sqrt{6}} \tau^2 v_0}, \quad (2.1.22)$$

$$\|(I + \lambda\tau^2 A_j)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 + \lambda\tau^2 v_0} \leq \frac{1}{1 + \tau^2 v_0}. \quad (2.1.23)$$

(2.1.9) ფორმულიდან (2.1.21)-(2.1.23) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned} \|V_0(\tau; A_1, A_2, \dots, A_m)\| &\leq \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}} \tau^2 v_0\right)^{2m}} \leq \frac{1}{1 + \frac{m\sqrt{m+2}}{2\sqrt{6}} \tau^2 v_0} \\ &\leq \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \tau^2 v_0}. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\|V_0(\tau; A_m, A_{m-1}, \dots, A_1)\| \leq \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \tau^2 v_0}. \quad (2.1.25)$$

(2.1.8) ფორმულიდან (2.1.24) და (2.1.25) უტოლობების გათვალისწინებით  $V(\tau)$  ოპერატორისთვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|V(\tau)\| \leq \frac{2}{m+2} \left( \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \tau^2 v_0} + \frac{m}{1 + \tau^2 v_0} \right) \leq \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \tau^2 v_0}. \quad (2.1.26)$$

რადგანაც  $V(\tau)$  არის თვითშეუღლებული ოპერატორი, ამიტომ (2.1.26)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$Sp(V(\tau)) \subset [-v_1, v_1], \quad (2.1.27)$$

სადაც

$$v_1 = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \tau^2 v_0}$$

ახლა შევაფასოთ  $\tau U_k(L, I)$  ოპერატორის ნორმა. როგორც ცნობილია, როდესაც ოპერატორ-პოლინომის არგუმენტი არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული, შემოსაზღვრული ოპერატორი, მაშინ მისი ნორმა უდრის შესაბამისი სკალარული პოლინომის  $C$  ნორმას შესაბამის სპექტრზე (იხ. [80], თავი VII). ამ ფაქტის თანახმად, (2.1.20) უტოლობიდან (2.1.27)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\tau \|U_k(L, I)\| \leq \tau \max_{x \in Sp(L)} |U_k(x, 1)| \leq \tau \max_{x \in [-v_1, v_1]} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2\tau}{\sqrt{4-v_1}}. \quad (2.1.28)$$

შევაფასოთ  $\frac{1}{2}LU_k(L, I) - U_{k-1}(L, I)$  ოპერატორის ნორმა. სკალარული პოლინომი  $U_k(x, 1)$  აკმაყოფილებს შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned} U_{k+1}(x, 1) &= xU_k(x, 1) - U_{k-1}(x, 1), \quad k=1, 2, \dots, \\ U_0(x, 1) &= 1, \quad U_1(x, 1) = x. \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

(2.1.29) რეკურენტული დამოკიდებულებისა და (2.1.19) ფორმულის თანახმად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}xU_k(x, 1) - U_{k-1}(x, 1) &= \frac{1}{2}[(xU_k(x, 1) - U_{k-1}(x, 1)) - U_{k-1}(x, 1)] \\ &= \frac{1}{2}[U_{k+1}(x, 1) - U_{k-1}(x, 1)] \\ &= \frac{\sin\left((k+2)\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \sin\left(k\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{2\cos\left((k+2)\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sin\left(\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{2\cos\left((k+2)\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \cos\left((k+2)\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad x \in [-2, 2]. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\left|\frac{1}{2}xU_k(x, 1) - U_{k-1}(x, 1)\right| \leq 1. \quad (2.1.31)$$

(2.1.28)-ის ანალოგიურად (2.1.31)-დან  $\frac{1}{2}LU_k(L, I) - U_{k-1}(L, I)$ -თვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:



$$\left\| \frac{1}{2}LU_k(L, I) - U_{k-1}(L, I) \right\| \leq 1. \quad (2.1.32)$$

(2.1.26)-ის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\left\| V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right) \right\| \leq 1. \quad (2.1.33)$$

საბოლოო შეფასების მისაღებად (2.1.17) ფორმულიდან დაგვრჩა  $\sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)\psi_i$  -ის შეფასება:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)\psi_i \right\| &\leq \tau \left\| \tau \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I) \left\| \left( I + \frac{1}{12}\tau^2 A_1 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{1}{12}\tau^2 A_m \right)^{-1} \right\| \right. \\ &\quad \left. \times \left\| f(t_i) \right\| + \frac{\tau^2}{12} \left\| f''(t_i) \right\| \right\| \\ &\leq \nu t_k \left( \max_{t \in [0, t_k]} \left\| f(t) \right\| + \frac{\tau^2}{12} \max_{t \in [0, t_k]} \left\| f''(t) \right\| \right). \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

(2.1.17) ფორმულიდან (2.1.28), (2.1.32), (2.1.33) და (2.1.34) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ (2.1.15) დასამტკიცებელ შეფასებას.

**მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება.**

მიახლოებითი ამონახსნის შეფასების მისაღებად საჭიროა  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_m$  ოპერატორის ნატურალური ხარისხები  $(A^s, s = 2, 3)$ . ორი შესაკრების შემთხვევაში ( $m = 2$ ) ხარისხები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} A^2 &= (A_1^2 + A_2^2) + (A_1 A_2 + A_2 A_1), \\ A^3 &= (A_1^3 + A_2^3) + (A_1^2 A_2 + A_1 A_2^2 + A_2 A_1^2 + A_2^2 A_1) + (A_1 A_2 A_1 + A_2 A_1 A_2). \end{aligned}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება  $(A^s, s = 2, 3)$   $m > 2$  შემთხვევისათვის.

ცხადია  $A^s$  ოპერატორების განსაზღვრის არეები  $D(A^s)$  წარმოადგენენ მათი შესაკრებების განსაზღვრის არეების თანაკვეთას.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\|\varphi\|_A = \|A_1\varphi\| + \|A_2\varphi\| + \dots + \|A_m\varphi\|, \quad \varphi \in D(A),$$

$$\|\varphi\|_{A^2} = \sum_{i,j=1}^m \|A_i A_j \varphi\|, \quad \varphi \in D(A^2),$$

$$\|\varphi\|_{A^3} = \sum_{i,j,k=1}^m \|A_i A_j A_k \varphi\|, \quad \varphi \in D(A^3).$$

მიახლოებითი ცდომილების შეფასების მისაღებად გვჭირდება შემდეგი ლემის დამტკიცება (ყველგან ქვემოთ  $c$ -თი აღნიშნულია აბსოლუტური დადებითი მუდმივა).

**ლემა 2.1.2.** თუ  $f(t) \in C^{(IV)}([0, T]; H)$ ;  $f''(t) \in D(A)$  და  $f(t) \in D(A^2)$  ყოველი ფიქსირებული  $t \in [0, T]$ , მაშინ მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|\psi_k - \tilde{\psi}_k\| \leq c\tau^4 \left( \max_{t \in [0, t_k]} \|f^{(IV)}(t)\| + \max_{t \in [0, t_k]} \|f^{(II)}(t)\|_A + \max_{t \in [0, t_k]} \|f(t)\|_{A^2} \right). \quad (2.1.35)$$

**ლემის დამტკიცება.**

(2.1.5) ფორმულიდან  $\tau^2 \psi(t_k)$ -თვის გვაქვს.

$$\begin{aligned}
\tau^2 \psi(t_k) &= \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \sin((t_{k+1} - s)A^{1/2})A^{-1/2} f(s) ds \\
&\quad - 2 \cos(\tau A^{1/2}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin((t_{k+1} - s)A^{1/2})A^{-1/2} f(s) ds \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} \sin((s + \tau)A^{1/2})A^{-1/2} f(t_k - s) ds \\
&\quad - 2 \cos(\tau A^{1/2}) \int_0^{\tau} \sin(sA^{1/2})A^{-1/2} f(t_k - s) ds \\
&= \left( \int_{-\tau}^{\tau} \left( (s + \tau) - \frac{(s + \tau)^3}{6} A \right) f(t_k - s) ds \right) + r_1(\tau) \\
&\quad + \left( -2 \left( I - \frac{\tau^2}{2} A \right) \int_0^{\tau} \sin(sA^{1/2})A^{-1/2} f(t_k - s) ds + r_2(\tau) \right) \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} (s + \tau) f(t_k - s) ds - \int_{-\tau}^{\tau} \frac{(s + \tau)^3}{6} A f(t_k - s) ds \\
&\quad - 2 \int_0^{\tau} \sin(sA^{1/2})A^{-1/2} f(t_k - s) ds \\
&\quad + \tau^2 A \int_0^{\tau} \sin(sA^{1/2})A^{-1/2} f(t_k - s) ds + r_1(\tau) + r_2(\tau) \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} (s + \tau) f(t_k - s) ds + \left( - \int_{-\tau}^{\tau} \frac{(s + \tau)^3}{6} A (f(t_k) - sf'(t_k)) ds + r_3(\tau) \right) \\
&\quad + \left( -2 \int_0^{\tau} \left( s - \frac{s^3}{6} A \right) f(t_k - s) ds + r_4(\tau) \right) \\
&\quad + \left( \tau^2 A \int_0^{\tau} sf(t_k - s) ds + r_5(\tau) \right) + r_1(\tau) + r_2(\tau) \\
&= \int_{-\tau}^{\tau} (s + \tau) f(t_k - s) ds - 2 \int_0^{\tau} sf(t_k - s) ds \\
&\quad - \int_{-\tau}^{\tau} \frac{(s + \tau)^3}{6} A (f(t_k) - sf'(t_k)) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \left( \int_0^\tau s^3 A (f(t_k) - sf'(t_k) +) ds + r_6(\tau) \right) \\
& + \left( \tau^2 A \int_0^\tau s (f(t_k) - sf'(t_k)) ds + r_7(\tau) \right) + \sum_{i=1}^5 r_i(\tau) \\
& = \int_{-\tau}^\tau (s + \tau) (f(t_k + s) + f(t_k - s)) ds \\
& - \int_{-\tau}^\tau \frac{(s + \tau)^3}{6} Af(t_k) ds + \int_{-\tau}^\tau \frac{s(s + \tau)^3}{6} Af'(t_k) ds \\
& + \frac{1}{3} \left( \int_0^\tau s^3 Af(t_k) ds + \int_0^\tau s^4 Af'(t_k) ds \right) + \frac{\tau^4}{2} Af(t_k) \\
& - \frac{\tau^5}{3} Af'(t_k) + \sum_{i=1}^7 r_i(\tau) \\
& = \left( 2 \int_0^\tau (\tau - s) f(t_k) ds + \int_0^\tau s^2 (\tau - s) f''(t_k) ds + r_8(\tau) \right) \\
& - \frac{2\tau^4}{3} Af(t_k) + \frac{2\tau^5}{5} Af'(t_k) + \frac{\tau^4}{12} Af(t_k) \\
& \frac{\tau^5}{15} Af'(t_k) + \frac{\tau^4}{2} Af(t_k) - \frac{\tau^5}{3} Af'(t_k) + \sum_{i=1}^7 r_i(\tau) \\
& = \tau^2 f(t_k) + \frac{\tau^4}{12} f''(t_k) - \tau^4 \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \right) Af(t_k) \\
& \tau^5 \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{15} - \frac{1}{3} \right) Af'(t_k) + \sum_{i=1}^8 r_i(\tau) \\
& = \tau^2 f(t_k) - \frac{\tau^4}{12} Af(t_k) + \frac{\tau^4}{12} f''(t_k) + \sum_{i=1}^8 r_i(\tau) \\
& = \tau^2 \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A \right)^{-1} f(t_k) + \frac{\tau^4}{12} f''(t_k) + \sum_{i=1}^9 r_i(\tau), \tag{2.1.36}
\end{aligned}$$

სადაც

$$\|r_j(\tau)\| \leq c\tau^6 \max_{t \in [0, t_k]} \|f(t)\|_{A^3}, \quad j = 1, 4, 5, 9, \tag{2.1.37}$$

$$\|r_j(\tau)\| \leq c\tau^6 \max_{t \in [0, t_k]} \|f''(t)\|_A, \quad j = 3, 6, 7, \tag{2.1.38}$$

$$\|r_8(\tau)\| \leq c\tau^6 \max_{t \in [0, t_k]} \|f^{(IV)}(t)\|, \tag{2.1.39}$$

$$\begin{aligned}
\|r_2(\tau)\| &\leq c\tau^4 \left\| A^2 \int_0^\tau \sin(sA^{1/2}) A^{-1/2} f(t_k - s) ds \right\| \\
&= c\tau^4 \left\| A^2 \int_0^\tau \left( \int_0^s \cos(\xi A^{1/2}) d\xi \right) A^2 f(t_k - s) ds \right\| \\
&\leq c\tau^6 \max_{t \in [0, t_k]} \|f(t)\|_{A^2},
\end{aligned} \tag{2.1.40}$$

(2.1.36) ფორმულიდან  $\psi(t_k)$ -თვის გვაქვს:

$$\psi(t_k) = \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A \right)^{-1} f(t_k) + \frac{\tau^2}{12} f''(t_k) + R_k(\tau), \tag{2.1.41}$$

სადაც  $R_k(\tau)$ -თვის (2.1.37)-(2.1.40) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned}
\|R_k(\tau)\| &\leq \sum_{j=1}^9 \|r_j(\tau)\| \\
&\leq c\tau^4 \left( \max_{t \in (0, t_k)} \|f^{(IV)}(t)\| + \max_{t \in (0, t_k)} \|f''(t)\|_A + \max_{t \in (0, t_k)} \|f(t)\|_{A^2} \right),
\end{aligned} \tag{2.1.42}$$

მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$\begin{aligned}
&\left\| \left[ \left( I + \frac{\tau^2}{12} A \right)^{-1} - \left( I + \frac{\tau^2}{12} A_1 \right)^{-1} \left( I + \frac{\tau^2}{12} A_2 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{\tau^2}{12} A_m \right)^{-1} \right] f(t_k) \right\| \\
&\leq c\tau^4 \|f(t_k)\|_{A^2}.
\end{aligned} \tag{2.1.43}$$

(2.1.41) და (2.1.10) ტოლობებიდან (2.1.42) და (2.1.43) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ (2.1.35) სამიეულ შეფასებას.

ჩამოვყალიბოთ თეორემა (2.1.6), (2.1.7) დეკომპოზიციის სქემის საშუალებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის კრებადობის შესახებ:

თეორემა 2.1.2. ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები:

$$I) \lambda = \frac{m+2}{2} - \frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{6}}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}} \pm i\sqrt{\frac{m+2}{96} + \frac{\lambda^2}{2}};$$

II)  $A, A_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) წარმოადგენენ თვითშეუღლებულ დადებითად განსაზღვრულ (საზოგადოდ შემოუსაზღვრელ) ოპერატორებს;

$$III) \varphi_0 \in D(A^3), \quad \varphi_1 \in D(A^{2+1/2});$$

IV)  $f(t) \in C^{(IV)}([0, T]; H)$ ,  $f''(t) \in D(A)$  და  $f(t) \in D(A^{2+1/2})$  ყოველი  $t \in [0, T]$ .

მაშინ (2.1.6), (2.1.7) დეკომპოზიციის სქემის საშუალებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\begin{aligned} \|u(t_k) - u_k\| \leq & cv\tau^4 \left( \|\varphi_1\|_{A^2} + \tau\|\varphi_0\|_{A^3} + t_k \max_{1 \leq i \leq k} \|u(t_i)\|_{A^3} \right. \\ & + \max_{t \in [0, t_k]} \|f'(t)\|_A + \max_{t \in [0, t_k]} \|f'''(t)\| \\ & \left. + t_k \left( \max_{t \in [0, t_k]} \|f^{(IV)}(t)\| + \max_{t \in [0, t_k]} \|f''(t)\| + \max_{t \in [0, t_k]} \|f(t)\|_{A^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.1.44)$$

**დამტკიცება.** შევნიშნოთ, რომ თუ  $\varphi_0 \in D(A^3)$ ,  $\varphi_1 \in D(A^{2+1/2})$  და  $f(t) \in D(A^{2+1/2})$  ყოველი  $t \in [0, T]$ , მაშინ (2.1.3) ფორმულიდან ავტომატურად გამომდინარეობს, რომ  $u(t) \in D(A^3)$  ყოველი  $t \in [0, T]$ .

შემდეგი ფორმულის თანახმად (იხ. [76], გვ. 603):

$$A \int_r^t e^{-sA} ds = e^{-rA} - e^{-tA}, \quad 0 \leq r \leq t,$$

გვექნება გაშლა:

$$e^{-tA} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{t^i}{i!} A^i + (-A)^k \int_0^t \int_0^{s_1} \dots \left( \int_0^{s_{k-1}} e^{-(s_{k-1}-s)A} ds \right) ds_{k-1} \dots ds_1. \quad (2.1.45)$$

ამ ფორმულის გამოყენებით კოსინუს ოპერატორ-ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ გაშლას:

$$\cos(tA^{1/2}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{t^{2i}}{2i!} A^{2i} + R_k(t, A), \quad (2.1.46)$$

სადაც  $R_k(t, A)$  არის ნაშთითი წევრი, რომლისთვისაც მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_k(t, A)\varphi\| \leq \frac{1}{(2k+2)!} \tau^{2k+2} \|\varphi\|_{A^{k+1}}, \quad \varphi \in D(A^{k+1}). \quad (2.1.47)$$

მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება  $t = t_k$  წერტილში აღვნიშნოთ  $z_k$ -თი:  $z_k = u(t_k) - u_k$ . (2.1.4) და (2.1.6) ფორმულების გათვალისწინებით  $z_k$  ცდომილებისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= 2 \cos(\tau A^{1/2}) u(t_k) - u(t_{k-1}) + \tau^2 \psi(t_k) - (V(\tau) u_k - u_{k-1} + \tau^2 \psi_k) \\ &= \left[ 2 \cos(\tau A^{1/2}) u(t_k) - V(\tau) u(t_k) \right] \\ &\quad + \left[ V(\tau) u(t_k) - V(\tau) u_k \right] - \left[ u(t_{k-1}) - u_{k-1} \right] + \tau^2 \left[ \psi(t_k) - \psi_k \right] \\ &= V(\tau) z_k - z_{k-1} + R(\tau) u(t_k) + \tau^2 \left[ \psi(t_k) - \psi_k \right], \end{aligned} \quad (2.1.48)$$

სადაც

$$R(\tau) = 2 \cos(\tau A^{1/2}) - V(\tau). \quad (2.1.49)$$

დავამტკიცოთ, რომ  $V(\tau)$  დეკომპოზიციის ფორმულა ახდენს  $2 \cos(\tau A^{1/2})$  ოპერატორ-ფუნქციის აპროქსიმაციას ლოკალურად მეექვსე რიგის სიზუსტით. (2.1.49) ნაშთითი წევრის შესაფასებლად საჭიროა შემდეგი გაშლის გამოყენება  $V(\tau)$  ოპერატორში შემავალი რაციონალური ფუნქციებისათვის (ეს გაშლა მარტივად მიიღება ინდუქციის გამოყენებით).

$$(I + \tau^2 A)^{-1} = \sum_{i=0}^k (-1)^{2i} \tau^{2i} A^i + \tilde{R}_k(\tau, A), \quad (2.1.50)$$

სადაც

$$\tilde{R}_k(\tau, A) = (-1)^{k+1} \tau^{2k+2} (I + \tau^2 A)^{-1} A^{k+1}. \quad (2.1.51)$$

რადგან  $(I + \tau^2 A)^{-1}$  არის შემოსაზღვრული ოპერატორი და მისი ნორმა ნაკლებია ერთზე, ამიტომ ცხადია, (2.1.51) ნაშთითი წევრისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|\tilde{R}_k(\tau, A)\varphi\| \leq \tau^{2k+2} \|\varphi\|_{A^{k+1}}, \quad \varphi \in D(A^{k+1}). \quad (2.1.52)$$

ახლა შევაფასოთ (2.1.49) ნაშთითი წევრი. ამისათვის  $V(\tau)$  ოპერატორში შემავალი ყველა რაციონალური ფუნქცია გავშალოთ (2.1.50) ფორმულის

მიხედვით მარჯვნიდან მარცხნივ, ისე, რომ ყოველი ნაშთითი წევრი აღმოჩნდეს მეექვსე რიგის  $\tau$ -ს მიმართ. შესაბამისად მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 V(\tau) &= \frac{2}{m+2} \left[ V_0(\tau; A_1, A_2, \dots, A_m) + V_0(\tau; A_m, A_{m-1}, \dots, A_1) \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^m (I + \lambda \tau^2 A)^{-1} = \frac{2}{m+2} \left[ (m+2)I + \tau^2 \sum_{i=1}^m (2(\alpha + \bar{\alpha}) + \lambda) A_i \right. \\
 &+ \tau^4 \left( \sum_{i=1}^m (2(\alpha^2 + \alpha \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) + \lambda^2) A_i^2 + \sum_{i,j=1; i \neq j}^m (\alpha + \bar{\alpha})^2 A_i A_j \right) \left. \right] \\
 &+ \tilde{R}(\tau) \varphi,
 \end{aligned} \tag{2.1.53}$$

სადაც  $\tilde{R}(\tau)$  ნაშთითი წევრისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|\tilde{R}(\tau) \varphi\| \leq \tau^6 \|\varphi\|_{A^3}, \quad \varphi \in D(A^3). \tag{2.1.54}$$

(2.1.54) შეფასება მართებულია, რადგან (2.1.53) ფორმულაში ყველა წევრი გავშალეთ (2.1.50) ფორმულის მიხედვით მანამ, სანამ შესაბამისი ნაშთითი წევრი არ აღმოჩნდა მეექვსე რიგის  $\tau$ -ს მიმართ.

**თეორემა 2.1.2-ის I პირობის თანახმად  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$  და  $\lambda$  რიცხვითი პარამეტრები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:**

$$\begin{aligned}
 2(\alpha + \bar{\alpha}) + \lambda &= \frac{m+2}{2}, \\
 2(\alpha^2 + \alpha \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) + \lambda^2 &= \frac{m+2}{24}, \\
 (\alpha + \bar{\alpha})^2 &= \frac{m+2}{24}.
 \end{aligned}$$

ამ განტოლებების გათვალისწინებით (2.1.53) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$V(\tau) = 2I - \tau^2 A + \frac{\tau^4}{24} A^2 + \tilde{R}(\tau). \tag{2.1.55}$$

(2.1.46) გაშლის თანახმად გვაქვს:

$$\cos(\tau A^{1/2}) = 2I - \tau^2 A + \frac{\tau^4}{24} A^2 + 2R_2(\tau, A). \tag{2.1.56}$$



(2.1.19)-დან (2.1.55) და (2.1.56) ტოლობების გამოყენებით და (2.1.46) და (2.1.54) უტოლობების გათვალისწინებით  $R(\tau)$  ნაშთითი წევრისათვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|R(\tau)\varphi\| \leq 2\|R_2(\tau, A)\varphi\| + \|\tilde{R}(\tau)\varphi\| \leq c\tau^6 \|\varphi\|_{A^3}, \quad \varphi \in D(A^3). \quad (2.1.57)$$

(2.1.48)-დან (2.1.13) ფორმულის (იხ. **ლემა 2.1.1**) გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას (ვითვალისწინებთ, რომ  $z_0 = u(t_0) - u_0 = \varphi_0 - \varphi_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= V(\tau)z_k - z_k + R(\tau)u(t_k) + \tau^2[\psi(t_k) - \psi_k] \\ &= U_k(L, I)z_1 - U_{k-1}(L, I)z_0 + \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)R(\tau)u(t_i) \\ &\quad + \tau^2 \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)(\psi(t_i) - \psi_i) \\ &= U_k(L, I)z_1 + \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)R(\tau)u(t_i) + \tau^2 \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)(\psi(t_i) - \psi_i). \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი წევრები, გარდა  $z_1$ -ისა, უკვე შეფასებული გვაქვს. ახლა შევაფასოთ  $z_1 = u(t_1) - u_1$ . (2.1.7) და (2.1.3) ფორმულების გამოყენებით  $z_1 = u(t_1) - u_1$  სასტარტო ვექტორის ნაშთისთვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} z_1 &= u(t_1) - u_1 \\ &= \cos(\tau A^{1/2})\varphi_0 + A^{-1/2} \sin(\tau A^{1/2})\varphi_1 + \int_0^\tau \sin((\tau - s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} \left( V(\tau)\varphi_0 + \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)\varphi_1 \right) + \tau^2\varphi_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2\cos(\tau A^{1/2}) - V(\tau) \right) \varphi_0 + \left( A^{-1/2} \sin(\tau A^{1/2}) - \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right) \right) \varphi_1 \\ &\quad + \left( \int_0^\tau \sin((\tau - s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds - \tau^2\varphi_2 \right). \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

(2.1.59) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი  $\frac{1}{2}(2\cos(\tau A^{1/2}) - V(\tau))\varphi_0$  პირველი შესაკრებისთვის გვაქვს:

$$\left\| \frac{1}{2} \left( 2 \cos(\tau A^{1/2}) - V(\tau) \right) \varphi_0 \right\| = \frac{1}{2} \|R(\tau) \varphi_0\| \leq c \tau^6 \|\varphi_0\|_{A^3}. \quad (2.1.60)$$

(2.1.59) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი

$\left( A^{-1/2} \sin(\tau A^{1/2}) - \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right) \right) \varphi_1$  სხვაობისთვის, (2.1.49)-თვის მიღებული

შეფასების (იხ. ფორმულა 2.1.57) ანალოგიურად, მივიღებთ:

$$\left\| \left( A^{-1/2} \sin(\tau A^{1/2}) - \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right) \right) \varphi_1 \right\| \leq c \tau^5 \|\varphi_1\|_{A^2}. \quad (2.1.61)$$

(2.1.59) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი ინტეგრალური წევრისთვის

$\int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2}) A^{-1/2} f(s) ds$  მივიღებთ:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2}) A^{-1/2} f(s) ds \\ &= \int_0^\tau \left[ (\tau-s)I - \frac{(\tau-s)^3}{6} A \right] f(s) ds + \tilde{r}_1(\tau) \\ &= \int_0^\tau (\tau-s) f(s) ds - \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^3}{6} A f(s) ds + \tilde{r}_1(\tau) \\ &= \left( \int_0^\tau (\tau-s) \left( f(0) + s f'(0) + \frac{s^2}{2} f''(0) \right) ds + \tilde{r}_2(\tau) \right) \\ & \quad - \left( \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^3}{6} A f(0) ds + \tilde{r}_3(\tau) \right) + \tilde{r}_1(\tau) \\ &= \tau^2 \left( \frac{1}{2} f(0) + \frac{\tau}{6} f'(0) + \frac{\tau^2}{24} f''(0) - \frac{2\tau^2}{3} A f(0) \right) \\ & \quad + \tilde{r}_1(\tau) + \tilde{r}_2(\tau) + \tilde{r}_3(\tau), \end{aligned} \quad (2.1.62)$$

სადაც  $\tilde{r}_1(\tau)$ ,  $\tilde{r}_2(\tau)$  და  $\tilde{r}_3(\tau)$  ნაშთითი წევრებისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{r}_1(\tau)\| &\leq c\tau^6 \max_{t \in [0, \tau]} \|f(t)\|_{A^2}, \\
\|\tilde{r}_2(\tau)\| &\leq c\tau^5 \max_{t \in [0, \tau]} \|f'''(t)\|, \\
\|\tilde{r}_3(\tau)\| &\leq c\tau^5 \max_{t \in [0, \tau]} \|f'(t)\|_A.
\end{aligned} \tag{2.1.63}$$

(2.1.62) და (2.1.11) ფორმულებიდან (2.1.63) უტოლობების გათვალისწინებით (2.1.59) ტოლობაში შემავალი  $\left( \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds - \tau^2\phi_2 \right)$  მესამე შესაკრებისთვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds - \tau^2\phi_2 \right\| \\
&\leq c\tau^5 \left( \max_{t \in [0, \tau]} \|f'''(t)\| + \max_{t \in [0, \tau]} \|f'(t)\|_A + \max_{t \in [0, \tau]} \|f(t)\|_{A^2} \right).
\end{aligned} \tag{2.1.64}$$

საბოლოოდ  $z_1 = u(t_1) - u_1$  სასტარტო ვექტორისთვის (2.1.59) ფორმულიდან (2.1.60), (2.1.61) და (2.1.64) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|z_1\| \leq c\tau^5 \left( \|\phi_1\|_{A^2} + \tau\|\phi_0\|_{A^3} + \max_{t \in [0, \tau]} \|f'''(t)\| + \max_{t \in [0, \tau]} \|f'(t)\|_A + \max_{t \in [0, \tau]} \|f(t)\|_{A^2} \right). \tag{2.1.65}$$

(2.1.58) ფორმულიდან (2.1.57), (2.1.65), (2.1.35) და (2.1.28) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ საძიებელ (2.1.44) შეფასებას.

### თეორემა 2.1.2 დამტკიცებულია.

მესამე თავში მოყვანილია რიცხვითი გათვლის შედეგები და ამ შედეგების ანალიზი (2.1.6),(2.1.7) დეკომპოზიციის სქემის საფუძველზე. რიცხვითი გათვლის შედეგები სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ შედეგებთან.

## §2.2 მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა მრავალგანზომილებიანი კვაზიწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის

ამოცანის დასმა.

წარმოდგენილ პარაგრაფში განზოგადებულია წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები მრავალგანზომილებიანი კვაზიწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის. კერძოდ დამატებულია ლიპშიც-უწყვეტი ოპერატორი.

განვიხილოთ ჰილბერტის  $H$  სივრცეში (2.1.1)-(2.1.2) აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის კომის ამოცანის განზოგადება.

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Au(t) + M(u(t)) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.2.1)$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = \varphi_1, \quad (2.2.2)$$

სადაც  $A$  არის თვითშეუღლებული ( $A$  არ არის დროზე დამოკიდებული), დადებითად განსაზღვრული (საზოგადოდ შემოუსაზღვრელი) ოპერატორი,  $D(A)$  განსაზღვრის არით, რომელიც ყველგან მკვრივია  $H$ -ში,  $\overline{D(A)} = H$ ,  $A = A^*$  და

$$(Au, u) \geq a \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A), \quad a = \text{const} > 0.$$

აქ  $(\cdot, \cdot)$  და  $\|\cdot\|$ -ით აღნიშნულია შესაბამისად ნორმა და სკალარული ნამრავლი  $H$  ჰილბერტის სივრცეში;  $\varphi_0$  და  $\varphi_1$  მოცემული ვექტორებია  $H$ -დან;  $f(t)$  მოცემული ფუნქციაა მნიშვნელობებით  $H$ -ში, ოპერატორი  $M(\cdot)$  აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას;  $u(t)$  უწყვეტი და ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი საძიებელი ფუნქციაა მნიშვნელობებით  $H$ -ში.

(2.2.1)-(2.2.2) კვაზიწრფივი ჰიპერბოლური ამოცანისათვის დეკომპოზიციის სქემის აგებისას გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფში მიღებულ შედეგს წრფივი შემთხვევისათვის. (2.2.1) განტოლება ფორმალურად ჩავწეროთ (2.1.1) განტოლების მსგავსად, ამისათვის კვაზიწრფივი წევრი გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეში და შევუერთოთ  $f(t)$  ფუნქციას:

$$\frac{d^2u}{dt} + Au(t) = \tilde{f}(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (2.2.3)$$

სადაც  $\tilde{f}(t, u(t)) = f(t) - M(u(t))$ .

(2.2.3) ჰიპერბოლური განტოლებისათვის (2.1.4), (2.1.5) ფორმულების ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ

$$u(t_{k+1}) = 2\cos(\tau A^{1/2})u(t_k) - u(t_{k-1}) + \tau^2 \tilde{\psi}(t_k), \quad (2.2.4)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \tau^2 \tilde{\psi}(t_k) &= \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \sin((t_{k+1} - s)A^{1/2})A^{-1/2} \tilde{f}(s, u(s)) ds \\ &- 2\cos(\tau A^{1/2}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin((t_{k+1} - s)A^{1/2})A^{-1/2} \tilde{f}(s, u(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

**დეკომპოზიციის სქემა.**

(2.2.3), (2.2.1) კვაზიწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის დასმული კოშის ამოცანისათვის ავაგოთ შემდეგი დეკომპოზიციის სქემა:

$$u_{k+1} = 2V(\tau)u_k - u_{k-1} + \tau^2 \tilde{\psi}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.2.6)$$

$$u_0 = \varphi_0, \quad u_1 = \frac{1}{2} \left( V(\tau)\varphi_0 + \tau V\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)\varphi_1 \right) + \tau^2 \tilde{\varphi}_2, \quad (2.2.7)$$

სადაც  $V(\tau)$  წარმოადგენს  $2\cos(\tau, A)$  ოპერატორის ლოკალურად მეექვსე რიგის სიზუსტის გახლეჩას და განისაზღვრება წინა პარაგრაფიდან (იხ. ფორმულა (2.1.8), (2.1.9)), ხოლო

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_k &= \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_1 \right)^{-1} \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_2 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_m \right)^{-1} \tilde{f}(t_k, u_k) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1}) - 2\tilde{f}(t_k, u_k) + \tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1}) \right), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2 &= \frac{1}{6}\tilde{f}(0, \varphi_0) + \frac{1}{3}\tilde{f}\left(\frac{\tau}{2}, u_{1/2}\right) - \frac{2\tau^2}{3}A\tilde{f}(0, \varphi_0), \\ u_{1/2} &= \frac{1}{2}\left(V\left(\frac{\tau}{2}\right)\varphi_0 + \frac{\tau}{2}V\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\right)\varphi_1\right) + \frac{\tau^2}{8}\tilde{f}(0, \varphi_0).\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

აქ  $\alpha$  და  $\lambda$  რიცხვითი პარამეტრები განისაზღვრება ისევე, როგორც წინა პარაგრაფში  $\lambda = \frac{m+2}{2} - \frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{6}}$ ,  $\alpha = \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}} \pm i\sqrt{\frac{m+2}{96} + \frac{\lambda^2}{2}}$ ,  $\bar{\alpha}$  არის  $\alpha$  კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული;  $\tilde{f}(t_k, u_k) = f(t_k) - M(u_k)$  მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარეა,  $\varphi_0$  და  $\varphi_1$  საწყისი მნიშვნელობებია,  $\tau$  დროითი ბიჯია, ხოლო  $n > 1$  არის დაყოფათა რიცხვი დროითი ცვლადის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ წრფივი შემთხვევისაგან განსხვავებით,  $\tilde{\psi}_k$  გამოსახულებაში შედის უცნობი ვექტორი  $\tilde{f}(t_k, u_k) = f(t_k) - M(u_k)$ , ხოლო მარჯვენა მხარის მეორე რიგის წარმოებული გამრავლებული დროითი ბიჯის კვადრატზე შეცვლილია შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგიით:  $\tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1}) - 2\tilde{f}(t_k, u_k) + \tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1})$ . რადგანაც (2.1.6) დეკომპოზიციის სქემაში  $\psi_k$ -ს თანამამრავლად უზის  $\tau^2$ , თავის მხრივ  $\psi_k$ -ს გამოსახულებაში მარჯვენა მხარის მეორე რიგის წარმოებულსაც ასევე თანამამრავლად აქვს  $\tau^2$  (იხ. (2.1.10)), ხოლო მეორე რიგის წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგი ახდენს მის აპროქსიმაციას მეორე რიგის სიზუსტით, საბოლოოდ, ეს ცვლილება გამოიწვევს ლოკალურად მეექვსე რიგის სიზუსტის აპროქსიმაციას  $\tau$ -ს მიმართ და შესაბამისად საბოლოოდ შეფასება დარჩება მეოთხე რიგის. წრფივი შემთხვევისაგან განსხვავდება ასევე  $\tilde{\varphi}_2$  გამოსახულება (იხ. ფორმულები (2.2.9) და (2.1.11)). რადგანაც კვაზიწრფივ შემთხვევაში (2.2.9) ფორმულაში შემავალი  $\tilde{f}(t_k, u_k) = f(t_k) - M(u_k)$  გამოსახულება შეიცავს უცნობ ფუნქციას, ამიტომ მისი წარმოებულების გამოყენება არ არის მიზანშეწონილი და მის ნაცვლად გამოყენებულია კვადრატურული ფორმულა. შესაბამისად, მარჯვენა მხარეში ჩნდება  $u_{1/2}$  - უცნობი ფუნქციის მნიშვნელობა დამატებით შუალედურ კვანძში. რადგანაც (2.2.7) საწყის პირობაში  $\tilde{\varphi}_2$  გამოსახულებას აქვს  $\tau^2$ -ის რიგის თანამამრავლი, ამიტომ საბოლოოდ საწყისი პირობის  $\tau$ -ს მიმართ მეხუთე რიგის სიზუსტით მისაღებად საკმარისია  $u_{1/2}$ -ის დათვლა მესამე რიგის სიზუსტით. ამგვარად, (2.2.9) ფორმულის მეორე განტოლების საშუალებით ხდება  $u_{1/2}$ -ის პოვნა მესამე რიგის სიზუსტით.

$u_k$ -ს ვაცხადებთ (2.2.3),(2.2.1) ამოცანის ამონახსნის  $u(t)$ -ს მიახლოებით მნიშვნელობად  $t = t_k$  წერტილში.

ჩამოვყალიბოთ თეორემა (2.2.6), (2.2.7) დეკომპოზიციის სქემის საშუალებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის კრებადობის შესახებ:

**თეორემა 2.2.1.** ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები:

- I)  $\lambda = \frac{m+2}{2} - \frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{6}}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{m+2}}{4\sqrt{6}} \pm i\sqrt{\frac{m+2}{96} + \frac{\lambda^2}{2}};$
- II)  $A, A_j (j=1, \dots, m)$  წარმოადგენენ თვითშეუღლებულ დადებითად განსაზღვრულ (საზოგადოდ შემოუსაზღვრელ) ოპერატორებს;
- III)  $M(\cdot)$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას;
- IV)  $\varphi_0 \in D(A^3), \quad \varphi_1 \in D(A^{2+1/2});$
- V)  $\tilde{f}(t, u(t)) \in C^{(IV)}([0, T]; H), \quad \tilde{f}''(t, u(t)) \in D(A)$  და  $\tilde{f}(t, u(t)) \in D(A^{2+1/2})$  ყოველი  $t \in [0, T]$

მაშინ (2.2.6), (2.2.7) დეკომპოზიციის სქემის საშუალებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\begin{aligned} \|u(t_k) - u_k\| \leq & cve^{cv t_k} \tau^4 \left( \|\varphi_1\|_{A^2} + \tau \|\varphi_0\|_{A^3} + t_k \max_{1 \leq i \leq k} \|u(t_i)\|_{A^3} \right. \\ & + \max_{t \in [0, t_k]} \|\tilde{f}'(t, u(t))\|_A + \max_{t \in [0, t_k]} \|\tilde{f}'''(t, u(t))\| \\ & + t_k \left( \max_{t \in [0, t_k]} \|\tilde{f}^{(IV)}(t, u(t))\| \right. \\ & \left. \left. + \max_{t \in [0, t_k]} \|\tilde{f}''(t, u(t))\| + \max_{t \in [0, t_k]} \|\tilde{f}(t, u(t))\|_{A^2} \right). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

**თეორემის დამტკიცება.**

შევნიშნოთ რომ თეორემა 2.2.1 თეორემა 2.1.2-ისგან განსხვავდება IV პირობით, სადაც  $f(t)$  შეცვლილია  $\tilde{f}(t, u(t)) = f(t) - M(u(t))$ . IV პირობაში  $M(u(t))$  ვიხილავთ, როგორც ფუნქციას  $t$  ცვლადის მიმართ და შესაბამისად წარმოებულები აიღება  $t$  ცვლადით. ანალოგიურად გაიგება  $M(u(t))$  ფუნქციის წარმოებულები (2.2.10) შეფასებაში.

წინა პარაგრაფისგან (2.2.6), (2.2.7) დეკომპოზიციის სქემა განსხვავდება  $\tilde{\psi}_k$ -ს გამოსახულებით (იხ. ფორმულები (2.2.8) და (2.1.11)). რადგანაც  $\tilde{\psi}_k$  გამოსახულებაში შედის უცნობი ფუნქცია,  $\tilde{f}(t, u(t)) = f(t) - M(u(t))$ , გამოთვლებში მიზანშეწონილი არ არის მისი წარმოებულების გამოყენება, ამიტომ მეორე რიგის წარმოებული (2.1.11) განტოლებაში შეცვლილია შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგით. ასევე განსხვავდება საწყისი ვექტორის პოვნის ალგორითმი (იხ. ფორმულები (2.2.9) და (2.1.11)). ამიტომ **თეორემა 2.2.1**-ის დამტკიცებისას ყურადღებას გავამახვილებთ მხოლოდ იმ განსხვავებაზე, რომელიც გამოწვეულია  $f(t)$ -ს  $\tilde{f}(t, u(t)) = f(t) - M(u(t))$ -ით ჩანაცვლებით და საწყისი პირობის განსხვავებული გამოსახულებით.

(2.1.36) ფორმულის ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(t_k) &= \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A \right)^{-1} f(t_k, u(t_k)) \\ &+ \frac{1}{12} \left( f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) - 2f(t_k, u(t_k)) + f(t_{k-1}, u(t_{k-1})) \right) + \tilde{R}_k(\tau), \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}_k(\tau)\| &\leq c\tau^4 \left( \max_{t \in (0, t_k)} \|\tilde{f}^{(IV)}(t, u(t))\| + \max_{t \in (0, t_k)} \|\tilde{f}''(t, u(t))\|_A \right. \\ &\left. + \max_{t \in (0, t_k)} \|\tilde{f}(t, u(t))\|_{A^2} \right), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

(2.2.8) და (2.2.11) ტოლობებიდან  $\tilde{\psi}(t_k) - \tilde{\psi}_k$  სხვაობისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:



$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(t_k) - \tilde{\psi}_k &= \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A \right)^{-1} \tilde{f}(t_k, u(t_k)) - \\
&\quad - \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_1 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_m \right)^{-1} \tilde{f}(t_k, u_k) \\
&\quad + \frac{1}{12} \left( f(t_{k+1}, u(t_{k+1})) - f(t_{k+1}, u_{k+1}) \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} \left( f(t_k, u(t_k)) - f(t_k, u_k) \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} \left( f(t_{k-1}, u(t_{k-1})) - f(t_{k-1}, u_{k-1}) \right) + \tilde{R}_k(\tau) \\
&= \left[ \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A \right)^{-1} - \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_1 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_m \right)^{-1} \right] \tilde{f}(t_k, u(t_k)) \\
&\quad + \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_1 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_m \right)^{-1} \left[ M(u(t_k)) - M(u_k) \right] \\
&\quad + \frac{1}{12} \left[ M(u(t_{k+1})) - M(u_{k+1}) \right] - \frac{1}{6} \left[ M(u(t_k)) - M(u_k) \right] \\
&\quad + \frac{1}{12} \left[ M(u(t_{k-1})) - M(u_{k-1}) \right] + \tilde{R}_k(\tau),
\end{aligned}$$

აქედან თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $M(\cdot)$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას და (2.1.43) და (2.2.12) უტოლობებს, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\psi}(t_k) - \tilde{\psi}_k\| &\leq c\tau^4 \left( \max_{t \in (0, t_k)} \|\tilde{f}^{(IV)}(t, u(t))\| + \max_{t \in (0, t_k)} \|\tilde{f}''(t, u(t))\|_{A^2} \right) \\
&\quad + c \left( \|z_{k+1}\| + \|z_k\| + \|z_{k-1}\| \right),
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

სადაც  $z_k = u(t_k) - u_k$  არის მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება. (2.1.58)-ს ანალოგიურად, მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისთვის მივიღებთ:

$$z_{k+1} = U_k(L, I)z_1 + \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)R(\tau)u(t_i) + \tau^2 \sum_{i=1}^k U_{k-i}(L, I)(\tilde{\psi}(t_i) - \tilde{\psi}_i). \tag{2.2.14}$$

აქედან (2.1.28), (2.1.57) და (2.2.13) უტოლობის გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$\begin{aligned}
\|z_{k+1}\| &\leq \frac{1}{\tau} \|\tau U_k(L, I)\| \left\| \frac{z_1}{\tau} \right\| + \tau \sum_{i=1}^k \|\tau U_{k-i}(L, I)\| \left\| \frac{R(\tau)}{\tau^2} \right\| \\
&\quad + \tau \sum_{i=1}^k \|\tau U_{k-i}(L, I)\| (\|z_{i+1}\| + \|z_i\| + \|z_{i-1}\|) \\
&\leq cv \left\| \frac{z_1}{\tau} \right\| + cvt_k \left\| \frac{R(\tau)}{\tau^2} \right\| + cv\tau \left( \|z_{k+1}\| + \sum_{i=1}^k \|z_i\| \right).
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

ამ უტოლობაში  $\|z_{k+1}\|$  გადავიტანოთ მარჯვენა მხრიდან მარცხენაში, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\sum_{i=1}^k \|z_i\| (1 - cv\tau) \|z_{k+1}\| \leq cv \left\| \frac{z_1}{\tau} \right\| + cvt_k \left\| \frac{R(\tau)}{\tau^2} \right\| + cv\tau \sum_{i=1}^k \|z_i\|. \tag{2.2.16}$$

აქედან გვექნება (ვგულისხმობთ, რომ  $\tau$  იმდენად მცირეა, რომ  $1 - cv\tau < 1$ ).

$$\|z_{k+1}\| \leq \rho \sum_{i=1}^k \|z_i\| + \mu, \tag{2.2.17}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{cv}{1 - cv\tau} \left\| \frac{z_1}{\tau} \right\| + \frac{cvt_k}{1 - cv\tau} \left\| \frac{R(\tau)}{\tau^2} \right\|, \\
\rho &= \frac{cv\tau}{1 - cv\tau}.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

აქედან გრონუელის ლემის დისკრეტული ანალოგის გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ უტოლობას:

$$\|z_{k+1}\| \leq (1 + \rho)^{k-1} (\mu + \rho \|z_1\|), \tag{2.2.19}$$

(2.2.19)-დან (2.2.18)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\|z_{k+1}\| \leq cve^{cvt_k} \left( \left\| \frac{z_1}{\tau} \right\| + t_k \left\| \frac{R(\tau)}{\tau^2} \right\| \right). \tag{2.2.20}$$

საბოლოო უტოლობის მისაღებად შესაფასებელი დაგვრჩა  $\|z_1\|$ . (2.2.3)

ამოცანის ამონახსნი  $t = t_1$  წერტილში მოიცემა შემდეგი ფორმულით.

$$u(t_1) = \cos(\tau A^{1/2})\phi_0 + A^{-1/2} \sin(\tau A^{1/2})\phi_1 + \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2} \tilde{f}(s, u(s)) ds, \quad (2.2.21)$$

(2.2.21) და (2.2.9) ფორმულებიდან  $z_1$  ცდომილებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\begin{aligned} z_1 &= u(t_1) - u_1 \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \cos(\tau A^{1/2}) - V(\tau) \right) \phi_0 + \left( A^{-1/2} \sin(\tau A^{1/2}) - \tau V \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \right) \phi_1 \\ &\quad + \left( \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2} f(s) ds - \tau^2 \tilde{\phi}_2 \right). \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

(2.2.22) გამოსახულებაში პირველი ორი სხვაობა,  $\frac{1}{2} \left( 2 \cos(\tau A^{1/2}) - V(\tau) \right) \phi_0$  და  $\left( A^{-1/2} \sin(\tau A^{1/2}) - \tau V \left( \frac{\tau}{\sqrt{3}} \right) \right) \phi_1$  შეფასებულია წინა პარაგრაფში (2.1.60)

და (2.1.61) უტოლობების საშალებით, ამ უტოლობების გამოყენებით (2.2.22) ცდომილებისთვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned} \|z_1\| &\leq c\tau^5 \left( \|\phi_1\|_{A^2} + \tau \|\phi_0\|_{A^3} \right) \\ &\quad + \left\| \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2} f(s) ds - \tau^2 \tilde{\phi}_2 \right\|. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

$\tilde{\phi}_2$ -ის გამოსახულება განსხვავდება წინა პარაგრაფში შესაბამისი

გამოსახულებისაგან. შევავსოთ  $\int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2} f(s) ds - \tau^2 \tilde{\phi}_2$

სხვაობა. (2.1.62) უტოლობის ანალოგიურად გავამარტივოთ

$\int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2} f(s) ds$  ინტეგრალი - სინუს ოპერატორ-ფუნქცია

გავშალოთ ტეილორის მწკრივად, ისე რომ ნაშთითი წევრი აღმოჩნდეს მეხუთე რიგის  $\tau$  დროითი ბიჯის მიმართ და შემდეგ გამოვიყენოთ სიმპსონის კვადრატურული ფორმულა:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2}\tilde{f}(s,u(s))ds \\
&= \int_0^\tau \left[ (\tau-s)I - \frac{(\tau-s)^3}{6}A \right] \tilde{f}(s,u(s))ds + \tilde{r}_1(\tau) \\
&= \int_0^\tau (\tau-s)\tilde{f}(s,u(s))ds - \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^3}{6}A\tilde{f}(s,u(s))ds + \tilde{r}_1(\tau) \\
&= \frac{\tau}{6} \left( 2\tau\tilde{f}\left(\frac{\tau}{2},u\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) + \tau\tilde{f}(0,\varphi_0) \right) + \tilde{r}_2(\tau) \\
&\quad - \left( \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^3}{6}A\tilde{f}(0,\varphi_0)ds + \tilde{r}_3(\tau) \right) + \tilde{r}_1(\tau) \\
&= \tau^2 \left( \frac{1}{6}\tilde{f}(0,\varphi_0) + \frac{1}{3}\tilde{f}\left(\frac{\tau}{2},u\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) - \frac{2\tau^2}{3}A\tilde{f}(0,\varphi_0) \right) \\
&\quad + \tilde{r}_1(\tau) + \tilde{r}_2(\tau) + \tilde{r}_3(\tau), \tag{2.2.24}
\end{aligned}$$

სადაც  $\tilde{r}_1(\tau)$ ,  $\tilde{r}_2(\tau)$  და  $\tilde{r}_3(\tau)$  ნაშთითი წევრებისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{r}_1(\tau)\| &\leq c\tau^6 \max_{t \in [0,\tau]} \|\tilde{f}(t,u(t))\|_{A^2}, \\
\|\tilde{r}_2(\tau)\| &\leq c\tau^5 \max_{t \in [0,\tau]} \|\tilde{f}'''(t,u(t))\|, \\
\|\tilde{r}_3(\tau)\| &\leq c\tau^5 \max_{t \in [0,\tau]} \|f'(t,u(t))\|_A.
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

$\int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds - \tau^2\tilde{\varphi}_2$ -ის სხვაობის შესაფასებლად (2.2.24)

ფორმულას გამოვაკლოთ (2.2.9) ფორმულა და გავითვალისწინოთ (2.2.25) უტოლობები, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds - \tau^2\tilde{\varphi}_2 \right\| \leq \frac{\tau^2}{3} \|z_{1/2}\| \\
& \quad + c\tau^5 \left( \max_{t \in [0,\tau]} \|f'(t,u(t))\|_A + \max_{t \in [0,\tau]} \|\tilde{f}'''(t,u(t))\| + \tau \max_{t \in [0,\tau]} \|\tilde{f}(t,u(t))\|_{A^2} \right),
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

სადაც  $z_{1/2} = u\left(\frac{\tau}{2}\right) - u_{1/2}$ . რადგან  $z_{1/2}$  ცდომილებას (2.2.26) უტოლობაში თანამარავლად აქვს  $\tau^2$  რიგის თანამამრავლი, ამიტომ საბოლოო ჯამში მეხუთე რიგის სიზუსტის მისაღებად საკმარისია  $z_{1/2}$ -ის შეფასება მესამე რიგის სიზუსტით. (2.2.22)-ის ანალოგიურად მივიღებთ გავითვალისწინოთ ((2.1.60) და (2.1.61) უტოლობები):

$$\begin{aligned}
\|z_{1/2}\| &= \|u(t_{1/2}) - u_{1/2}\| \leq \frac{1}{2} \left\| \left( 2 \cos\left(\frac{\tau}{2} A^{1/2}\right) - V\left(\frac{\tau}{2}\right) \right) \varphi_0 \right\| \\
&+ \left\| \left( A^{-1/2} \sin(\tau A^{1/2}) - \frac{\tau}{2} V\left(\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\right) \right) \varphi_1 \right\| \\
&+ \left\| \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin\left(\left(\frac{\tau}{2} - s\right) A^{1/2}\right) A^{-1/2} f(s) ds - \frac{\tau^2}{8} \tilde{f}(0, \varphi_0) \right\| \leq c\tau^5 (\|\varphi_1\|_{A^2} + \tau\|\varphi_0\|_{A^3}) \\
&+ \left\| \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left(\frac{\tau}{2} - s\right) \tilde{f}(s, u(s)) ds - \frac{\tau^2}{8} \tilde{f}(0, \varphi_0) + \tilde{r}_{1/2,1}(\tau) \right\| \leq c\tau^5 (\|\varphi_1\|_{A^2} + \tau\|\varphi_0\|_{A^3}) \\
&+ \left\| \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left(\frac{\tau}{2} - s\right) \tilde{f}(0, \varphi_0) ds - \frac{\tau^2}{8} \tilde{f}(0, \varphi_0) + \tilde{r}_{1/2,1}(\tau) + \tilde{r}_{1/2,2}(\tau) \right\| \\
&\leq c\tau^5 (\|\varphi_1\|_{A^2} + \tau\|\varphi_0\|_{A^3}) + \|\tilde{r}_{1/2,1}(\tau)\| + \|\tilde{r}_{1/2,2}(\tau)\|,
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

სადაც  $\|\tilde{r}_{1/2,1}(\tau)\|$  და  $\|\tilde{r}_{1/2,2}(\tau)\|$  ნაშთითი წევრებისთვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{r}_{1/2,1}(\tau)\| &\leq c\tau^4 \max_{t \in [0, \tau]} \|\tilde{f}(t, u(t))\|_A, \\
\|\tilde{r}_{1/2,2}(\tau)\| &\leq c\tau^3 \max_{t \in [0, \tau]} \|\tilde{f}'(t, u(t))\|.
\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

(2.2.27)-დან (2.2.28) უტოლობების გათვალისწინებით  $\|z_{1/2}\|$  ცდომილებისათვის მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\|z_{1/2}\| \leq c\tau^3 \left( \tau^3 \|\varphi_0\|_{A^3} + \tau^2 \|\varphi_1\|_{A^2} + \tau \max_{t \in [0, \tau]} \|\tilde{f}(t, u(t))\|_A + \max_{t \in [0, \tau]} \|\tilde{f}'(t, u(t))\| \right). \tag{2.2.29}$$

$\|z_{1/2}\|$  ცდომილებისათვის მიღებული (2.2.29) უტოლობა ჩავსვათ (2.2.26)-ში, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას  $\int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds - \tau^2\tilde{\varphi}_2$

სხვაობისათვის:

$$\left\| \int_0^\tau \sin((\tau-s)A^{1/2})A^{-1/2}f(s)ds - \tau^2\tilde{\varphi}_2 \right\| \leq +c\tau^5 \left( \max_{t \in [0, \tau]} \|f'(t, u(t))\|_A + \max_{t \in [0, \tau]} \|\tilde{f}'''(t, u(t))\| + \tau \max_{t \in [0, \tau]} \|\tilde{f}(t, u(t))\|_{A^2} \right). \quad (2.2.30)$$

(2.2.30) უტოლობა ჩავსვათ (2.2.23)-ში, მივიღებთ საბოლოო შეფასებას  $\|z_1\|$  ცდომილებისათვის:

$$\|z_1\| \leq c\tau^5 \left( \|\varphi_1\|_{A^2} + \tau \|\varphi_0\|_{A^3} + \max_{t \in [0, \tau]} \|f'(t, u(t))\|_A + \max_{t \in [0, \tau]} \|\tilde{f}'''(t, u(t))\| + \tau \max_{t \in [0, \tau]} \|\tilde{f}(t, u(t))\|_{A^2} \right). \quad (2.2.31)$$

თუ (2.2.31) უტოლობას ჩავსვამთ (2.2.20)-ში და გავითვალისწინებთ (2.1.54) შეფასებას, მივიღებთ საძიებელ (2.2.10) უტოლობას.

**თეორემა დამტკიცებულია.**

რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმი.

(2.2.6) დეკომპოზიციის სქემის რიცხვითი რეალიზაციის პროცესში დროითი შრის ყოველ ბიჯზე ხდება შემდეგი ამოცანის ამოხსნა:

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} = & 2V(\tau)u_k - u_{k-1} \\
 & + \tau^2 \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_1 \right)^{-1} \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_2 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_m \right)^{-1} \tilde{f}(t_k, u_k) \\
 & + \frac{\tau^2}{2} \left( \tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1}) - 2\tilde{f}(t_k, u_k) + \tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1}) \right),
 \end{aligned}
 \tag{2.2.32}$$

რადგანაც (2.2.32) დეკომპოზიციის სქემის მარჯვენა მხარეში შედის უცნობი ვექტორის მნიშვნელობა ზედა დროით შრეზე, ამიტომ ამ სქემის რეალიზაციისას საჭიროა შემდეგი იტერაციის გამოყენება:

$$u_{k+1}^{(l+1)} = \frac{\tau^2}{2} M(u_{k+1}^{(l)}) + F_k, \quad l = 1, 2, \dots,
 \tag{2.2.33}$$

სადაც  $l$  არის იტერაციის ინდექსი, ხოლო  $F_k$  დაითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\begin{aligned}
 F_k = & 2V(\tau)u_k - u_{k-1} \\
 & + \tau^2 \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_1 \right)^{-1} \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_2 \right)^{-1} \dots \left( I + \frac{1}{12} \tau^2 A_m \right)^{-1} \tilde{f}(t_k, u_k) \\
 & + \frac{\tau^2}{2} \left( f(t_{k+1}) - 2\tilde{f}(t_k, u_k) + \tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1}) \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.2.34}$$

შევნიშნოთ, რომ (2.2.33) დეკომპოზიციის სქემაში გამოთვლების მთელი სირთულე მოდის  $F_k$ -ს გამოთვლაზე (ფორმულა (2.2.34)), მაგრამ რადგანაც იგი არ მონაწილეობს იტერაციაში, ამიტომ დროითი შრის ყოველ ბიჯზე მისი გამოთვლა ხორციელდება მხოლოდ ერთხელ. რაც შეეხება (2.2.33) იტერაციულ პროცესს, იგი საკმაოდ სწრაფად იკრიბება, რადგანაც იტერაციულ წევრს პარამეტრად აქვს მცირე  $\tau^2$  რიგის პარამეტრი, ხოლო  $M(\cdot)$  ოპერატორი კი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას. ამ ფაქტების გათვალისწინებით, (2.2.33) იტერაციული პროცესისთვის ორი მომდევნო იტერაციის შესაფასებლად მივიღებთ შემდეგ უტოლობას:

$$\|u_{k+1}^{(l+1)} - u_{k+1}^{(l)}\| \leq \frac{\tau^2}{2} \|u_{k+1}^{(l)} - u_{k+1}^{(l-1)}\| \leq \dots \leq \left(\frac{\tau^2}{2}\right)^l \|u_{k+1}^{(1)} - u_{k+1}^{(0)}\|, \quad (2.2.35)$$

როგორც ვხედავთ, იტერაცია იკრიბება გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით, რომლის მნიშვნელი უდრის  $\frac{\tau^2}{2}$ . იტერაციის კიდევ უფრო დასაჩქარებლად იტერაციის საწყის მნიშვნელობად აიღება მიახლოებითი ამონახსნი დროით წინა შრეზე.

მოცემულ პარაგრაფში აგებული დეკომპოზიციის სქემის გამოყენებით, მეოთხე თავში ჩატარებულია რიცხვითი გათვლები სხვადასხვა ტესტური ამოცანებისათვის და მოყვანილია რიცხვითი შედეგების ანალიზი. მიღებული რიცხვითი შედეგები სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ შედეგებთან.



### თავი III

#### დეკომპოზიციის სქემა ცვლადოპერატორიანი კვაზიწრფივი ევოლუციური ამოცანისათვის

ამ თავში განხილულია პირველ თავში მიღებული შედეგები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც პირითადი ოპერატორი არის დროზე დამოკიდებული. კერძოდ, განხილულია შემდეგი კომის ამოცანა მრავალგანზომილებიანი აბსტრაქტული ცვლადოპერატორიანი ევოლუციური განტოლებისათვის ლიპშიც-უწყვეტი მარჯვენა მხარით.

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + b(t)Au(t) + M(u(t)) &= f(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

სადაც  $A$  არის თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული (ზოგადად შემოუსაზღვრელი) ოპერატორი  $D(A)$  განსაზღვრის არით, რომელიც ყველგან მკვრივია  $H$  სივრცეში,  $\overline{D(A)} = H$ ,  $A = A^*$  და

$$(Au, u) \geq a\|u\|^2, \quad \forall u \in D(A), \quad a = \text{const} > 0,$$

სადაც  $\|\cdot\|$  და  $(\cdot, \cdot)$  განსაზღვრავს შესაბამისად ნორმას და სკალარულ ნამრავლს  $H$  სივრცეში;  $b(t) \geq b_0 > 0$  მოცემული უწყვეტი სკალარული ფუნქციაა; მოცემული  $\varphi$  - მოცემული ვექტორია  $D(A)$  განსაზღვრის არიდან,  $f(t)$  არის უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია, არაწრფივი ოპერატორი  $M(\cdot)$  აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას.

ვთქვათ,  $A$  წარმოდგება  $m$  ცალი თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორების ჯამის სახით:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_m.$$

წარმოდგენილ თავში (3.1) ამოცანისათვის აგებულია მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა, მიღებულია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების შეფასება და დამტკიცებულია თეორემა კრებადობის შესახებ.

**§3.1 მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა  
ცვლადოპერატორიანი კვაზიწრფივი მრავალგანზომილებიანი  
ევოლუციური ამოცანისათვის**

ამოცანის დასმა

(3.1) ამოცანაში ლიპშიც-უწყვეტი წევრი გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეში, მივიღებთ შემდეგ ამოცანას:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + b(t)Au(t) &= \tilde{f}(t, u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) &= \varphi, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

სადაც  $\tilde{f}(t, u(t)) = f(t) - M(u(t))$ . თუ სრულდება (3.1) ამოცანისათვის მესამე თავში მოყვანილი პირობები, მაშინ (3.1.1) ამოცანას (იგულისხმება წრფივი შემთხვევა) გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი და იგი მოიცემა შემდეგი ფორმულით (იხ. [75]):

$$u(t) = U(t, 0, A)u(0) + \int_0^t U(t, s, A)\tilde{f}(s, u(s))ds, \quad (3.1.2)$$

სადაც  $U(t, s, A)$  არის (3.1.1) ამოცანის ამომხსნელი ოპერატორი, რომლისთვისაც მართებულია შემდეგი ფორმულა:

$$U(t, s, A) = I - \int_s^t A(s_1)U(t, s_1, A)ds_1, \quad (3.1.3)$$

სადაც  $A(s_1) = b(s_1)A$ .

$U(t, s, A)$  ოპერატორისათვის (3.1.3) ფორმულის რეკურენტული გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი გაშლა

$$\begin{aligned} U(t, s, A) &= I - \int_s^t A(s_1)ds_1 + \int_s^t A(s_1) \int_s^{s_1} A(s_2)ds_2 ds_1 \\ &+ \dots + (-1)^{k-1} \int_s^t A(s_1) \int_s^{s_1} A(s_2) \dots \int_s^{s_{k-2}} A(s_{k-1}) ds_{k-1} \dots ds_2 ds_1 \\ &+ (-1)^k R_k(t, s, A), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

სადაც  $R_k(t, s, A)$  ნაშთითი წევრისათვის მართებულია შემდეგი წარმოდგენა:

$$R_k(t, s, A) = \int_s^t A(s_1) \int_s^{s_1} A(s_2) \dots \int_s^{s_{k-1}} A(s_k) U(t, s_k, A) ds_k \dots ds_2 ds_1. \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) ნაშთითი წევრისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_k(t, s, A)\varphi\| \leq c(t-s)^k \|\varphi\|_{A^k}. \quad (3.1.6)$$

შემოვიღოთ შემდეგი ბადე დროითი ცვლადის მიმართ

$$\bar{\omega}_\tau = (t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, \tau > 0).$$

დეკომპოზიციის სქემის ასაგებად (3.1.2) ფორმულა ჩავწეროთ  $[t_{k-1}, t_{k+2}]$  ინტერვალისათვის. მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$u(t_{k+2}) = U(t_{k+2}, t_{k-1}, A)u(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+2}} U(t_{k+2}, s, A) \tilde{f}(s, u(s)) ds. \quad (3.1.6)$$

### დეკომპოზიციის სქემა.

(3.1.1) კვაზიწრფივი ევოლუციური ამოცანისათვის (2.1.2) ფორმულის საფუძველზე ავაგოთ მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემა, სიმარტივისათვის განვიხილოთ  $m = 2$  შესაკრების შემთხვევა და შემდეგ მოვახდინოთ მისი განზოგადება ნებისმიერი სასრული რაოდენობა შესაკრებებისათვის.  $U(t_k, t_{k-1}, A)$  ამომხსნელი ოპერატორი შევცვალოთ [56] (იხ. თავი III) ნაშრომში აგებული ლოკალურად მეოთხე რიგის სიზუსტის გახლეჩით, ხოლო ინტეგრალური წევრისთვის გამოვიყენოთ ლოკალურად მეოთხე რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულა. მივიღებთ შემდეგ მესამე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემას:

$$u_{k+2} = V(t_{k+2}, t_{k-1})u_{k-1} + \frac{3\tau}{4} (3V(t_{k+2}, t_{k+1})\tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1}) + V(t_{k+2}, t_{k-1})\tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1})), \quad (3.1.7)$$

სადაც  $V(t, s)$  ოპერატორული გახლეჩა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით (იხ. [56], თავი III):

$$V(t, s) = \frac{1}{2} (W(t, s; \alpha A_1)W(t, s; A_2)W(t, s; \bar{\alpha} A_1) + W(t, s; \alpha A_2)W(t, s; A_1)W(t, s; \bar{\alpha} A_2)), \quad (3.1.8)$$

სადაც  $W(t, s; A)$  წარმოადგენს  $U(t, s; A)$  ოპერატორის ლოკალურად მეოთხე რიგის სიზუსტის რაციონალურ აპროქსიმაციას და განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$W(t, s; A_i) = (I + \lambda_{0,t,s}(t-s)A_i)(I + \lambda_{t,s}(t-s)A_i)^{-1}(I + \bar{\lambda}_{t,s}(t-s)A_i)^{-1}. \quad (3.1.9)$$

აქ  $\lambda_{0,t,s}$  და  $\lambda_{t,s}$  რიცხვითი პარამეტრები განისაზღვრებიან შემდეგი ფორმულებით ( $\bar{\lambda}_{t,s}$  არის  $\lambda_{t,s}$ -ის კომპლექსური შეუღლებული):

$$\begin{aligned} \lambda_{0,t,s} &= \frac{6\gamma_{1,t,s}^3 - 6\gamma_{1,t,s}\gamma_{2,t,s} + \gamma_{3,t,s}}{6\gamma_{1,t,s}^2 - 3\gamma_{2,t,s}}, \quad \lambda_{t,s} = \frac{1}{2} \left( d_{t,s} + i\sqrt{4e_{t,s} - d_{t,s}^2} \right), \\ d_{t,s} &= \frac{3\gamma_{1,t,s}\gamma_{2,t,s} - \gamma_{3,t,s}}{6\gamma_{1,t,s}^2 - 3\gamma_{2,t,s}}, \quad e_{t,s} = \frac{3\gamma_{2,t,s}^3 - 3\gamma_{1,t,s}\gamma_{3,t,s}}{2(6\gamma_{1,t,s}^2 - 3\gamma_{2,t,s})}, \\ \gamma_{1,t,s} &= \frac{3b(t) + b\left(s + \frac{t-s}{3}\right)}{4}, \quad \gamma_{2,t,s} = b^2 \left( \frac{t+s}{2} \right), \quad \gamma_{3,t,s} = b^3 \left( \frac{t+s}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

(3.1.7) დეკომპოზიციის სქემის რიცხვითი რეალიზაციისათვის საჭიროა სამი სასტარტო ვექტორი:  $u_0, u_1$  და  $u_2$ .  $u_0 = \varphi$  განისაზღვრება საწყისი პირობიდან.  $u_1$ -ის გამოთვლა მესამე რიგის სიზუსტით ხორციელდება შემდეგი განტოლებით:

$$u_i = V(t_i, t_{i-1})u_{i-1} + \frac{\tau}{2} \left( V(t_i, t_{i-1})\tilde{f}(t_{i-1}, u_{i-1}) + \tilde{f}(t_i, u_i) \right), \quad i=1,2. \quad (3.1.11)$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში შედის უცნობი ვექტორი  $u_i$ , ამიტომ (3.1.11) სქემის რიცხვითი რეალიზაციისთვის საჭიროა შემდეგი იტერაციის გამოყენება:

$$u^{(l+1)}_i = F_i + \frac{\tau}{2} M(u^{(l)}_i), \quad i=1,2, \quad (3.1.12)$$

სადაც  $l$  წარმოადგენს იტერაციის ინდექსს, ხოლო  $F_i$  განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$F_i = V(t_i, t_{i-1})u_{i-1} + \frac{\tau}{2} \left( V(t_i, t_{i-1})\tilde{f}(t_{i-1}, u_{i-1}) + f(t_i) \right). \quad (3.1.13)$$

(3.1.12) იტერაცია საკმაოდ სწრაფად იკრიბება, რადგან უცნობ ვექტორს მარჯვენა მხარეში აქვს მცირე პარამეტრი და  $M(\cdot)$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას. ამ ორი ფაქტის გათვალისწინებით, პირველი პარაგრაფის ანალოგიურად (იხ. იტერაცია (1.1.11)), შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (3.1.11) იტერაციული პროცესი იკრიბება გეომეტრიული

პროგრესიის სიჩქარით, სადაც მნიშვნელი უდრის  $\frac{\tau}{2}$  გამრავლებულს ლიპშიცის მუდმივაზე. იტერაციული პროცესის კრებადობის კიდევ უფრო დასაჩქარებლად საწყის იტერაციად აიღება წინა დროით შრეზე მიღებული ამონახსნი:  $u_i^{(0)} = u_{i-1}$ .

### კრებადობის თეორემა.

ჩამოვყალიბოთ თეორემა (3.1.7) დეკომპოზიციის სქემის კრებადობის შესახებ.

**თეორემა 3.1.1.** ვთქვათ, სრულდება შემდეგი პირობები:

I)  $A_1$  და  $A_2$  თვითშეუღლებული, დადებითად განსაზღვრული ოპერატორებია ჰილბერტის  $H$  სივრცეში;

II)  $b(t)$  დადებითი, სკალარული, სამჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა -  $b(t) \geq b_0 > 0$ ,  $b(t) \in C^3[0, \infty)$ ;

III)  $M(\cdot)$  ოპერატორი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას;

IV)  $u(t) \in D(A^4)$  ყოველი  $t \geq 0$ -თვის;

V)  $\tilde{f}(t, u(t)) \in C^3([0, \infty); H)$ ;  $\tilde{f}(t, u(t)) \in D(A^3)$ ,  $\tilde{f}'(t, u(t)) \in D(A^2)$  და  $\tilde{f}''(t, u(t)) \in D(A)$  ყოველი ფიქსირებული  $t \geq 0$ -თვის.

მაშინ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|u(t_k) - u_k\| = O(\tau^3). \quad (3.1.14)$$

### თეორემის დამტკიცება.

დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე ლემა:

**ლემა 3.1.1.** თუ სრულდება თეორემა 3.1.1-ის I და II პირობები, მაშინ  $W(t, s; A_i)$  ოპერატორისთვის მართებულია შემდეგი გაშლა:

$$W(t, s; A_i) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{t^j}{j!} \gamma_{j,t,s} A_i^j + R_{W,k}(t, s; A_i), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3.1.15)$$

სადაც  $\gamma_{0,t,s} = 1$ , ხოლო  $\gamma_{j,t,s}$ ,  $j=1,2,3$  განისაზღვრებიან (3.1.10) ფორმულებიდან. ამასთან  $R_{W,k}(t,s;A_i)$  ნაშთითი წევრისთვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_{W,k}(t,s;A_i)\varphi\| \leq c e^{c(t-s)} \tau^k \|A_i^k \varphi\|, \quad \varphi \in D(A_i^k), \quad (3.1.16)$$

დამტკიცება.

შევნიშნოთ, რომ  $\lambda_{0,t,s}, \lambda_{1,t,s}, \bar{\lambda}_{1,t,s}$  პარამეტრები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \lambda_{0,t,s} + \lambda_{1,t,s} + \bar{\lambda}_{1,t,s} = \gamma_{1,t,s}, \\ \lambda_{0,t,s} (\lambda_{1,t,s} + \bar{\lambda}_{1,t,s}) + \lambda_{1,t,s}^2 + \bar{\lambda}_{1,t,s}^2 + \lambda_{1,t,s} \bar{\lambda}_{1,t,s} = \frac{\gamma_{2,t,s}}{2}, \\ \lambda_{0,t,s} (\lambda_{1,t,s}^2 + \bar{\lambda}_{1,t,s}^2 + \lambda_{1,t,s} \bar{\lambda}_{1,t,s}) + \lambda_{1,t,s}^3 + \bar{\lambda}_{1,t,s}^3 + \lambda_{1,t,s}^2 \bar{\lambda}_{1,t,s} + \lambda_{1,t,s} \bar{\lambda}_{1,t,s}^2 = \frac{\gamma_{3,t,s}}{6}. \end{cases} \quad (3.1.17)$$

ინდუქციით მარტივად მიიღება შემდეგი გაშლა:

$$(I + \gamma A)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \gamma^i A^i + \gamma^k A^k (I + \gamma A)^{-1}. \quad (3.1.18)$$

$W(t,s;A_i)$  რაციონალურ ოპერატორ-ფუნქციაში შემავალი სამივე თანამამრავლი გავშალოთ (3.1.18) ფორმულის გამოყენებით ისე, რომ ყოველი ნაშთითი წევრი იყოს პირველი რიგის, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$W(t,s;A_i) = I + R_{W,1}(t,s;A_i), \quad (3.1.19)$$

სადაც  $R_{W,1}(t,s;A_i)$  ნაშთითი წევრისთვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_{W,1}(t,s;A_i)\varphi\| \leq c(t-s)\|A_i\varphi\|, \quad \varphi \in D(A_i). \quad (3.1.20)$$

$W(t,s;A_i)$  რაციონალურ ოპერატორ-ფუნქციაში შემავალი სამივე თანამამრავლი გავშალოთ (3.1.18) ფორმულის გამოყენებით ისე, რომ ყოველი ნაშთითი წევრი იყოს მეორე რიგის, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$W(t,s;A_i) = I - (\lambda_{0,t,s} + \lambda_{1,t,s} + \bar{\lambda}_{1,t,s})(t-s)A_i + R_{W,2}(t,s;A_i), \quad (3.1.21)$$

სადაც  $R_{W,2}(t, s; A_i)$  ნაშთითი წევრისთვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_{W,2}(t, s; A_i)\varphi\| \leq c(t-s)^2 \|A_i^2 \varphi\|, \quad \varphi \in D(A_i^2). \quad (3.1.22)$$

(3.1.21) ტოლობიდან (3.1.17) სისტემის პირველი განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$W(t, s; A_i) = I - \gamma_{1,t,s}(t-s)A_i + R_{W,1}(t, s; A_i). \quad (3.1.23)$$

$W(t, s; A_i)$  რაციონალურ ოპერატორ-ფუნქციაში შემავალი სამივე თანამამრავლი გავშალოთ (3.1.18) ფორმულის გამოყენებით ისე, რომ ყოველი ნაშთითი წევრი იყოს მესამე რიგის, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\begin{aligned} W(t, s; A_i) = & I - (\lambda_{0,t,s} + \lambda_{1,t,s} + \bar{\lambda}_{1,t,s})(t-s)A_i \\ & + (\lambda_{0,t,s}(\lambda_{1,t,s} + \bar{\lambda}_{1,t,s}) + \lambda_{1,t,s}^2 + \bar{\lambda}_{1,t,s}^2 + \lambda_{1,t,s}\bar{\lambda}_{1,t,s})(t-s)^2 A_i^2 \\ & + R_{W,3}(t, s; A_i), \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

სადაც  $R_{W,3}(t, s; A_i)$  ნაშთითი წევრისთვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_{W,3}(t, s; A_i)\varphi\| \leq c(t-s)^3 \|A_i^3 \varphi\|, \quad \varphi \in D(A_i^3). \quad (3.1.25)$$

(3.1.24) ტოლობიდან (3.1.17) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$W(t, s; A_i) = I - \gamma_{1,t,s}(t-s)A_i + \frac{\gamma_{2,t,s}}{2}(t-s)^2 A_i^2 + R_{W,3}(t, s; A_i). \quad (3.1.26)$$

საბოლოოდ  $W(t, s; A_i)$  რაციონალურ ოპერატორ-ფუნქციაში შემავალი სამივე თანამამრავლი გავშალოთ (3.1.18) ფორმულის გამოყენებით ისე, რომ ყოველი ნაშთითი წევრი იყოს მეოთხე რიგის, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\begin{aligned} W(t, s; A_i) = & I - (\lambda_{0,t,s} + \lambda_{1,t,s} + \bar{\lambda}_{1,t,s})(t-s)A_i \\ & + (\lambda_{0,t,s}(\lambda_{1,t,s} + \bar{\lambda}_{1,t,s}) + \lambda_{1,t,s}^2 + \bar{\lambda}_{1,t,s}^2 + \lambda_{1,t,s}\bar{\lambda}_{1,t,s})(t-s)^2 A_i^2 \\ & - (\lambda_{0,t,s}(\lambda_{1,t,s}^2 + \bar{\lambda}_{1,t,s}^2 + \lambda_{1,t,s}\bar{\lambda}_{1,t,s}) + \lambda_{1,t,s}^3 + \bar{\lambda}_{1,t,s}^3 + \lambda_{1,t,s}^2\bar{\lambda}_{1,t,s} \\ & + \lambda_{1,t,s}\bar{\lambda}_{1,t,s}^2)(t-s)^3 A_i^3 + R_{W,4}(t, s; A_i), \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

სადაც  $R_{W,4}(t, s; A_i)$  ნაშთითი წევრისთვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_{W,4}(t,s;A_i)\varphi\| \leq c(t-s)^4 \|A_i^4\varphi\|, \quad \varphi \in D(A_i^4). \quad (3.1.28)$$

(3.1.28) ტოლობიდან (3.1.17) სისტემის გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\begin{aligned} W(t,s;A_i) = & I - (t-s)\gamma_{1,t,s}A_i + \frac{(t-s)^2}{2}\gamma_{2,t,s}A_i^2 \\ & - \frac{(t-s)^3}{6}\gamma_{3,t,s}A_i^3 + R_{W,3}(t,s;A_i). \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

(3.1.19), (3.1.23), (3.1.26) და (3.1.29) ტოლობების გაერთიანებით მივიღებთ (3.1.6) დასამტკიცებელ ფორმულას, ხოლო (3.1.20), (3.1.21), (3.1.25) და (3.1.29) უტოლობების გაერთიანებით მივიღებთ დასამტკიცებელ (3.1.7) შეფასებას.

### ლემა 3.1.1 დამტკიცებულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ  $V(t,s)$  ოპერატორული გახლეჩა ახდენს  $U(t,s,A)$  ოპერატორის აპროქსიმაციას ლოკალურად მეოთხე რიგის სიზუსტით. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე ლემა:

**ლემა 3.1.2.** *თუ სრულდება თეორემა 3.1.1-ის პირობები, მაშინ  $V(t,s)$  ოპერატორული გახლეჩა ახდენს  $U(t,s,A)$  ოპერატორის აპროქსიმაციას ლოკალურად მეოთხე რიგის სიზუსტით. კერძოდ, მართებულია შემდეგი შეფასება:*

$$\| [U(t,s;A) - V(t,s)]\varphi \| = O((t-s)^4), \quad \varphi \in D(A^4). \quad (3.1.30)$$

### დამტკიცება.

თუ  $V(t,s)$  ოპერატორში შემავალ რაციონალურ აპროქსიმაციებს გავშლით (3.1.5) ფორმულის გამოყენებით ისე, რომ ყოველი ნაშთითი წევრი აღმოჩნდეს მეოთხე რიგის სიზუსტის, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\begin{aligned} V(t,s) = & I - (t-s)\gamma_{1,t,s}A + \frac{(t-s)^2}{2}\gamma_{2,t,s}A^2 - \frac{(t-s)^3}{6}\gamma_{3,t,s}A^3 + R_V(t,s). \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

სადაც  $R_V(t,s)$  ნაშთითი წევრისათვის მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|R_V(t,s)\varphi\| \leq c(t-s)^4 \|A^4\varphi\|, \quad \varphi \in D(A^4). \quad (3.1.32)$$



ამავე დროს  $U(t, s, A)$ -თვის (3.1.4) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{aligned}
 U(t, s, A) &= I - \left( \int_s^t b(s_1) ds_1 \right) A + \left( \int_s^t b(s_1) \int_s^{s_1} b(s_2) ds_2 ds_1 \right) A^2 \\
 &\quad - \left( \int_s^t b(s_1) \int_s^{s_1} b(s_2) \int_s^{s_2} b(s_3) ds_3 ds_2 ds_1 \right) A^3 + R_4(t, s, A) \\
 &= I - \left( \int_s^t b(s_1) ds_1 \right) A + \frac{1}{2} \left( \int_s^t b(s_1) ds_1 \right)^2 A^2 \\
 &\quad - \frac{1}{6} \left( \int_s^t b(s_1) ds_1 \right)^3 A^3 + R_4(t, s, A).
 \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

თუ სრულდება თეორემა 1.1.1-ის II პირობა, კერძოდ  $b(t) \in C^3[0, \infty)$ , მაშინ მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_s^t b(s_1) ds_1 - (t-s) \frac{3b(t) + b\left(s + \frac{t-s}{3}\right)}{4} \right| \leq c\tau^4, \\
 &\left| \left( \int_s^t b(s_1) ds_1 \right)^2 - (t-s)^2 b^2\left(\frac{t+s}{2}\right) \right| \leq c\tau^4, \\
 &\left| \left( \int_s^t b(s_1) ds_1 \right)^3 - (t-s)^3 b^3\left(\frac{t+s}{2}\right) \right| \leq c\tau^4
 \end{aligned} \tag{3.1.34}$$

(3.1.31) და (3.1.33) ტოლობებიდან (3.1.32), (3.1.34) და (3.1.6) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ საძიებელ (3.1.30) შეფასებას.

**ლემა 3.1.2 დამტკიცებულია.**

დავუბრუნდეთ თეორემა 3.1.1-ის დამტკიცებას.

კვადრატურული ფორმულის გამოყენებით (3.1.6) ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}
 u(t_{k+2}) &= U(t_{k+2}, t_{k-1}; A) u_{k-1} + \frac{3\tau}{4} \left( 3U(t_{k+2}, t_{k+1}; A) \tilde{f}(t_{k+1}, u(t_{k+1})) \right. \\
 &\quad \left. + U((t_{k+2}, t_{k-1}; A)) \tilde{f}(t_{k-1}, u(t_{k-1})) \right) + r_k(\tau),
 \end{aligned} \tag{3.1.35}$$

სადაც  $r_k(\tau)$  არის კვადრატული ფორმულის ნაშთი, რომლისთვისაც, თუ სრულდება **თეორემა 3.1.1**-ის  $V$  პირობა, მაშინ მართებულია შემდეგი შეფასება:

$$\|r_k(\tau)\| = O(\tau^4). \quad (3.1.36)$$

(3.1.7) და (3.1.35) ფორმულებიდან მიახლოებითი ამონახსნი ცდომილებისათვის მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$u(t_{k+2}) - u_{k+2} = r_k^{(1)}(\tau) + r_k^{(2)}(\tau) + r_k^{(3)}(\tau) + r_k(\tau), \quad (3.1.37)$$

სადაც

$$r_k^{(1)}(\tau) = U(t_{k+2}, t_{k-1}; A)u(t_k) - V(t_{k+2}, t_{k-1})u_k, \quad (3.1.38)$$

$$r_k^{(2)}(\tau) = \frac{3}{4}\tau(U(t_{k+2}, t_{k+1}; A)\tilde{f}(t_{k+1}, u(t_{k+1})) - V(t_{k+2}, t_{k+1})\tilde{f}(t_{k+1}, u_{k+1})), \quad (3.1.39)$$

$$r_k^{(3)}(\tau) = \frac{9}{4}\tau(U(t_{k+2}, t_{k-1}; A)\tilde{f}(t_{k-1}, u(t_{k-1})) - V(t_{k+2}, t_{k-1})\tilde{f}(t_{k-1}, u_{k-1})). \quad (3.1.40)$$

შევაფასოთ (3.1.38)-(3.1.40) ნაშთითი წევრები. (3.1.38)-თვის (3.1.36) შეფასებისა და  $\|V(t, s)\| \leq e^{t-s}$  უტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{aligned} \|r_k^{(1)}(\tau)\| &\leq \| [U(t_{k+2}, t_{k-1}; A) - V(t_{k+2}, t_{k-1})] u(t_k) \| \\ &+ \|V(t_{k+2}, t_{k-1})\| \|u(t_k) - u_k\| \leq e^{c\tau} \|u(t_k) - u_k\| + O(\tau^4). \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

(3.1.39)-თვის (3.1.36) უტოლობისა და **თეორემა 3.1.1**-ის *III* პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\begin{aligned} \|r_k^{(2)}(\tau)\| &\leq c\tau \left( \| [U(t_{k+2}, t_{k+1}; A) - V(t_{k+2}, t_{k+1})] \tilde{f}(t_{k+1}, u(t_{k+1})) \| \right. \\ &+ \|V(t_{k+2}, t_{k+1})\| \|M(u(t_{k+1})) - M(u_{k+1})\| \\ &\leq c\tau \left( e^{c\tau} \|M(u(t_{k+1})) - M(u_{k+1})\| + O(\tau^4) \right) \\ &\leq c\tau e^{c\tau} \|u(t_{k+1}) - u_{k+1}\| + O(\tau^5). \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

(3.1.42)-ის ანალოგიურად (3.1.40)-თვის მივიღებთ:

$$\|r_k^{(3)}(\tau)\| \leq c\tau e^{c\tau} \|u(t_{k-1}) - u_{k-1}\| + O(\tau^5). \quad (3.1.43)$$

ცდომილებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:  $z_k = \|u(t_k) - u_k\|$ .  
შესაბამისად (3.1.37)-ტოლობიდან (3.1.41)-(3.1.43) უტოლობების  
გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$z_{k+2} \leq e^{c\tau} (z_{k+1} + c\tau z_{k-1}) + O(\tau^4), \quad (3.1.44)$$

(3.1.44) უტოლობა (1.1.25) უტოლობის იდენტურია, ამიტომ აქედან პირველი  
პარაგრაფის ანალოგიურად მიიღება (1.1.32)-ის იდენტური შეფასება

$$z_{k+2} \leq e^{ct_k} z_0 + O(\tau^3). \quad (3.1.45)$$

აქედან კი გამომდინარეობს (3.1.14) დასამტკიცებელი უტოლობა.

**დეკომპოზიციის სქემის განზოგადება ნებისმიერი სასრული რაოდენობა  
შესაკრების შემთხვევაში.**

შევნიშნოთ, რომ (3.1.7) დეკომპოზიციის სქემის განზოგადება მარტივად  
შეიძლება ნებისმიერი სასრული რაოდენობა შესაკრებების  
შემთხვევისათვის:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_m, \quad m \geq 2.$$

ამ შემთხვევაში (3.1.7) დეკომპოზიციის სქემაში  $V(t, s)$  ოპერატორული  
გახლეჩა (3.1.8) ფორმულის ნაცვლად მიიღება შემდეგი ფორმულით:

$$\begin{aligned} V(t, s) = & \frac{1}{2} \left( W(t, s; \alpha A_1) W(t, s; \alpha A_2) \dots W(t, s; \alpha A_{m-1}) W(t, s; A_m) \right. \\ & \times W(t, s; \bar{\alpha} A_{m-1}) \dots W(t, s; \bar{\alpha} A_2) W(t, s; \bar{\alpha} A_1) \\ & + W(t, s; \alpha A_m) W(t, s; \alpha A_{m-1}) \dots W(t, s; \alpha A_2) W(t, s; A_1) \\ & \left. \times W(t, s; \bar{\alpha} A_2) \dots W(t, s; \bar{\alpha} A_2) W(t, s; \bar{\alpha} A_1) \right), \end{aligned}$$

სადაც  $W(t, s; A)$  რაციონალური აპროქსიმაცია განისაზღვრება (3.1.9)  
ფორმულით.

## თავი IV

### რიცხვითი გათვლის შედეგები

მეთოდის კრებადობის რიგის შეფასება რიცხვითი გათვლებით.

წარმოდგენილ თავში სხვადასხვა მეთოდებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებისათვის აგებული იქნება მიახლოებითი ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების ლოგარითმის დროითი ბიჯის ლოგარითმზე დამოკიდებულების გრაფიკები და გამოთვლილი იქნება საკუთხო კოეფიციენტი, რომლის საშუალებითაც განისაზღვრება მეთოდის კრებადობის რიგი.

იმისათვის, რომ კომპიუტერული გათვლის შედეგების რიცხვითი ანალიზის საფუძველზე შევისწავლოთ მიახლოებითი ამონახსნის კრებადობის რიგი, საჭიროა გამოვიყენოთ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების ლოგარითმის გრაფიკის დამოკიდებულება ბიჯის ლოგარითმზე. დეტალურად მოვიყვანოთ ამ ანალიზის აღწერა. ვთქვათ, მიახლოებით ამონახსნს ვითვლით  $p$  რიგის სიზუსტის მეთოდით. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$error_k(\tau) = c_k \tau^p. \quad (4.1)$$

გავალოგარითმოთ 10-ის ფუძით (4.10) მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების ორივე მხარე, მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\text{Log}(error_k(\tau)) = \text{Log}(c_k \tau^p) = \text{Log}(c_k) + p \text{Log}(\tau). \quad (4.2)$$

(4.2) ტოლობიდან ჩანს, რომ მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების ლოგარითმი წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას დროითი ბიჯის ლოგარითმთან მიმართებაში, სადაც საკუთხო კოეფიციენტი განსაზღვრავს ცდომილების რიგს. რაც შეეხება მუდმივას -  $\text{Log}(c_k)$ , მართალია, იგი დამოკიდებულია ირიბად  $\tau$  ბიჯზე (ნებისმიერი დადებითი  $\tau$ -თვის შემოსაზღვრულია კონსტანტით, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ უწყვეტი ამოცანის ამონახსნზე), მაგრამ  $\tau$ -ს შემცირებასთან ერთად იგი იკრიბება გარკვეული მნიშვნელობისკენ. მართლაც, საზოგადოდ  $c_k$  კოეფიციენტი არის განტოლებასა და საწყის-სასაზღვრო პირობებში შემავალი ფუნქციების სხვადასხვა რიგის წარმოებულების კომბინაცია  $\xi_k$  წერტილებში, სადაც  $\xi_k$  რომელიღაც წერტილია  $[t_{k-1}, t_k]$  ინტერვალიდან. ცხადია,  $\xi_k$  წერტილები

დამოკიდებულია  $\tau$  ბიჯზე, რადგან  $\tau$ -ს ცვლილების შედეგად იცვლება  $[t_{k-1}, t_k]$  ინტერვალი, მაგრამ ეს ცვლილება სულ უფრო და უფრო მცირე ხდება  $\tau$  ბიჯის შემცირებასთან ერთად და შესაბამისად  $\xi_k$  წერტილებიც უფრო და უფრო სტაბილური ხდება და იკრიბებიან  $t_{k-1/2}$  მნიშვნელობებისკენ. ამიტომ  $\tau$ -ს შემცირების შედეგად შესაბამისად  $c_k$  კოეფიციენტიც იკრიბება გარკვეული მნიშვნელობისკენ და სტაბილურდება. ეს ეფექტი კარგად ჩანს ცდომილების ლოგარითმულ გრაფიკზე, რადგან როგორც წესი, დიდი ბიჯების შემთხვევაში ცდომილების წირი ოსცილირებს წრფის ირგვლივ, ხოლო ბიჯის შემცირების შედეგად ეს ოსცილაცია მცირდება და წირი სულ უფრო და უფრო უახლოვდება წრფეს. წირის ოსცილირება და გადახრა დიდი ბიჯებისთვის მით უფრო თვალსაჩინოა, რაც უფრო დიდია განტოლებაში შემავალი ფუნქციების ოსცილაცია, რადგან ამ შემთხვევაში მათი წარმოებულები დიდია და სწრაფად ოსცილირებადი, რაც იწვევს დიდ ცვლილებებს  $c_k$  კოეფიციენტში  $\xi_k$  წერტილების ცვლილებების გამო, თუმცა საბოლოოდ ნებისმიერ შემთხვევაში სტაბილიზაცია უნდა მოხდეს  $\tau$  ბიჯის შემცირების ხარჯზე.

### კვაზიწრფივი ევოლუციური ამოცანა

#### ამოცანა 1.

ამ ამოცანისთვის მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად კომპიუტერული გამოთვლები განხორციელდა 2.1 პარაგრაფში აგებული დეკომპოზიციის სქემის საშუალებით. განხილულ იქნა შემდეგი კვაზიწრფივი ევოლუციური ამოცანა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sin(u(t, x, y)) + f(t, x, y), \\ (t, x, y) &\in \Omega \times [0, t], \quad \Omega = [0, 1]^2, \\ u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \quad u(x, y, t) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

სადაც  $k_1(x, y), k_2(x, y)$  და  $f(t, x, y)$  არიან მოცემული, საკმარისად გლუვი ფუნქციები. ამასთან, დამატებით სრულდება შემდეგი პირობები:

$$k_i(x, y) \geq \nu_0 > 0. \tag{4.4}$$

განხილულია ორი ტესტური შემთხვევა:

**ტესტი 1.1.**

$$\varphi(x, y) = e^{m^2\pi^2 T} \sin(m\pi x) \sin(m\pi y), \quad m = 1, 3, 5, \quad T = 0.3, \quad (4.5)$$

$$f(t, x, y) = \sin\left(e^{-2m^2\pi^2\left(t-\frac{T}{2}\right)} \sin(m\pi x) \sin(m\pi y)\right), \quad k_1(x, y) = k_2(x, y) = 1; \quad (4.6)$$

**ტესტი 1.2.**

$$\varphi(x, y) = \sin(m\pi x) \sin(m\pi y), \quad m = 1, 5, 11, \quad T = 1.0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} f(t, x, y) = & m\pi \left(1 - m\pi (k_1(x, y) + k_2(x, y))\right) e^{m\pi t} \sin(m\pi x) \sin(m\pi y) \\ & - m\pi^2 e^{m\pi t} \cos(\pi x) \sin(m\pi x) \sin(m\pi y) \\ & + \cos(\pi y) \sin(m\pi x) \cos(m\pi y) + e^{m\pi t} \sin(m\pi x) \sin(m\pi y), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$k_1(x, y) = 2 + \sin(\pi x), \quad k_2(x, y) = 2 + \sin(\pi y). \quad (4.9)$$

**ტესტი 1.1-ის ამონახსნია**

$$u(t, x, y) = e^{-2m^2\pi^2\left(t-\frac{T}{2}\right)} \sin(m\pi x) \sin(m\pi y), \quad (4.10)$$

**ხოლო ტესტი 1.2-ის ამონახსნია**

$$u(t, x, y) = e^{m\pi t} \sin(m\pi x) \sin(m\pi y). \quad (4.11)$$

**სურათი 4.1-**ზე მოყვანილია **ტესტი 1.1-ის** მიახლოებითი ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების ლოგარითმის დამოკიდებულება დროითი ბიჯის ლოგარითმზე,  $m = 1, 3, 5$  შემთხვევებისათვის. ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია დროითი ბიჯის ლოგარითმი  $\text{Log}(\tau)$ , ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე გადაზომილია მიახლოებითი ამონახსნის

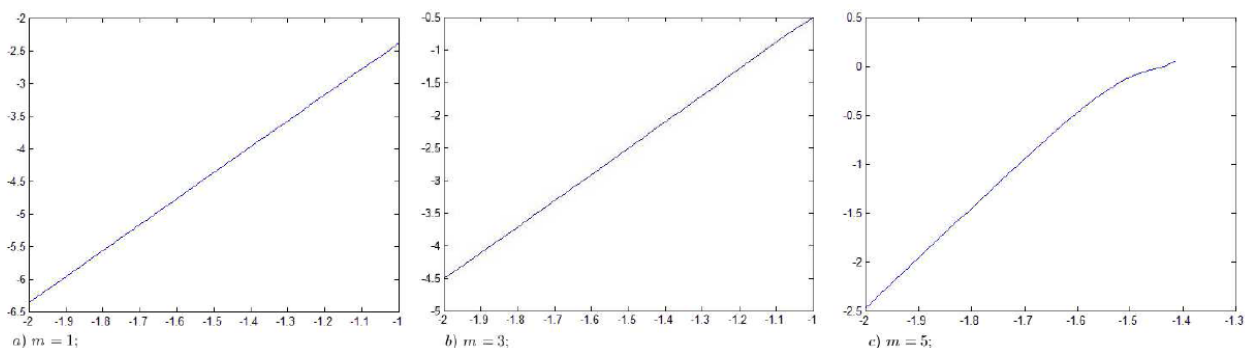
ფარდობითი ცდომილების ლოგარითმი  $\text{Log} \frac{\|u(t_k) - u_k\|}{\|u(t_k)\|}$ .

**სურათი 4.1-ის** სამივე შემთხვევისათვის, დაწყებული დროითი ბიჯის გარკვეული მნიშვნელობიდან, ცდომილების წირი უახლოვდება წრფეს, რომლის საკუთხო კოეფიციენტი უდრის ოთხს, რაც ადასტურებს 1.2 პარაგრაფში მიღებულ თეორიულ შედეგებს. ამ სურათიდან ჩანს, რომ

ოსცილაციის ზრდასთან ერთად იზრდება ცდომილება და საჭირო სიზუსტის მისაღებად საჭირო ხდება დაყოფათა რიცხვის გაზრდა. მაგალითად, **4.1 სურათიდან** ნათლად ჩანს, რომ 1%-იანი ცდომილების მისაღებად (რაც გულისხმობს, რომ სიზუსტე უნდა იყოს ორი ნიშნადი ციფრი, ანუ ფარდობითი ცდომილება უნდა იყოს 0.01-ის ტოლი, ხოლო

$$\text{ცდომილების ლოგარითმი } \text{Log} \frac{\|u(t_k) - u_k\|}{\|u(t_k)\|} = -2.0),$$

- $m = 1$  შემთხვევისათვის საკმარისია  $\text{Log}(\tau) = -1.0$  და შესაბამისად დროითი ბიჯისთვის  $\tau = 0.1$  მნიშვნელობის აღება;
- $m = 3$  შემთხვევისათვის საჭიროა  $\text{Log}(\tau) = -1.4$  და შესაბამისად დროითი ბიჯისთვის  $\tau = 0.04$  მნიშვნელობის აღება;
- ხოლო  $m = 5$  შემთხვევისათვის ამ სიზუსტის მისაღწევად აუცილებელია  $\text{Log}(\tau) = -1.9$  და შესაბამისად დროითი ბიჯისთვის  $\tau = 0.013$  მნიშვნელობის აღება;



**სურათი 4.1.** ტესტი 1.1-ის მიახლოებითი ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების ლოგარითმის დამოკიდებულება დროითი ბიჯის ლოგარითმზე,  $m = 1, 3, 5$  შემთხვევებისათვის

**სურათი 4.2-ზე** მოცემულია ტესტი 1.1-ის მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობები,  $t = 0.3$  წერტილში  $m = 1, 3, 5$  შემთხვევებისათვის. შევნიშნოთ, რომ  $m = 3$  და  $m = 5$  შემთხვევები საკმაოდ რთულია რიცხვითი გათვლის თვალსაზრისით, რადგანაც ამ ამოცანის ამონახსნები წარმოადგენენ სინუსოიდებს, რომელთა ამპლიტუდებიც იცვლება შემდეგ ინტერვალებში:

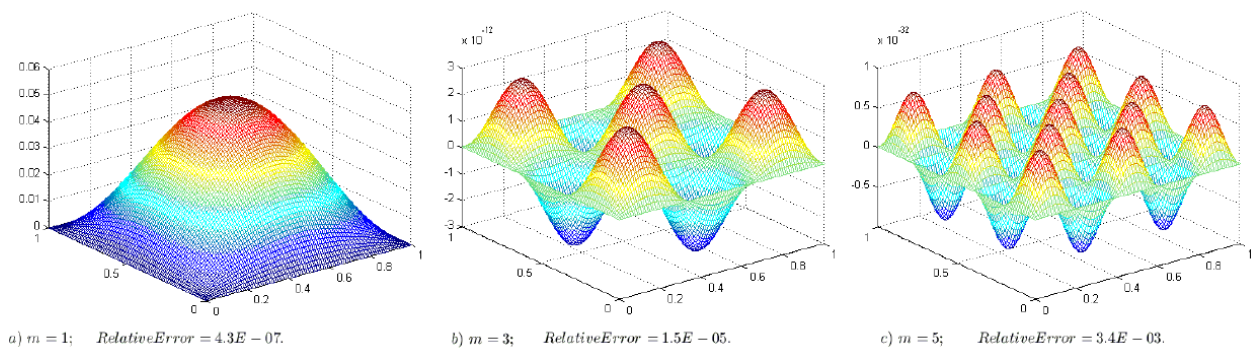
- $m = 1$  შემთხვევისათვის ამპლიტუდა იცვლება  $\frac{1}{20}$ -დან 20-მდე;
- $m = 3$  შემთხვევისათვის ამპლიტუდა იცვლება  $10^{-11}$ -დან  $10^{11}$ -მდე;
- $m = 5$  შემთხვევისათვის ამპლიტუდა იცვლება  $10^{-32}$ -დან  $10^{32}$ -მდე;

მართლაც, მაგალითად  $m = 5$  შემთხვევისათვის ამონახსნის მაქსიმალური მნიშვნელობა  $t = 0$  საწყისი მომენტისთვის, დროით ნულოვან შრეზე უდრის  $e^{-7.5\pi^2} \approx 10^{-32}$ , ხოლო  $t = 0.3$  მომენტისთვის, დროით საბოლოო შრეზე უდრის  $e^{7.5\pi^2} \approx 10^{32}$ . ამას გარდა სირთულე იმაშიც მდგომარეობს, რომ  $m$ -ის ზრდასთან ერთად იზრდება ამონახსნის სივრცითი ცვლადის მიმართ ოსცილაციის სიხშირე ერთი და იგივე დროით შრეზე, რაც ნიშნავს, რომ მაგალითად  $m = 5$  შემთხვევისათვის სივრცითი ცვლადის მიმართ  $[0,1]$  ინტერვალში ამონახსნი 5-ჯერ იცვლის მნიშვნელობას  $-10^{32}$ -დან  $10^{32}$ -მდე.

აქედან გამომდინარე, იმისათვის რომ მეთოდმა დაიჭიროს ამონახსნის ასეთი ყოფაქცევა, საჭიროა, რომ შეეძლოს როგორც ძალიან მცირე ისე, ძალიან დიდი მნიშვნელობების და მათ შორის სწრაფი გადასვლის კარგად აპროქსიმაცია.

სურათი 4.2-დან ჩანს, რომ გამოყენებული მეთოდი ახერხებს ტესტი 1.1-ის ამონახსნის ყოფაქცევის დაჭერას, კერძოდ დროითი ბიჯის  $\tau = 0.01$  მნიშვნელობისათვის მიღებული რიცხვითი შედეგების სიზუსტის რიგი საკმაოდ მაღალია:

- $m = 1$  შემთხვევისათვის ფარდობითი ცდომილება უდრის  $4.3E - 07$  ;
- $m = 3$  შემთხვევისათვის ფარდობითი ცდომილება უდრის  $1.5E - 05$  ;
- $m = 5$  შემთხვევისათვის ფარდობითი ცდომილება უდრის  $3.4E - 03$ .

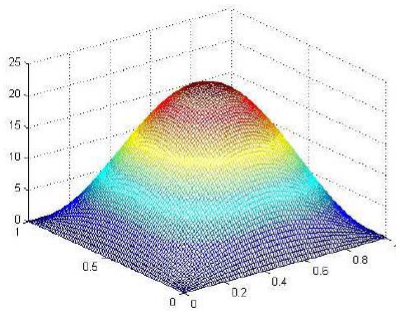


სურათი 4.2. ტესტი 1.1-ის მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობები,  $t = 0.3$  წერტილში  $m = 1, 3, 5$  შემთხვევებისათვის.

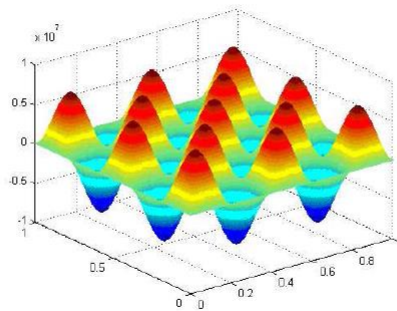
სურათი 4.3-ზე მოცემულია ტესტი 1.2-ის მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობები,  $t = 1.0$  წერტილში  $m = 1, 5, 11$  შემთხვევებისათვის. ამ ტესტის სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ სიმპსონის კვადრატურული ფორმულის ნაშთითი წევრი მნიშვნელოვნად იზრდება  $m$ -ის მნიშვნელობის ზრდასთან ერთად. ამასთან,  $m$ -ის მნიშვნელობის ზრდასთან ერთად იზრდება ამონახსნის ოსცილაცია. შესაბამისად საკმარისი სიზუსტის მისაღებად საჭირო ხდება დროითი ბიჯის შემცირება:



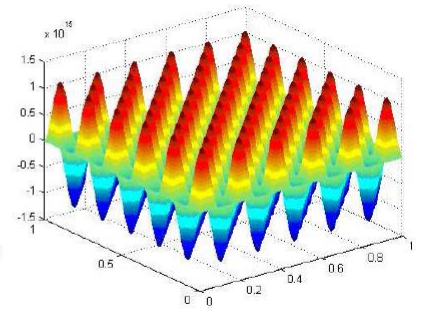
- $m=1$  შემთხვევისათვის დროითი ბიჯის მნიშვნელობა აღებულია  $\tau=0.01$ -ის ტოლი, შესაბამისი ფარდობითი ცდომილება უდრის  $5.9E-06$ ;
- $m=5$  შემთხვევისათვის დროითი ბიჯის მნიშვნელობა აღებულია  $\tau=0.002$ -ის ტოლი, შესაბამისი ფარდობითი ცდომილება უდრის  $4.6E-03$ ;
- $m=11$  შემთხვევისათვის დროითი ბიჯის მნიშვნელობა აღებულია  $\tau=0.001$ -ის ტოლი, შესაბამისი ფარდობითი ცდომილება უდრის  $1.8E-02$ .



a)  $m=1$ ;  $\tau=0.01$ ;  $RelativeError=5.9E-06$ .



b)  $m=5$ ;  $\tau=0.002$ ;  $RelativeError=4.6E-03$ .



c)  $m=11$ ;  $\tau=0.001$ ;  $RelativeError=1.8E-02$ .

სურათი 4.3. ტესტი 1.2-ის მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობები,  $t=1.0$  წერტილში  $m=1,5,11$  შემთხვევებისათვის.

## ამოცანა 2.

ამ განყოფილებაში განვიხილავთ I. Lengyel და I. R. Epstein მიერ შექმნილ მათემატიკურ მოდელს, რომელიც აღწერს CIMA (chlorite-iodide-malonic acid) ქიმიურ რეაქციას (იხ. [83], ფორმულა (7.18)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f_u - u - \frac{4uv}{1+u^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v &= f_v + u - \frac{uv}{1+u^2}\end{aligned}\tag{4.12}$$

$f_u, f_v$  მოცემული დროით და სივრცით კოორდინატებზე დამოკიდებული ფუნქციებია;

(4.1.12) ამოცანაში  $u$  (აქტივატორი) აღნიშნავს იოდიდის ( $I^-$ ) კონცენტრაციას, ხოლო  $v$  (ინჰიბიტორი) აღნიშნავს ქლორიტის ( $ClO_2^-$ ) კონცენტრაციას. აღნიშნული ქიმიური რეაქცია დაკავშირებულია ეგრეთწოდებულ ტიურინგის არამდგრადობის მოვლენასთან, რაც იწვევს სხვადასხვა ცხოველებსა (ვეფხვი, პანტერა, ზებრა, გველი) და მცენარეებში კანონზომიერი ლაქებისა და ზოლების გაჩენას.

(4.12) არაწრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ხდება შემდეგი ალგორითმით:

დროითი ბიჯის ყოველ შრეზე ვიხილავთ შემდეგი იტერაციას:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t} - \Delta u^{(s)} &= f_u - u^{(s)} - \frac{4u^{(s)}v^{(s-1)}}{1+(u^{(s)})^2} \\ \frac{\partial v^{(s)}}{\partial t} - \Delta v^{(s)} &= f_v + u^{(s)} - \frac{cu^{(s)}v^{(s)}}{1+(u^{(s)})^2}\end{aligned}\tag{4.13}$$

ყოველი იტერაციისათვის განტოლების ამოხსნა ხორციელდება 1.2 პარაგრაფში შემოთავაზებული მეოთხე რიგის სიზუსტის და ასევე [17] და [9] შრომებში აგებული პირველი და მეორე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემების გამოყენებით. გაკეთებულია სხვადასხვა დეკომპოზიციის სქემების გამოყენებით მიღებული რიცხვითი შედეგების შედარებითი ანალიზი.

გათვლილია ტესტური შემთხვევა, როდესაც ამონახსნთა წყვილი მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned}u &= e^{\pi t} \sin(m\pi x) \sin(m\pi y), \\ v &= e^{-\pi t} \sin(m\pi x) \sin(m\pi y),\end{aligned}\tag{4.14}$$

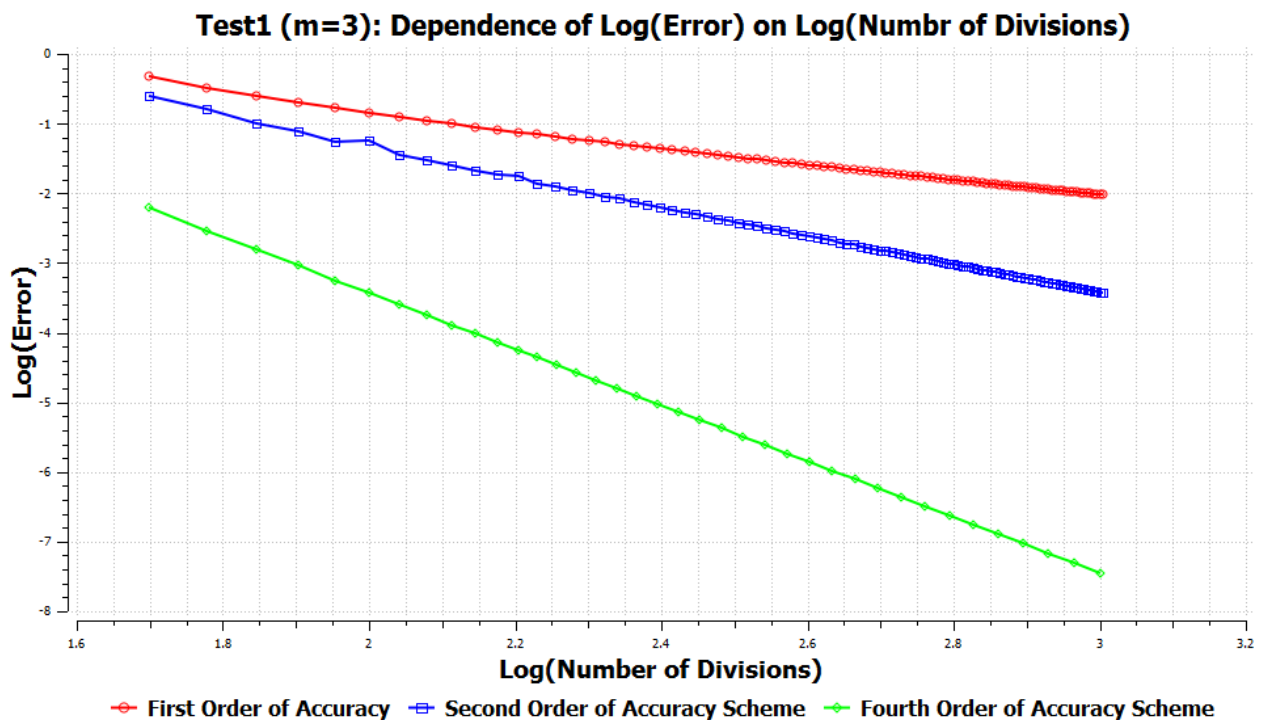
განხილულია ორი ტესტური შემთხვევა:  $m = 3$  და  $m = 11$ .

მოყვანილია თითოეული შემთხვევისათვის მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების ამსახველი გრაფიკები, სადაც ცდომილებად აღებულია შემდეგი ფარდობითი ცდომილება:

$$\frac{\|u - \tilde{u}\|}{\|u\|} + \frac{\|v - \tilde{v}\|}{\|v\|} \quad (4.15)$$

სადაც  $(u, v)$  ზუსტ ამონახსნთა წყვილია, ხოლო  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ -ით აღნიშნულია მიახლოებით ამონახსნთა წყვილი.

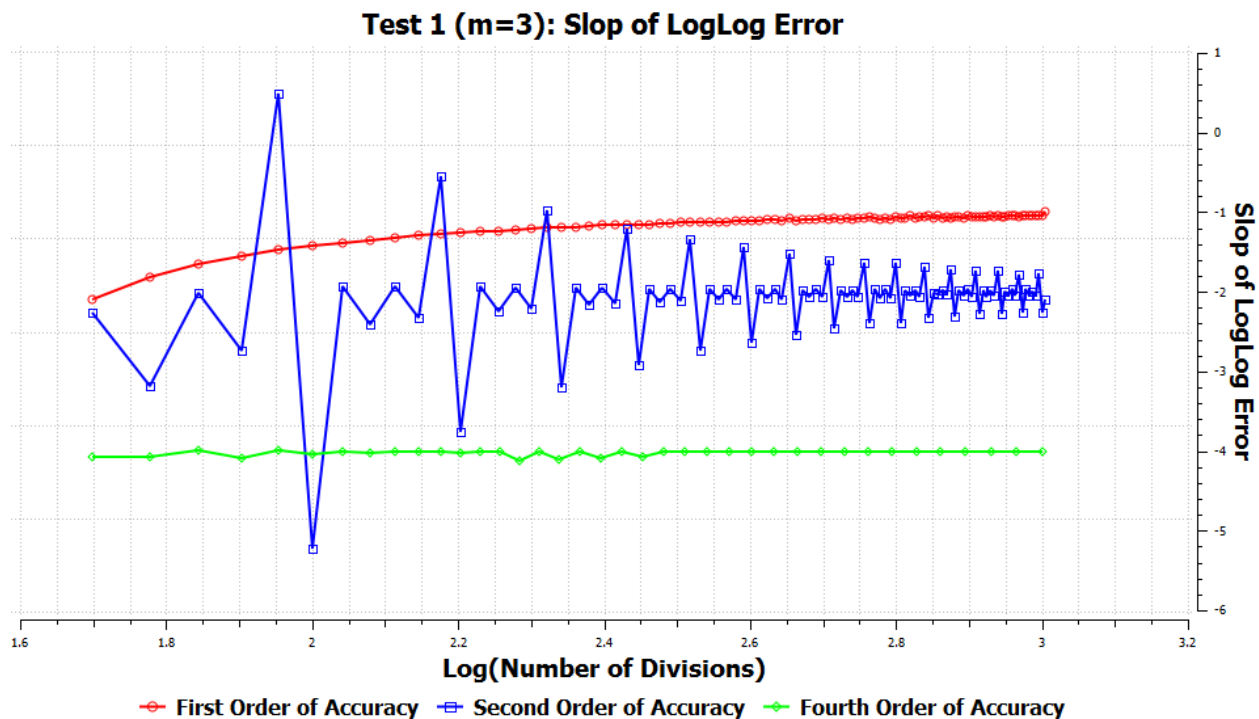
სურათი 4.4-ზე მოცემულია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების ლოგარითმის დამოკიდებულება დროითი ბიჯის დაყოფათა რიცხვის ლოგარითმზე პირველი, მეორე და მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემებისათვის  $m = 3$  შემთხვევისათვის.



**სურათი 4.4** (4.12) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების ლოგარითმის დამოკიდებულება დროითი ბიჯის დაყოფათა რიცხვის ლოგარითმზე პირველი, მეორე და მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემებისათვის  $m = 3$  შემთხვევისათვის.

გრაფიკებიდან ჩანს, რომ სამივე წირი უახლოვდება წრფეს - ამ წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები განსაზღვრავენ ცდომილების რიგს. სურათი 4.2-ზე მოცემულია მიახლოებითი ამონახსნის (პირველი, მეორე და მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემებისათვის) ცდომილების ლოგარითმული გრაფიკების საკუთხო კოეფიციენტების დამოკიდებულება დროითი ბიჯის მიხედვით დაყოფათა რიცხვზე. ამ სურათიდან კარგად ჩანს, რომ დროითი

ბიჯის შემცირებასთან ერთად ცდომილების ლოგარითმული გრაფიკების საკუთხო კოეფიციენტები მიისწრაფიან შესაბამისი სიზუსტის რიგისკენ.

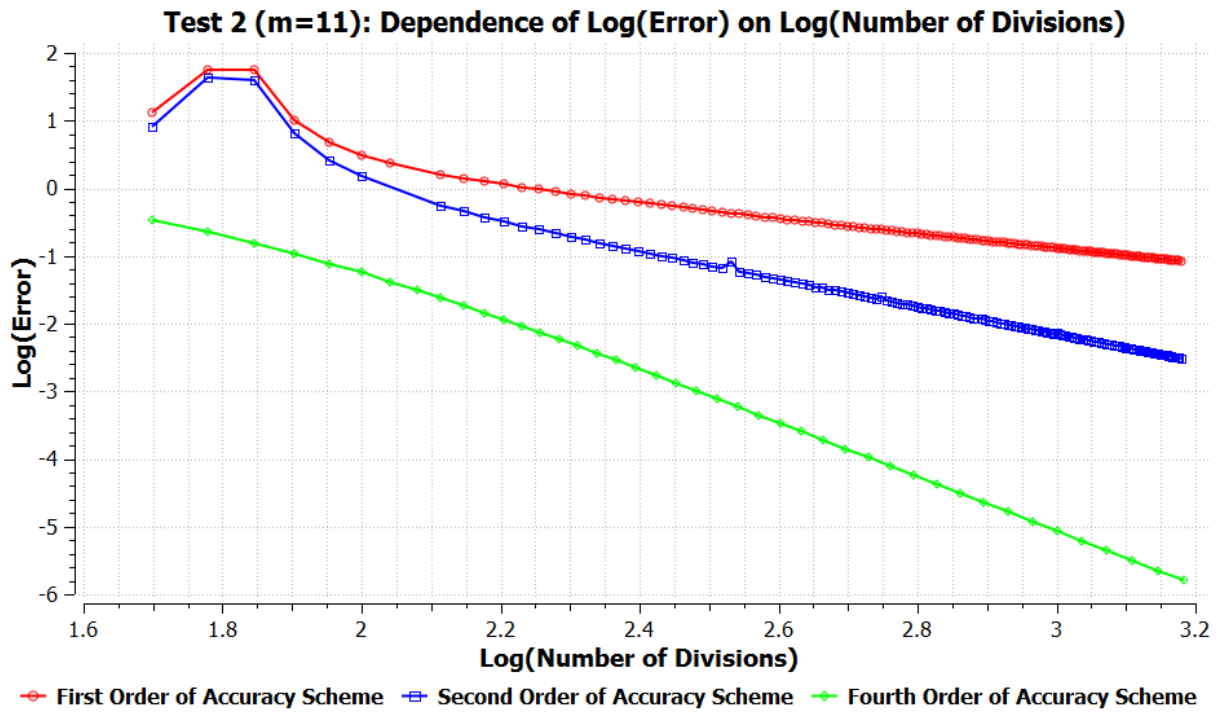


**სურათი 4.5.** მიახლოებითი ამონახსნის (პირველი, მეორე და მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემებისათვის) ცდომილების ლოგარითმული გრაფიკების საკუთხო კოეფიციენტების დამოკიდებულება დროითი ბიჯის მიხედვით დაყოფათა რიცხვზე.

სურათი 4.5-ზე მოცემულია მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების ლოგარითმის დამოკიდებულება დროითი ბიჯის დაყოფათა რიცხვის ლოგარითმზე პირველი, მეორე და მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემებისათვის,  $m = 11$ -თვის.

მიახლოებითი ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების ლოგარითმი უდრის -1 ნიშნავს, რომ სიზუსტე არის 1 ნიშნადი ციფრი, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ცდომილება უდრის 10%. ეს სიზუსტე 4.6 სურათზე მიიღწევა:

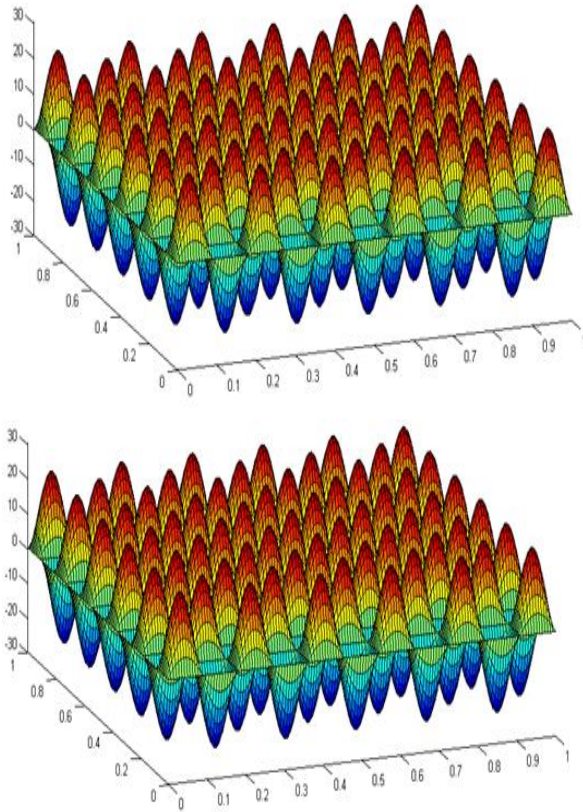
- პირველი რიგის სიზუსტის სქემისთვის  $\log(n) = 3.2$ ,  $n = 10^{3.2} = 1585$  კვანძის აღების შემთხვევაში;
- მეორე რიგის სიზუსტის სქემისთვის  $\log(n) = 2.45$ ,  $n = 10^{2.45} = 282$  კვანძის აღების შემთხვევაში;
- მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემისთვის  $\log(n) = 1.9$ ,  $n = 10^{1.9} = 80$  კვანძის აღების შემთხვევაში.



**სურათი 4.6.** (4.12) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილების ლოგარითმის დამოკიდებულება დროითი ბიჯის დაყოფათა რიცხვის ლოგარითმზე პირველი, მეორე და მეოთხე რიგის სიზუსტის დეკომპოზიციის სქემებისათვის  $m = 11$  შემთხვევისათვის.

(4.6) სურათიდან ადვილად შეიძლება გამოითვალოს, რომ უფრო მაღალი სიზუსტის მისაღწევად გაცილებით დიდია განსხვავება, მაგალითად ხუთი ნიშნადი ციფრის სიზუსტით გამოთვლისათვის (რაც 0.001% ცდომილების ექვივალენტურია) საჭიროა:

- პირველი რიგის სიზუსტის სქემისთვის  $\log(n) = 7.2, n = 10^{7.2} = 15,848,932$  კვანძის ალების შემთხვევაში;
- მეორე რიგის სიზუსტის სქემისთვის  $\log(n) = 4.45, n = 10^{4.45} = 28,184$  კვანძის ალების შემთხვევაში;
- მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემისთვის  $\log(n) = 3, n = 10^3 = 1000$  კვანძის ალების შემთხვევაში;



**სურათი 4.7.** 4.12 ამოცანის ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნები  $m = 11$  შემთხვევისათვის

სურათი 4.7-ზე მოცემულია შესაბამისად მიახლოებითი და ზუსტი ამონახსნები, დროითი ბიჯი უდრის  $\tau = 1/120$  შემთხვევისათვის, განსხვავება ამ ორ შედეგს შორის არის 1%-ზე მცირე.

**სურათები 4.1-4.7-ის** ანალიზის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ პარაგრაფი 1.2-ში აგებული სქემის საფუძველზე შესაძლებელია პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა მაღალი რიგის სიზუსტით.

### ჰიპერბოლური განტოლება

თავი II-ში აგებული დეკომპოზიციის სქემის საფუძველზე შესრულებულია კომპიუტერული გათვლები შემდეგი სამგანზომილებიანი ჰიპერბოლური განტოლებისათვის:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(t, x, y, z), \\ (x, y, z) &\in \Omega \times [0, t], \quad \Omega = [0, 1]^3, \\ u(x, y, z, 0) &= \varphi_0(x, y, z), \quad u_t'(x, y, z, 0) = \varphi_1(x, y, z), \\ u(x, y, z, t) \Big|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

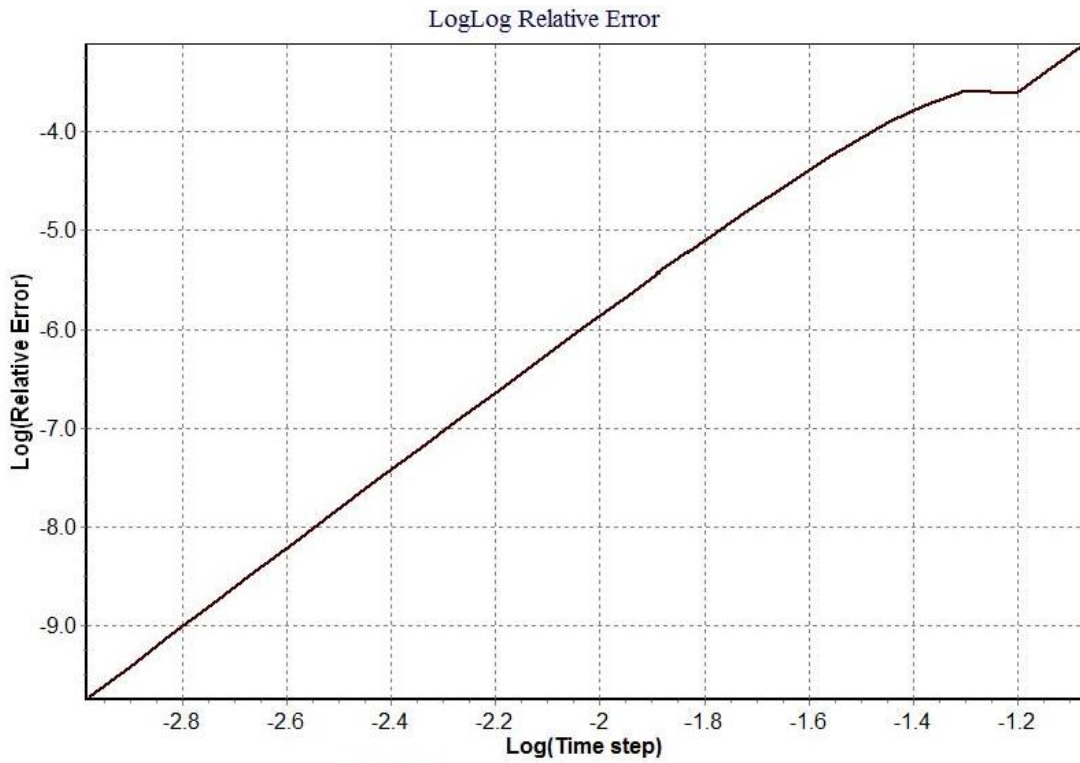
სადაც

$$\begin{aligned} f(t, x, y, z) &= \pi^2 (3 + m^2) \sin(m\pi t) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z), \\ \varphi_0(x, y, z) &= 0, \quad \varphi_1(x, y, z) = m\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z), \end{aligned} \quad (4.17)$$

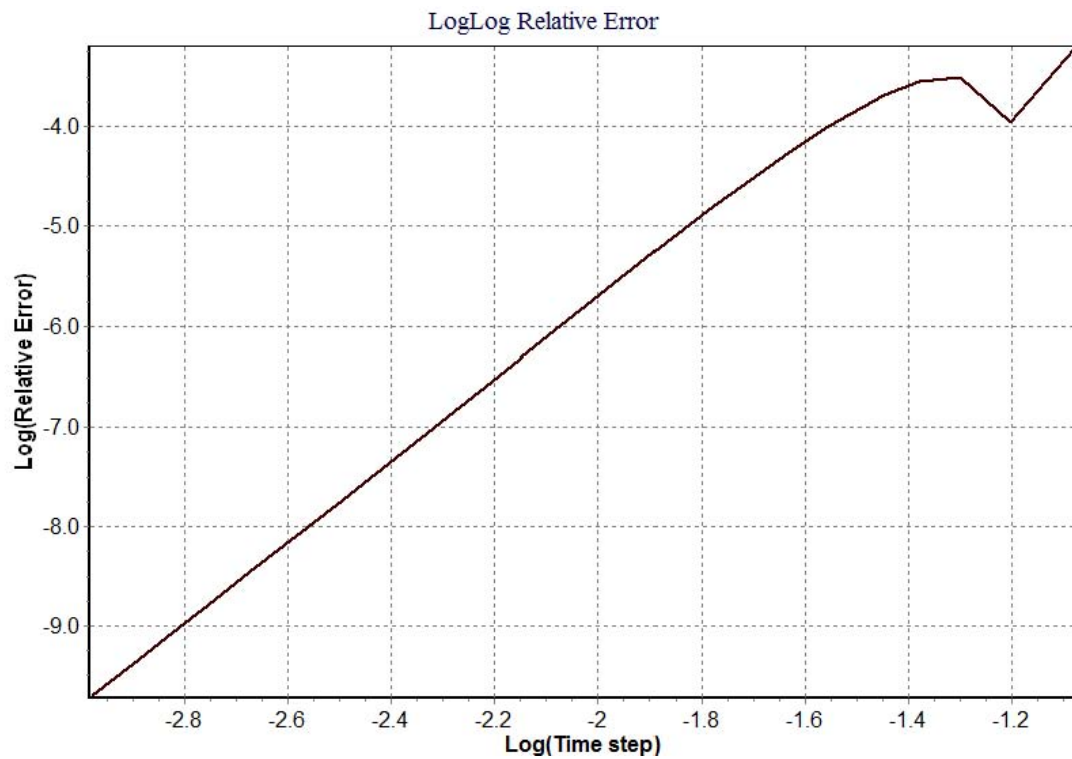
(4.16) ამოცანის კომპიუტერული გათვლა შესრულებულია მეორე თავში აგებული დეკომპოზიციის სქემის საფუძველზე. (4.8)-(4.10) სურათებზე მოცემულია (4.16) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების ლოგარითმის დამოკიდებულება დროითი ბიჯის ლოგარითმზე. (4.8) სურათზე განხილულია შემთხვევა, როდესაც  $m=1$ , სურათი (4.9) სურათზე  $m=3$ , ხოლო სურათი (4.10) სურათზე  $m=5$  შემთხვევა. გათვლები შესრულებულია შემდეგი დროითი ბიჯების მნიშვნელობებისათვის:  $\tau_k = \frac{T}{N_k}$ ,  $T = 0.75$ ,  $N_k = [10 * 1.2^k]$ ,  $k = 1, \dots, 25$ .

შევნიშნოთ, რომ სივრცითი ცვლადის მიმართ ვიყენებთ ასევე მეოთხე რიგის სიზუსტის სქემას. ამიტომ ბიჯს სივრცითი ცვლადის მიმართ ვიღებთ დროითი ბიჯის ტოლს  $h_x = h_y = h_z = \tau$ .



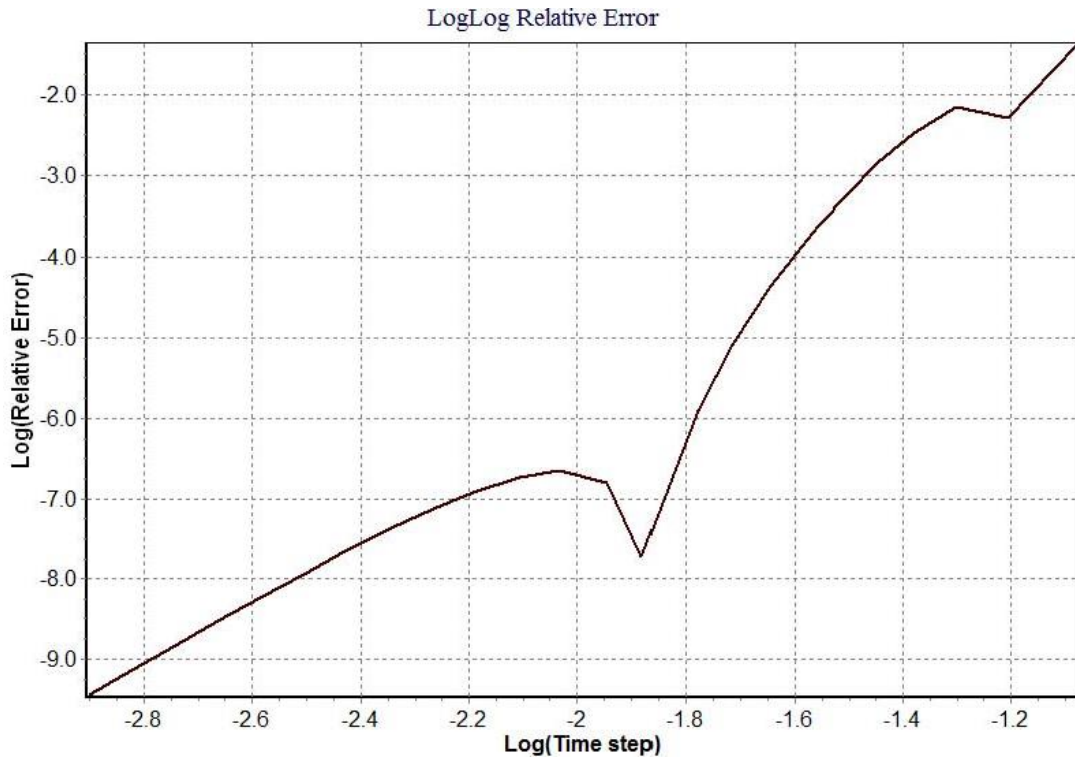


სურათი 4.8. (4.16) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი ცდომილების ლოგარითმული გრაფიკი  $m = 1$  შემთხვევისათვის



სურათი 4.9. (4.5) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი ცდომილების ლოგარითმული გრაფიკი  $m = 3$  შემთხვევისათვის





**სურათი 4.10.** (4.5) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი ცდომილების ლოგარითმული გრაფიკი  $m = 5$  შემთხვევისათვის

კომპიუტერული ექსპერიმენტის მიზანია, რიცხვითი მეთოდების საშუალებით დადგინდეს კრებადობის რიგი. თუ რიცხვითი გათვლის ალგორითმი არის მეოთხე რიგის სიზუსტის, მაშინ დაწყებული რომელიღაც  $\tau$  დროითი ბიჯის მნიშვნელობიდან, ფუნქციის წირი (მიახლოებითი ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების ლოგარითმი) უნდა მიუახლოვდეს წრფეს, რომლის კუთხური კოეფიციენტი უდრის ოთხს. სამივე სურათზე ჩანს, რომ დაწყებული დროითი ბიჯის გარკვეული მნიშვნელობიდან ( $m = 1$ -ის შემთხვევაში  $\text{Log}(\tau) = -1.3, \tau = 0.05$ ;  $m = 3$ -ის შემთხვევაში  $\text{Log}(\tau) = -1.5, \tau = 0.03$ ;  $m = 5$ -ის შემთხვევაში  $\text{Log}(\tau) = -2.1, \tau = 0.015$ ), წირი უახლოვდება წრფეს, რომლის საკუთხო კოეფიციენტი უდრის ოთხს, რაც ადასტურებს თავი 2-ში მიღებულ თეორიულ შედეგს.

შევნიშნოთ, რომ  $m$ -ის ზრდა იწვევს ამონახსნის ოსცილაციის სიხშირის ზრდას, ამის გამო ამონახსნის ყოფაცემის დაჭერა რთულდება დაბალი რიგის სიზუსტის სქემების გამოყენებით და საჭირო ხდება მაღალი რიგის სიზუსტის სქემების გამოყენება. 4.8-4.10 სურათებიდან ჩანს, რომ მეორე თავში აგებული დეკომპოზიციის სქემის გამოყენებით შესაძლებელია ოსცილირებადი ამონახსნის ყოფაცემის დაჭერა. ამასთან, ბუნებრივია, რომ ამონახსნის ოსცილაციის სიხშირის ზრდასთან ერთად მცირდება დროითი ბიჯის ის მნიშვნელობა, რომლიდანაც ცდომილების სტაბილიზაციის პროცესი იწყება (4.8 სურათზე  $m = 1$ -ის შემთხვევაში  $\text{Log}(\tau) = -0.2$ ; 4.9

სურათზე  $m = 3$  -ის შემთხვევაში  $Log(\tau) = -0.03$ ; 4.10 სურათზე  $m = 5$  -ის შემთხვევაში  $Log(\tau) = -0.015$ ).

## გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] H. Trotter, "On the product of semigroup of operators," *Proc. Amer. Mat. Soc.*, vol. 10, pp. 545-551, 1959.
- [2] P. R. Chernoff, "Note on product formulas for operators semigroups," *J. Functional Anal*, vol. 2, pp. 238-242, 1968.
- [3] P. R. Chernoff, "Semigroup product formulas and addition of unbounded operators," *Bull. Amer. Mat. Soc.*, vol. 76, pp. 395-398, 1970.
- [4] J. Douglas, "On numerical integration of by impilicit methods," *SIAM*, vol. 9, no. 1, pp. 42-65, 1955.
- [5] J. Douglas and H. Rachford, "On the numerical solution of heat condition problems in two and three space variables," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 82, no. 2, pp. 421-439, 1956.
- [6] D. Peacmen and H. Rachford, "The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 28-41, 1955.
- [7] V. B. Andreev, "On difference schemes with a splitting operator for general p-dimensional parabolic equations of second order with mixed derivatives," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 7, no. 2, pp. 312-321, 1967.
- [8] G. A. Baker, "An implicit, numerical method for solving the twodimensional heat equation," *Quart. Appl. Math.*, vol. 17, no. 4, pp. 440-443, 1959/1960.
- [9] G. A. Baker and T. A. Oliphant, "An implicit, numerical method for solving the two-dimensional heat equation," *Quart. Appl. Math.*, vol. 17, no. 4, pp. 361-373, 1959/1960.
- [10] G. Birkhoff and R. S. Varga, "Implicit alternating direction methods," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 92, no. 1, pp. 13-24, 1959.
- [11] G. Birkhoff, R. S. Varga and D. Young, "Alternating direction implicit methods," *Advances in Computers., Academic Press, New York,* vol. 3, pp. 189-273, 1962.
- [12] E. G. Diakonov, "Difference schemes with a splitting operator for nonstationary equations," *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, vol. 144, no. 1, pp. 29-32, 1962.
- [13] E. G. Diakonov, "Difference schemes with splitting operator for higherdimensional non-stationary problems," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 2, no. 4, pp. 549-568, 1962.

- [14] M. Dryja, "Stability in W2 2 of schemes with splitting operators," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 7, no. 2, pp. 296-302, 1967.
- [15] G. Fairweather, A. R. Gourlay and A. R. Mitchell, "Some high accuracy difference schemes with a splitting operator for equations of parabolic and elliptic type," *Numer. Math.*, vol. 10, no. 2, pp. 56-66, 1967.
- [16] I. V. Fryazinov, "Increased precision order economical schemes for the solution of parabolic type multi-dimensional equations," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 9, no. 6, pp. 1319-1326, 1969.
- [17] D. G. Gordeziani, "On application of local one-dimensional method for solving parabolic type multi-dimensional problems of 2m-degree," *Proceeding of Science Academy of GSSR*, vol. 3, no. 39, pp. 535-542, 1965.
- [18] A. R. Gourlay and A. R. Mitchell, "Intermediate boundary corrections for split operator methods in three dimensions," *Nordisk Tidskr. InformationsBehandling*, vol. 7, no. 1, pp. 31-38, 1967.
- [19] N. N. Ianenko, "On Economic Implicit Schemes (Fractional steps method)," *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, vol. 134, no. 5, pp. 84-86, 1960.
- [20] N. N. Ianenko, *Fractional steps method of solving for multi-dimensional problems of mathematical physics*, Novosibirsk: Nauka, 1967.
- [21] N. N. Ianenko and G. V. Demidov, "The method of weak approximation as a constructive method for building up a solution of the Cauchy problem," *Izdat. "Nauka", Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, Certain Problems Numer. Appl. Math.*, pp. 60-83, 1966.
- [22] A. N. Konovalov, "The fractional step method for solving the Cauchy problem for an n-dimensional oscillation equation," *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, vol. 147, no. 1, pp. 25-27, 1962.
- [23] G. I. Marchuk and N. N. Ianenko, "The solution of a multi-dimensional kinetic equation by the splitting method," *Dokl. Akad. Nauk SSSR.*, vol. 157, no. 6, pp. 1291-1292, 1964.
- [24] G. I. Marchuk and U. M. Sultangazin, "On a proof of the splitting method for the equation of radiation transfer," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 5, no. 5, pp. 852-863, 1965.
- [25] V. P. Ilin, "On the splitting of difference parabolic and elliptic equations," *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 6, no. 1, pp. 1425-1428, 1965.
- [26] A. A. Samarskii, "Locally homogeneous difference schemes for higherdimensional equations of hyperbolic type in an arbitrary region.," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 4, pp. 638-648, 1962.

- [27] A. A. Samarskii, "On an economical difference method for the solution of a multi-dimensional parabolic equation in an arbitrary region," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 2, no. 5, pp. 787-811, 1962.
- [28] A. A. Samarskii, "On the convergence of the method of fractional steps for the heat equation," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 2, no. 6, pp. 1117-1121, 1962.
- [29] R. Temam, "Sur la stabilite et la convergence de la methode des pas fractionnaires," *Ann. Mat. Pura Appl.*, vol. 4, no. 79, pp. 191-379, 1968.
- [30] T. Ichinose and S. Takanobu, "The norm estimate of the difference between the Kac operator and the Schrodinger emigroup," *Nagoya Math. J.*, vol. 149, pp. 53-81, 1998.
- [31] T. Ichinose and H. Tamura, "The Norm Convergence of the Trotter-Kato Product Formula with Error Bound," *Commun. Math. Phys.*, vol. 217, pp. 489-502, 2001.
- [32] J. L. Rogava, "On the error estimation of Trotter type formulas in the case of self-Andjoint operator," *Functional analysis and its aplication*, vol. 27, no. 3, pp. 84-86, 1993.
- [33] J. L. Rogava, *Semi-discrete schemes for operator differential equations*, Tbilisi: Georgian Technical University press, 1995.
- [34] G. I. Marchuk, *Split methods*, M.: Nauka, 1988.
- [35] D. Gordeziani and H. Meladze, "On modeling multi-dimensional quasilinear equation of parabolic type by one-dimensional ones," *Proceeding of Science Academy of GSSR.*, vol. 60, no. 3, pp. 537-540, 1970.
- [36] D. Gordeziani and H. Meladze, "On modeling of third boundary value problem for the multi-dimensional parabolic equations of arbitrary area by the one-dimensional equations," *SSSR. Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 14, no. 1, pp. 246-250, 1974.
- [37] D. G. Gordeziani and A. A. Samarskii, "Some problems of plates and shells thermo elasticity and method of summary approximation," *Complex analysis and it's applications*, vol. 666, pp. 173-186, 1978.
- [38] A. M. Kuzyk and V. L. Makarov, "Estimation of an exactitude of summarized approximation of a solution of Cauchy abstract problem," *Dokl. Akad. Nauk USSR*, vol. 275, no. 2, pp. 297-301, 1984.
- [39] A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Additive schemes for mathematical physics problems*, M.: Nauka, 1999.
- [40] I. O. Abuladze, T. A. Dzhangveladze, D. G. Gordeziani and T. K. Korshia, "Discrete Models for a Nonlinear Magnetic-Field-Scattering Problem with Thermal Conductivity," *Diff. Eq.*, vol. 22, p. 769-777, 1986.

- [41] I. O. Abuladze, T. A. Dzhangveladze, D. G. Gordeziani and T. K. Korshia, "On the Numerical Modeling of a Nonlinear Problem of the Diffusion of a Magnetic Field with Regard to Heat Conductivity," *Proc. I.Vekua Inst. Appl. Math.*, vol. 18, pp. 48-67, 1986.
- [42] T. Jangveladze and Z. Kiguradze, "Proceedings of the 2nd International Conference on Applied, Numerical and Computational Mathematics (ICANCM '13)," in *WSEAS Conference Proceedings: Recent Advances in Mathematical Methods and Computational Techniques in Modern Science*, Morioka, Japan, 2013.
- [43] B. O. Dia and M. Schatzman, "Comutatuers semi-groupes holomorphes et applications aux directions alternees," *Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 30, no. 3, pp. 343-383, 1996.
- [44] Q. Sheng, "Solving linear partial differential equation by exponential splitting," *IMA J. Numerical Anal.*, vol. 9, pp. 199-212, 1989.
- [45] Z. G. Gegechkori, J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "High-degree precision decomposition method for an evolution problem," *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, vol. 14, no. 3, pp. 45-48, 1999.
- [46] Z. G. Gegechkori, J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "Sequention-Parallel method of high degree precision for Cauchy abstract problem solution," *Comput. Methods in Appl. Math.*, vol. 1, no. 2, pp. 173-187, 2001.
- [47] Z. G. Gegechkori, J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "Differential Scheme of High Degree Precision Decomposition of Nonhomogenous Evolution Problem," *Applied Mathematics and Informatics*, vol. 6, no. 1, pp. 45-80, 2001.
- [48] Z. G. Gegechkori, J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "High Degree Precision Decompostion Method for the Nonhomogenous Evolution Problem With an Operator Under a Split Form," *Tbilisi, Bulletin of TICMI*, vol. 5, pp. 13-18, 2001.
- [49] Z. G. Gegechkori, J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "High degree precision decomposition formulas of semigroup approximation," *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, vol. 16, no. 1-3, pp. 89-92, 2001.
- [50] Z. G. Gegechkori, J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "High degree precision decomposition method for the evolution problem with an operator under a split form," *Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 36, no. 4, pp. 693-704, 2002.
- [51] J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "Third Order of Accuracy Sequential Type Decomposition Schemes for Two and Multidimensional Evolution Problems," *Applied Mathematics and Informatics*, vol. 10, no. 1, pp. 72-87, 2005.
- [52] M. A. Tsiklauri, "High Order of Accuracy Decomposition Method for an Evolution Problem with Variable Operator," *Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, Vols. 50-51, pp. 103-117, 2000-2001.

- [53] M. A. Tsiklauri, "High Order of Accuracy Decomposition of the Evolution Problem with Variable Operator Using Resolvent Polinoms," *Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, Vols. 50-51, pp. 118-128, 2000-2001.
- [54] J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "Fourth Order of Accuracy Sequential Type Decomposition Schemes for Evolution Problems," *Applied Mathematics and Informatics*, vol. 10, no. 2, pp. 90-101, 2005.
- [55] J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "An Automatically Stable and Order Three Split Rational Approximation of a Semigroup," *Georgian Mathematical Journal*, vol. 13, no. 2, pp. 343-362, 2006.
- [56] J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "High Order Accuracy Decomposition Schemes for Evolution Problem," *Lect. Notes TICMI*, vol. 7, p. 164, 2006.
- [57] J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "Fourth Order of Accuracy Kranc-Nickolson type Decomposition Scheme for Multidimensional Evolution Problem," *Appl. Math. Inform. Mech.*, vol. 13, no. 1, pp. 24-32, 2008.
- [58] J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "On Error Estimation of Symmetric Decomposition Scheme for Multidimensional Evolution Problem," *Appl. Math. Inform. Mech.*, vol. 13, no. 2, pp. 106-112, 2008.
- [59] J. L. Rogava and M. A. Tsiklauri, "The fourth order of accuracy sequential type rational splitting of inhomogeneous evolution problem," *Ukrainian Mathematical Bulletin*, vol. 6, no. 3, pp. 357-371, 2009.
- [60] G. Vilmart, Étude d'intégrateurs géométriques pour des équations différentielles, PhD Thesis, 2008.
- [61] F. Castella, P. Chartier, S. Descombes and G. Vilmart, "Splitting methods with complex times for parabolic equations," *BIT Numer Math*, vol. 49, p. 487–508, 2009.
- [62] P. N. Vabishchevich, "SM-Stability of Operator-Difference Schemes," *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 52, no. 6, p. 887–894, 2012.
- [63] D. G. Gordeziani, "A certain economical difference method for the solution of a multidimensional equation of hyperbolic type," *Appl. Math. Inst. Sem.*, no. 4, pp. 11-14, 1971.
- [64] Q. Sheng, A. Q. M. Khaliq and D. A. Voss, "Numerical simulation of two-dimensional sine-Gordon solitons via a split cosine scheme," *Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 68, no. 4, p. 355–373, 2005.
- [65] Q. Sheng, D. A. Voss and A. Q. M. Khaliq, "An adaptive splitting algorithm for the sine-Gordon equation," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, pp. 792-797, 2005.
- [66] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, "Construction of the Third Order of Accuracy Sequential Type Decomposition Scheme and Numerical Computation for

Multidimensional Inhomogeneous Evolution Problem," in *Abstracts Book of European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, ENUMATH 2009*, Uppsala, Sweden, 2009.

- [67] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, "The Third Order of Accuracy Decomposition Scheme for Quasi-Linear Evolution Problem," in *Abstracts of the International Conference CMAM-4 Computational Methods in Applied Mathematics*, Bedlewo, Poland, 2010.
- [68] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, "High Order of Accuracy Operator Splitting Scheme for Quasi-Linear Multidimensional Evolution Problem," in *Abstracts book of the International Conference Information and Computer Technologies, Dedicated commemoration of professors Elene Dekanoidze and Murman Tsuladze, outstanding representatives of Georgian informatics scientific school*, Tbilisi, Georgia, 2010.
- [69] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, "Construction, investigation and numerical resolution of high order accurate semi-discrete decomposition scheme for multidimensional quasi-linear evolution problem," in *Abstract Book of 10th IMACS International Symposium on Iterative Methods in Scientific Computing*, Marakesh, Morocco, 2011.
- [70] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, "The Fourth Order of Accuracy Operator Splitting Scheme for Quasi-Linear Evolution Problem," in *Abstracts book of First International Conference of the Georgian Mathematical Union*, Batumi, Georgia, 2010.
- [71] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, "Construction and Numerical Resolution of High Order Accuracy Decomposition Scheme for Multidimensional Quasi-Linear Evolution Equation," *Journal of American Institute of Physics (AIP) Conference Proceedings - NUMERICAL ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS ICNAAM 2011*, vol. 1389, pp. 1802-1805, 2011.
- [72] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, "Construction and Investigation of a Fourth Order of Accuracy Decomposition Scheme for Nonhomogeneous Multidimensional Hyperbolic Equation," *Taylor & Francis: Journal of Numerical Functional Analysis and Optimization*, Accepted for publication  
<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01630563.2013.812423#.Uhh6RhusiSp>  
2013.
- [73] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, „Operator Splitting for Quasi-Linear Abstract Hyperbolic Equation,“ *MARIE CURIE'S INTERNATIONAL RESEARCH STAFF EXCHANGE SCHEME (IRSES) IN THE 7TH EUROPEAN FRAMEWORK PROGRAM, Proceedings of the International Conference Lie Groups, Differential Equations and Geometry*, ბმს 1, pp. 85-90, 2013.
- [74] N. Dikhaminjia, J. Rogava and M. Tsiklauri, "Operator Splitting for Quasi-linear Evolution Problem with Variable Operator," in *Second International Conference "Modern Problems in Applied Mathematics", Book of Abstracts*, Tbilisi, Georgia, 2013.



- [75] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1965.
- [76] K. Kato, The theory of perturbations of linear operators, M.: Mir, 1972.
- [77] N. S. Bakhvalov, Numerical Methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations, M.: Nauka, 1977.
- [78] T. S. Vashakmadze, "To numerical solution of boundary value problems," *Jurnal Vichislitelnoi Matematiki i matematicheskoi Fiziki*, vol. 4, no. 4, pp. 623-637, 1964.
- [79] T. S. Vashakmadze, "To Approximate Solution of Ordinary Differential Equations," *Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory*, vol. 41, pp. 165-181, 2012.
- [80] S. B. Reed M., Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis, Second edition ed., New York: Academic Press, Inc, 1980.
- [81] S. G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Space, M.: Nauka, 1967.
- [82] G. Szego, Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society Colloquium Publications, 1959.
- [83] B. Perthame, Growth, reaction, movement and diffusion from biology, [http://www.ann.jussieu.fr/~perthame/cours\\_M2.pdf](http://www.ann.jussieu.fr/~perthame/cours_M2.pdf), 2012.